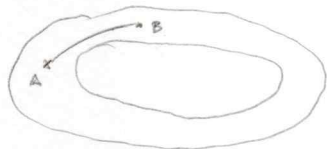


Geometría de curvas y superficies.

→ Geometría extrínica

→ Geometría intrínica.

Geometría en un toro



Referencias.

▷ Differential Geometry of curves and surfaces H. Do. Grimo.

▷ Differential Geometry of Curves - Kobayashi

Calificaciones.

→ Evaluaciones 35% c/u

→ Talleres 30%

→ Curvas que conocemos

Círculos $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$

Elipse $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\}$

Hiperbole $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\}$

$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0\}$

funciones.

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - f(x) = 0\}$

En el espacio:

$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ x - y + 3z + 10 = 0 \end{cases}\}$

$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 - 3 = 0 \\ x + 3y - 6 = 0 \end{cases}\}$

Definición

Dados $f_1, f_2, \dots, f_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ y $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, al conjunto.

$\mathcal{E} := \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : f_i(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) - c_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n\}$

le llamamos curva de nivel en \mathbb{R}^{n+1} .

Al sistema

$f_i(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) - c_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

le llamamos representación implícita de la curva de nivel

Curvas parametrizadas.

Una curva parametrizada en \mathbb{R}^n es un mapa

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto convexo no unitario y

$$\gamma_i : I \rightarrow \mathbb{R}$$

para cada $i = 1, \dots, n$, a las cuales nos referimos como funciones componentes de γ . Llamamos a t el parámetro de la curva.

Dadas una curva de nivel \mathcal{E} en \mathbb{R}^n y una curva parametrizada

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

decimos que $\gamma(I) \subseteq \mathcal{E}$ es una parametrización de (de parte de) \mathcal{E} cuando $\gamma(I) \subseteq \mathcal{E}$.

Recordemos que los únicos conjuntos convexos en \mathbb{R} son los intervalos

Ejemplo: La brújula de Agresti

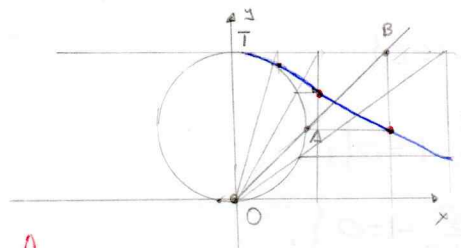
Sea $a > 0$ arbitrario pero fijo. A la curva de nivel en \mathbb{R}^2

$$\mathcal{C} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{a^3}{x^2 + y^2} \right\}$$

se la conoce como curva de Agresti. El mapa,

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = \left(t, \frac{a^3}{t^2 + a^2} \right) \end{aligned}$$

es una parametrización para \mathcal{C} .



Ejemplo: Espiral de Arquímedes

Para $a, b > 0$, en coordenadas polares, la curva de nivel

$$\mathcal{C} = \{ (r, \theta) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} : r = a + b\theta \}$$

se conoce como la espiral de Arquímedes, y representa la trayectoria que recorre un punto moviéndose a velocidad constante sobre una recta que gira sobre un punto de origen fijo a velocidad angular constante.

En coordenadas cartesianas tenemos que

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) \end{aligned}$$

entonces

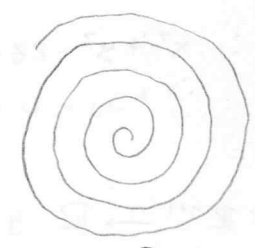
$$\begin{aligned} x &= (a + b\theta) \cos(\theta) \\ y &= (a + b\theta) \sin(\theta) \end{aligned}$$

tomando $\theta = t$, con $t \in \mathbb{R}$, se obtiene que

$$\begin{cases} x = (a + bt) \cos(t) \\ y = (a + bt) \sin(t) \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

a modifica el centro
b la amplitud.

es una parametrización



$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = ((a+bt) \cos(t), (a+bt) \sin(t)) \end{aligned}$$

Curvas suaves.

Consideremos la curva parametrizada

$$\begin{aligned} \gamma: I \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \end{aligned}$$

Si cada una de las funciones componentes son k veces diferenciables respecto a t sobre $\text{int}(I)$, la k -ésima derivada de γ respecto a t no es más que

$$\frac{d^k \gamma}{dt^k}(t) = \gamma^{(k)}(t) = (\gamma_1^{(k)}(t), \dots, \gamma_n^{(k)}(t))$$

Decimos que γ es una curva suave cuando $\gamma^{(k)}$ existe sobre $\text{int}(I)$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$ (smooth curve)

Escribimos

• $\gamma^{(0)} = \gamma$

• $\gamma'(t) = \gamma^{(1)}(t)$

• $\gamma''(t) = \gamma^{(2)}(t)$

→ vector tangente, velocidad en t
a γ'

vector normal (aceleración) a γ' en t .

$\| \gamma'(t) \|$ rapidez instantánea en t

Decimos que la curva parametrizada

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

es integrable, cuando cada función componente es integrable.

Escribimos

$$\int_a^b \gamma(t) dt = \left(\int_a^b \gamma_1(t) dt, \dots, \int_a^b \gamma_n(t) dt \right)$$

Notemos que

$$\int \gamma'(x) dx = \gamma(x) + c$$

donde c es una constante.

Propiedades.

Sean $\gamma_1, \gamma_2: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ curvas parametrizadas que admiten derivadas de primer orden sobre $\text{int}(I)$

Se tiene que:

- $(\alpha \gamma_1(t) + \beta \gamma_2(t))' = \alpha \gamma_1'(t) + \beta \gamma_2'(t)$;
- Regla de Leibniz para el producto interno: $(\gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t))' = \gamma_1'(t) \cdot \gamma_2(t) + \gamma_1(t) \cdot \gamma_2'(t)$.
- Regla de la cadena: Si $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admite una derivada de primer orden e $\text{Im}(F) \subseteq \text{int}(I)$,

entonces

$$\gamma_1'(F(t)) = \gamma_1'(F(t)) F'(t)$$

- Regla de Leibniz para el producto escalar: Si $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ admite derivada de primer orden en el $\text{int}(I)$,

entonces

$$(F(t) \gamma_1'(t))' = F(t) \gamma_1''(t) + F'(t) \gamma_1'(t)$$

para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y para cada $t \in \text{int}(I)$.

Además, si

$$\underbrace{\gamma_1'(t) \cdot \gamma_1'(t)}_{\text{producto punto}} = c$$

para cada $t \in \text{int}(I)$, con $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\gamma_1''(t) \cdot \gamma_1'(t) = 0.$$

para cada $t \in \text{int}(I)$ y también

$$\frac{d}{dt} \|\gamma_1'(t)\|^2 = 2 \gamma_1'(t) \cdot \gamma_1''(t) \quad \text{para cada } t \in \text{Int}(I).$$

$$\frac{d}{dt} \|\gamma_1'(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \gamma_1'(t) \cdot \gamma_1'(t) = \gamma_1''(t) \cdot \gamma_1'(t) + \gamma_1'(t) \cdot \gamma_1''(t) = 2 \gamma_1''(t) \cdot \gamma_1'(t).$$

Longitud de una curva

Dada una curva parametrizada $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, para cada $t_0, t \in I$, $t_0 \leq t$, definimos la longitud de la curva γ entre $\gamma(t_0)$ y $\gamma(t)$ por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du \tag{1}$$

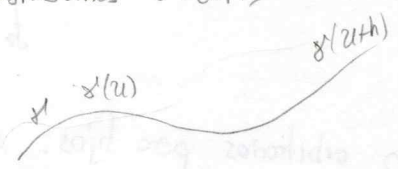
Cuando t_0 permanece fijo (punto de inicio) y $t \geq t_0$ varía, obtenemos una mapa real valuada s con la fórmula, al cual denominamos función longitud de arco.

$$\|\gamma(u+h) - \gamma(u)\| \approx \|\gamma'(u)\| \cdot h.$$

La longitud aproximada de la curva, sería

$$\sum \|\gamma'(u)\| \cdot h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^1 \|\gamma'(u)\| du$$

Consideremos $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$



$\frac{1}{h}$
 $u \in [0, 1]$ arbitrario pero fijo y
 $h > 0$ tal que $u+h \in [0, 1]$

Nota 1.

En el caso de que $\|x'(t)\| = 1$ para cada $t \in I$, a lo que denominamos γ es de rapidez unitaria, el cálculo de la longitud de curvas es muy sencillo.

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|x'(t)\| dt = \int_{t_0}^t 1 dt = t - t_0$$

Definición 1.

Una curva parametrizada $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, con I abierto, es regular cuando

$$\gamma'(t) \neq 0 \quad \text{para cada } t \in I$$

Existe un procedimiento para obtener una curva de rapidez unitaria.

Ejemplo: Espiral logarítmica.

Sea $k \in \mathbb{R}$ arbitrario pero fijo. La curva parametrizada

$$\gamma: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \gamma(t) = (e^{kt} \cos(t), e^{kt} \sin(t))$$

es una limaçon. En este caso, $\gamma'(t) = (k e^{kt} \cos(t) - e^{kt} \sin(t), k e^{kt} \sin(t) + e^{kt} \cos(t))$

$$\|\gamma'(t)\| = e^{kt} \sqrt{1+k^2} \quad \text{y} \quad s(t) = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} (e^{kt} - 1)$$

para $k \geq 0$. La espiral logarítmica es una curva parametrizada regular.

Jueves 3 de junio de 2021

En adelante, asumimos que todas las curvas parametrizadas son suaves

Ejemplo.

Consideremos una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, la cual admite derivada de primer orden en (a, b) . La curva parametrizada

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \gamma(t) = (t, f(t)).$$

tiene longitud

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

entre $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$.

Ejemplo. Consideremos una curva plana descrita en coordenadas polares (r, θ) con $r = r(\theta)$ y $\theta \in [a, b]$, cuya parametrización es

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\theta \mapsto \gamma(\theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

En este caso, la longitud de γ entre $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ es

$$\int_a^b \sqrt{r^2(\theta) + (r'(\theta))^2} d\theta$$

Ejemplo.

Sean $a, c > 0$ arbitrarios pero fijos. A la curva

$$\gamma: [-c, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \gamma(t) = \left(t, \frac{1}{a} \cos(at)\right)$$

se le conoce como catenaria, y representa la figura que traza una cuerda de densidad uniforme cuyos extremos están fijos.

En este caso, la longitud de la curva catenaria entre $\gamma(-c)$ y $\gamma(c)$ es

$$\int_{-c}^c \sqrt{1 + \sinh^2(at)} dt = 2 \int_0^c \cosh(at) dt = \frac{2}{a} \sinh(a).$$

Notemos también que

$$\|\gamma'(t)\| \neq 0 \quad \forall t \in (-c, c),$$

lo que nos indica que γ es regular.

¿Las parametrizaciones de las curvas son únicas?

Consideremos las curvas de nivel

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}.$$

Notemos que las mapas

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \gamma(t) = (t, t^2)$$

y

$$\gamma_*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \gamma_*(t) = (t^3, t^6)$$

son parametrizaciones de C . En estas casos tenemos que

$$\gamma'(t) = (1, 2t)$$

$$\text{y } \gamma_*'(t) = (3t^2, 6t^5)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Notemos que γ es una parametrización regular de C , mientras que γ_* no lo es.

Reparametrizaciones.

Consideremos dos curvas parametrizadas suaves.

$$\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \gamma(t)$$

y

$$\tilde{\gamma}: \tilde{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$u \mapsto \tilde{\gamma}(u)$$

Decimos que $\tilde{\gamma}$ es una reparametrización de γ cuando existe

$$\varphi: \tilde{I} \rightarrow I$$

$$u \mapsto \varphi(u) = t$$

biyectiva, suave tal que φ^{-1} también es suave y además

$$\tilde{\gamma}(u) = \gamma(\varphi(u)) \quad \text{para cada } u \in \tilde{I}.$$

Llamamos a φ mapa de reparametrización entre γ y $\tilde{\gamma}$. Notemos que

$$\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\varphi^{-1}(t)) \quad \text{para cada } t \in I$$

Consideremos la curva $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ con su parametrización

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

Otra parametrización de C es

$$\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$u \mapsto \tilde{\gamma}(u) = (\sin u, \cos u)$$

Notemos que

$$\tilde{\gamma}(u) = (\sin(u), \cos(u))$$

$$= (\cos(\frac{\pi}{2} - u), \sin(\frac{\pi}{2} - u))$$

$$= \gamma(\varphi(u))$$

para cada $u \in \mathbb{R}$, con

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \varphi(u) = \frac{\pi}{2} - u$$

biyectiva, suave y con inversa suave. Así, $\tilde{\gamma}$ es una reparametrización de γ .

Propiedades.
Lema 1. Cualquier reparametrización de una curva regular suave, también es regular.

Demostración:

Sean $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada regular y

$$\tilde{\gamma}: \tilde{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

una reparametrización de γ .

Denotamos por φ al mapa de reparametrización. Sean $t \in I$, $u \in \tilde{I}$ tales que $t = \varphi(u)$, cualesquiera.

Puesto que $\varphi(\varphi^{-1}(t)) = t$, tenemos que

$$\frac{d\varphi}{dt}(\varphi^{-1}(t)) \cdot \frac{d\varphi^{-1}}{du}(u) = 1,$$

lo que nos indica que

$$\frac{d\varphi}{dt}(\varphi^{-1}(t)) \neq 0 \quad \text{para cada } t \in I \quad (2)$$

Además como $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(\varphi(u))$, vemos que

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{du}(u) = \frac{d\gamma}{dt}(\varphi(u)) \frac{d\varphi}{du}(u) \neq 0 \quad \text{para cada } u \in \tilde{I},$$

por (2) y puesto que γ es regular. Así, $\tilde{\gamma}$ es regular.

Lema 2.
Si $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva regular suave, entonces su función longitud de arco es suave sobre I , para cualquier punto inicial t_0 .

Proposición 1.
Una curva parametrizada $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es regular si y sólo si γ admite una reparametrización

$$\tilde{\gamma}: \tilde{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

de rapidez unitaria.

Demostración.

Supongamos que γ es regular; así $\|\gamma'(t)\| > 0$ para cada $t \in I$. Puesto que s es suave sobre I , del teorema de la función inversa, existen $(\alpha, \beta) \subseteq I$ y $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ tales que

$$s^{-1}: (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \rightarrow (\alpha, \beta)$$

es diferenciable. Escribimos $\varphi = s^{-1}$, y denotamos por $\tilde{\gamma}$ a la correspondiente parametrización de γ con mapa de reparametrización φ .

Así,

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t)$$

por lo tanto

$$\|\tilde{\gamma}'(s) s'(t)\| = \|\gamma'(t)\| = s'(t) \quad \forall s \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$$

de donde

$$\|\tilde{\gamma}'(s)\| |s'(t)| = s'(t)$$

$$\Rightarrow \|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1.$$

para cada $s \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$.

Ahora supongamos que existe $\tilde{\gamma}: \tilde{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

una reparametrización de γ ; con mapa de reparametrización

$$\varphi: \tilde{I} \rightarrow I$$

tal que

$$1 = \|\tilde{\gamma}'(u)\| = \|\gamma'(\varphi(u))\| = \|\gamma'(t)\| |\varphi'(u)|$$

para cada $t \in I, u \in \tilde{I}$. Esto indica que $\|\gamma'(t)\| \neq 0$ para cada $t \in I$, es decir, γ es regular.

Nota 2.

A s le llamamos parámetro longitud de arco.

Proposición.

Sea $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular que admite una reparametrización $\tilde{\gamma}$ de rapidez unitaria tal que

$$\tilde{\gamma}(u(t)) = \gamma(t) \quad \forall t \in I.$$

Se tiene que

$$u = s + c \quad \text{o} \quad u = -s + c$$

para alguna constante c . Así mismo, si $u = s + c$ o $u = -s + c$, entonces $\tilde{\gamma}$ es de rapidez unitaria.

Demostración

Sea $t \in I$, cualquiera. Como

$$\tilde{\gamma}(u(t)) = \gamma(t),$$

vemos que

$$\tilde{\gamma}'(u(t)) u'(t) = \gamma'(t)$$

con lo cual

$$\|\tilde{\gamma}'(u(t))\| |u'(t)| = \|\tilde{\gamma}'(u(t)) u'(t)\| = \|\gamma'(t)\| = 1$$

por lo tanto

$$|u'(t)| = 1 \quad \forall t \in I.$$

Así, $u = s + c$ o $u = -s + c$ para alguna constante $c \in \mathbb{R}$.

Mañana, 8 de Junio de 2021.

Ejemplo: Parámetro longitud de arco.

Consideremos la curva parametrizada

$$\begin{aligned} \gamma: [0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (e^{kt} \cos(t), e^{kt} \sin(t)). \end{aligned}$$

En este caso, tenemos que

$$s = s(t) \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k} (e^{kt} - 1) \Leftrightarrow t = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{k s}{\sqrt{k^2 + 1}} + 1 \right)$$

Así,

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(\frac{k s}{\sqrt{k^2 + 1}} + 1 \right) \left(\cos \left(\frac{1}{k} \ln \left(\frac{k s}{\sqrt{k^2 + 1}} + 1 \right) \right), \sin \left(\frac{1}{k} \ln \left(\frac{k s}{\sqrt{k^2 + 1}} + 1 \right) \right) \right)$$

es una reparametrización regular de la espiral logarítmica de rapidez unitaria.

Vector tangente a una curva.

Dada una curva parametrizada regular

$$\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

al vector

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad \text{con} \quad \|T(t)\| = 1, \quad \text{para cada } t \in I,$$

le llamamos **vector tangente** a γ en $\gamma(t)$.

Puesto que $T(t) \cdot T(t) = \|T(t)\|^2 = 1$ para cada $t \in I$

se sigue que

lo que indica que $T(t)$ y $T'(t)$ son ortogonales

Vector normal a una curva.

Cuando $T'(t) \neq 0$, para cada $t \in I$, definimos

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} \quad \text{con } \|N(t)\| = 1 \text{ para cada } t \in I$$

al cual le llamamos **vector normal principal** en γ en $\gamma(t)$. Además,

$$T(t) \cdot N(t) = 0 \quad \text{para cada } t \in I.$$

Ejemplo.

La curva

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t) \end{aligned}$$

es regular pues

$$\|\gamma'(t)\| = \|(-\sin(t), \cos(t), 1)\| = \sqrt{2} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En este caso, se tiene que

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin(t), \cos(t), 1) \quad \text{y} \quad N(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$$

¿Qué son las rectas?

Consideremos la curva parametrizada

$$\begin{aligned} \gamma: I \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \end{aligned}$$

Supongamos que existe $c \in \mathbb{R}^n \neq 0$ tal que

$$\gamma'(t) = c \quad \text{para cada } t \in I.$$

Así,

$$\gamma(t) = \int \gamma'(t) dt = \int c dt = ct + b$$

para algún $b \in \mathbb{R}^n$.

En este caso γ no es más que la parametrización de una recta, además $\gamma''(t) = 0$ para cada $t \in I$.

Cuando $c=0$, vemos que γ es un punto.

Curvatura: ¿Cómo medir qué tanto una curva no es una recta?

Sea $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada de rapidez unitaria. A la cantidad

$$\kappa(t) = \|\gamma''(t)\|$$

le llamamos la **curvatura** de γ en $\gamma(t)$. Cuando γ es recta, su curvatura es cero.

Ejemplo.

Consideremos la curva

$$C_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2\}$$

que no es más que el círculo de centro (x_0, y_0) y radio $R > 0$. Los mapas.

$$\gamma_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \gamma_1(t) = (x_0 + R \cos(t), y_0 + R \sin(t)).$$

y

$$\gamma_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \gamma_2(t) = \left(x_0 + R \cos\left(\frac{t}{R}\right), y_0 + R \sin\left(\frac{t}{R}\right)\right)$$

Son parametrizaciones de C_r , donde γ_2 es una reparametrización de rapidez unitaria para γ_1 .

Para la parametrización de rapidez unitaria, tenemos que

$$\gamma_2''(t) = -\frac{1}{R} \left(\cos\left(\frac{t}{R}\right), \sin\left(\frac{t}{R}\right) \right),$$

por tanto,

$$\kappa(t) = \frac{1}{R} \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Los círculos tienen curvatura constante positiva.

• A pequeños círculos, gran curvatura.

• A círculos grandes, menor curvatura (localmente son rectos)

Curvatura a través de reparametrizaciones.

Sean $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular, mientras que $\tilde{\gamma}: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\hat{\gamma}: \hat{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos reparametrizaciones de rapidez unitaria, de γ .

Sabemos que $\tilde{\gamma}(t) = \hat{\gamma}(u(t))$ para cada $t \in \tilde{I}$

donde $u = s \pm c$. Por lo tanto, se sigue que

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{dt} = \pm \frac{d\hat{\gamma}}{ds} \Rightarrow \frac{d^2\tilde{\gamma}}{dt^2} = \pm \frac{d^2\hat{\gamma}}{ds^2},$$

lo que indica que

$$\kappa(t) = \left\| \frac{d^2\tilde{\gamma}}{dt^2} \right\| = \left\| \frac{d^2\hat{\gamma}}{ds^2} \right\|.$$

Así: La curvatura es invariante bajo reparametrizaciones de rapidez unitaria.

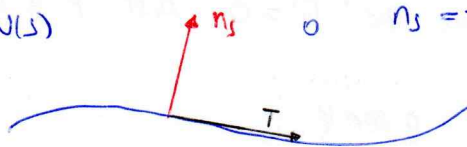
Curvatura: Caso curvas planas.

Sea $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada en el parámetro longitud de arco. A $\{T(s), N(s)\}$

le llamamos referencial de Frenet de γ .

Vemos que existen dos vectores ortogonales a $T(s)$. Denotamos por n_s al vector unitario que obtenemos al rotar $T(s)$ un ángulo de $\pi/2$ en sentido antihorario, así

$$n_s = N(s) \quad \text{o} \quad n_s = -N(s).$$



Puesto que

$$\gamma''(s) \cdot T(s) = 0,$$

sabemos que existe $\kappa_s \in \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma''(s) = \kappa_s n_s.$$

A κ_s le llamamos curvatura con signo de γ , y esta puede ser positiva, negativa o cero.

Definimos $\kappa_s = 0$, cuando $T'(s) = 0$.

Descripción por el ángulo de giro.

Cuando $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva de rapidez unitaria, para cada $s \in I$ se tiene que

$$\gamma'(s) = (\cos(\varphi(s)), \sin(\varphi(s))) \in S_1(0),$$

donde $S_1(0) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| = 1\}$.

Llamamos a $\varphi(s)$ el ángulo que mide la rotación de $\gamma'(s)$, el cual no es único, pero como probamos a continuación, existe.

Proposición.

Sean $\gamma: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de rapidez unitaria, $s_0 \in (a,b)$ y $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\gamma'(s_0) = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0). \quad (1)$$

Existe un único mapa diferenciable $\varphi: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma'(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s)) \quad \forall s \in (a,b).$$

Llamamos a φ el ángulo de giro de γ sujeto a la restricción $\varphi(s_0) = \varphi_0$.

Demostración:

Puesto que γ es de rapidez unitaria, existen $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ suaves tales que

$$\gamma'(s) = (f(s), g(s)) \quad \forall s \in (a, b), \quad f^2(s) + g^2(s) = 1 \quad \forall s \in (a, b).$$

Para cada $s \in (a, b)$, definimos

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \int_{s_0}^s (f(t)g'(t) - g(t)f'(t)) dt.$$

Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(s_0) &= \varphi_0 \\ \varphi'(s) &= f(s)g'(s) - g(s)f'(s) \end{aligned}$$

para cada $s \in (a, b)$, y como f y g son suaves, φ también es suave.

Consideremos los mapas

$$F: f \cos(\varphi) + g \sin(\varphi) \quad \text{y} \quad G = f \sin(\varphi) - g \cos(\varphi)$$

De (1), vemos que

$$f(s_0) = \cos \varphi_0 \quad \text{y} \quad g(s_0) = \sin \varphi_0,$$

así,

$$F(s_0) = f(s_0) \cos \varphi_0 + g(s_0) \sin \varphi_0 = 1 \quad \text{y} \quad G(s_0) = f(s_0) \sin \varphi_0 - g(s_0) \cos \varphi_0 = 0 \quad (2)$$

Vamos a probar que $F' = 0$.

Por definición, tenemos que

$$F' = (f' + g\varphi') \cos \varphi + (g' + f\varphi') \sin \varphi, \quad (3)$$

en donde

$$\begin{aligned} f' + g\varphi' &= f' + g(fg' - g'f) = f' + gfg' - g'gf = f' + gfg' - (1-f^2)f' \\ &= f' + gfg' - f' + f^2f' = f(gg' + ff') \end{aligned}$$

y como $(f^2 + g^2)' = 0$, entonces $f' + g\varphi' = 0$.

Análogamente, se puede obtener $g' + f\varphi' = 0$. Combinando estos resultados, se tiene que $F' = 0$. De manera similar se prueba que $G' = 0$. Así, F y G son constantes y más aún se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} F &= 1 = f \cos \varphi + g \sin \varphi \\ G &= 0 = f \sin \varphi - g \cos \varphi \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$f = \cos \varphi \quad \text{y} \quad g = \sin \varphi,$$

así, $\gamma'(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$ en (a, b) , con $\varphi(s_0) = \varphi_0$.

La unicidad queda como ejercicio.

Jueves 10 de junio de 2021

Ejemplo: Curvatura.

Para una curva regular $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, se tiene que

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma''(t) \times \gamma'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

Para una curva plana $\mathcal{C} = \{(x, f(x)) : x \in \text{Dom}(f)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, donde $f: \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ es suave, cuya parametrización inducida es regular, se tiene que

$$\kappa(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + (f'(t))^2)^{3/2}}$$

En el caso de las curvas planas

el valor absoluto de la curvatura con signo es igual a la curvatura.

Relación curvatura - Ángulo de giro.

Proposición

Sean $\gamma: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de rapidez unitaria, parametrizada en su perímetro longitudinal de arco, y φ su ángulo de giro. Se tiene que

$$k_s = \frac{d\varphi}{ds} = \varphi'(s) \quad \text{en } (a,b)$$

por lo tanto, k_s es la tasa a la cual rota el vector tangente a la curva.

Demostración: Sea $s \in (a,b)$, cualquiera. Puesto que

$$\gamma'(s) = (\cos(\varphi(s)), \sin(\varphi(s))),$$

se tiene que

$$k_s n_s = \gamma''(s) = \varphi'(s) (-\sin \varphi(s), \cos \varphi(s)) = \varphi'(s) n_s.$$

Así, $k_s = \varphi'(s)$. □

Ejemplo: La catenaria.

Para la curva

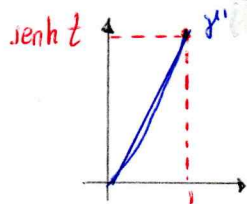
$$\gamma: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \gamma(t) = (t, \cosh t)$$

se tiene que

$$\gamma'(t) = (1, \sinh t) \\ \|\gamma'(t)\| = \cosh t \neq 0 \\ \gamma''(t) = (0, \cosh t)$$

$$s = \int_0^t \cosh u \, du = \sinh t.$$

Sea φ el ángulo que forma $\gamma'(t)$ con el eje x



vemos que

$$\tan \varphi = \frac{\sinh t}{1} = s$$

con lo cual

$$\sec^2(\varphi) \frac{d\varphi}{ds} = 1$$

por lo tanto

$$k_s = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\sec^2 \varphi} = \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{1}{1 + s^2} \Rightarrow k(t) = |k_s| = \frac{1}{1 + s^2} > 0$$

Ejemplo: Clotoide o espiral de Euler.

Para la curva γ , con curvatura con signo $k_s(s) = s$, con $s = s_0$, tenemos que

$$\varphi(s) = \int_0^s t \, dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^s = \frac{s^2}{2},$$

por tanto,

$$\gamma(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) dt, \int_0^s \sin\left(\frac{t^2}{2}\right) dt \right)$$

Isometrías directas.

Un mapa $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una isometría directa cuando $H = T_a \circ \rho_\theta$ donde

$$\rho_\theta = (x, y) \mapsto (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta)) \quad \text{y} \quad T_a(x, y) = (x, y) + a.$$

la rotación antihoraria de un ángulo θ y traslación por el vector $a \in \mathbb{R}^2$, respectivamente.

Teorema fundamental para curvas suaves.

Dada cualquier función suave $K: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ existe una curva parametrizada de rapidez unitaria $\gamma: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya curvatura con signo es K . Además, si $\tilde{\gamma}: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ es otra curva de rapidez unitaria cuya curvatura con signo es K , entonces existe una isometría directa H de \mathbb{R}^2 tal que

$$\tilde{\gamma} = H(\gamma(s)) \quad \text{para cada } s \in (a,b).$$

Demostración

Sea $s_0 \in (a, b)$, cualquiera. Para cada $s \in (a, b)$ definimos

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^s k(t) dt,$$

así, $\varphi'(s) = k(s)$. Consideremos

$$\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$s \mapsto \gamma(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos \varphi(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \varphi(t) dt \right),$$

la cual es de rapidez unitaria, y hace un ángulo $\varphi(s)$ con el eje x . Puesto que $\varphi'(s) = k(s)$, concluimos que es la curva que estamos buscando.

Ahora supongamos que

$$\tilde{\gamma}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

es otra curva de rapidez unitaria cuya curvatura con signo es k . Denotemos por $\tilde{\varphi}$ el ángulo de giro para $\tilde{\gamma}$. Así

$$\tilde{\gamma}'(s) = (\cos(\tilde{\varphi}(s)), \sin(\tilde{\varphi}(s))),$$

por tanto, se tiene que

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(\int_{s_0}^s (\cos(\tilde{\varphi}(t))) dt, \int_{s_0}^s \sin(\tilde{\varphi}(t)) dt \right) + \tilde{\gamma}(s_0), \quad (2)$$

Como $k(s) = \tilde{\varphi}'(s)$, se tiene que

$$\tilde{\varphi}(s) = \int_{s_0}^s k(t) dt + \tilde{\varphi}(s_0)$$

Tomando $\alpha = \tilde{\gamma}(s_0)$ y $\theta = \tilde{\varphi}(s_0)$, como $\tilde{\varphi}(s) = \varphi(s) + \theta$, junto con (2), se tiene que

$$\tilde{\gamma}(s) = \alpha + \left(\int_{s_0}^s \cos(\varphi(t) + \theta) dt, \int_{s_0}^s \sin(\varphi(t) + \theta) dt \right)$$

$$= \alpha + \left(\int_{s_0}^s \cos(\tilde{\varphi}(t)) dt, \int_{s_0}^s \sin(\tilde{\varphi}(t)) dt \right)$$

$$= \alpha + \tilde{\gamma}(s) - \tilde{\gamma}(s_0)$$

para cada $s \in (a, b)$.

Proposición.

Cualquier curva plana con constante de curvatura positiva es parte de un círculo.

Demostración

Sea γ dicha curva, k_s su curvatura con signo, $k > 0$, con $k = k_s$ o $k = -k_s$.

¿Es posible que algunos puntos de la curvatura tengan curvatura con signo k , mientras otros tengan $-k$?

Supongamos que sí. Puesto que k_s es suave, k_s es continua. Así, por el teorema del valor medio, k_s toma los valores k y $-k$, con k_s constante no nula, lo cual no es posible.

Ahora, notemos que al rotar o trasladar círculos, obtenemos círculos, así cada curva cuya curvatura con signo es constante es (parte de) un círculo.

Sabemos que un círculo con centro en el origen y radio R tiene parametrización de rapidez unitaria

$$\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$s \mapsto \mu(s) = \left(R \cos\left(\frac{s}{R}\right), R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \right),$$

así,

$$T(s) = \mu'(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right), \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right)$$

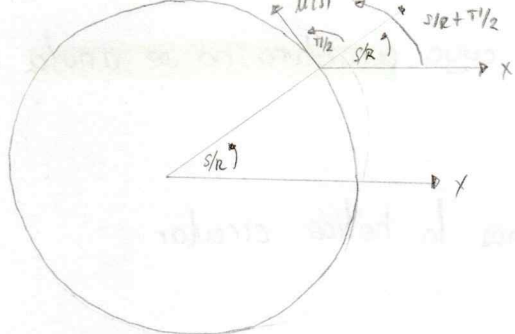
Notemos que el ángulo de $u'(s)$ respecto al eje x es

$$\frac{s}{R} + \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{R} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{R}$$

Así, $k_s > 0$, entonces el círculo de radio $1/k_s$ posee la curvatura con signo k_s (que se adapta a γ')



En cambio si, si $k_s < 0$, entonces el círculo de radio $-1/k_s$ posee la curvatura con signo k_s , cuya parametrización de rapidez unitaria es

$$u_x(s) = \left(R \cos\left(\frac{s}{R}\right), -R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \right).$$

Miércoles

Martes, 15 de junio de 2021

Curvas en el espacio

Dada una curva parametrizada $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de rapidez unitaria (parámetro longitudinal de arco), sabemos que

$$\|\gamma'(s)\| = 1;$$

$$T(s) = \gamma'(s);$$

$$T'(s) = \gamma''(s);$$

$$N(s) = \frac{1}{\|\gamma''(s)\|} \gamma''(s) = \frac{1}{k(s)} T'(s).$$

Puesto que $T(s)$ y $N(s)$ son ortogonales, se tiene que

$$B(s) := T(s) \otimes N(s)$$

es un vector unitario, el cual es ortogonal a $T(s)$ y $N(s)$. Llamamos $B(s)$ al vector binormal a γ en el punto $\gamma(s)$.

A.

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

le llamamos triedro móvil, o triedro de Frenet, el cual es orientado por la regla de la mano derecha en \mathbb{R}^3 , es decir

$$B(s) = T(s) \otimes N(s);$$

$$N(s) = B(s) \otimes T(s)$$

$$T(s) = N(s) \otimes B(s)$$

Puesto que $T(s)$ y $N(s)$ son unitarios, se sigue que

$$\|B(s)\| = 1$$

y por tanto, tenemos que

$$B'(s) \cdot B(s) = 0,$$

en donde

$$B'(s) = (T(s) \otimes N(s))' = T'(s) \otimes \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} + T(s) \otimes N'(s) = T(s) \otimes N'(s).$$

Gracias a este último cálculo, concluimos que $B'(s)$ es ortogonal a $T(s)$ y $B(s)$, por lo cual $B'(s)$ debe ser colineal a $N(s)$. Así, existe un número $z \in \mathbb{R}$, tal que

$$B'(s) = -z N(s),$$

al cual llamamos torsión de γ en el punto $\gamma(s)$. Puesto que

$$N(s) = \frac{1}{k(s)} T'(s),$$

la torsión está bien definida siempre que la curvatura sea no nula.

Nota: El concepto de torsión se basa en curvas de rapidez unitaria.

Torsión a través de reparametrizaciones.

Recordemos que cualquier curva regular admite una reparametrización de rapidez unitaria (en su parámetro longitud de arco).

De manera análoga que el concepto de curvatura, no es difícil mostrar que la torsión de una curva es independiente de la reparametrización de rapidez unitaria.

Formula para la torsion

Proposición Sea $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular, cuya curvatura no se anula en I . Se tiene que

$$\tau = \frac{(\gamma'(t) \otimes \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma''(t) \otimes \gamma''(t)\|^2}$$

Ejemplo. Sean $a, b > 0$, arbitrarios pero fijos. Consideremos la hélice circular

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt). \end{aligned}$$

La cual es una curva regular, en este caso.

$$\tau = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Proposición Sea $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular cuya curvatura es no nula. Se tiene $\gamma(I)$ está contenida en un plano si y solo si su torsión es nula.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que γ es de rapidez unitaria y está parametrizada en su parámetro longitud de arco.

Supongamos que $\gamma(I)$ está contenida en un plano cuya ecuación es

$$A \cdot X = B,$$

donde $A \in \mathbb{R}^3$ y $B \in \mathbb{R}$ son constantes y $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Por facilidad supongamos que $\|A\| = 1$. Puesto que los puntos de γ pertenecen al plano, para cada $s \in I$, vemos que

$$\begin{aligned} A \cdot \gamma(s) &= B \\ \Rightarrow A \cdot \gamma'(s) &= A \cdot T(s) = 0 \\ \Rightarrow A \cdot \gamma''(s) &= 0 \\ \Rightarrow A \cdot \kappa(s) \cdot N(s) &= 0 \\ \Rightarrow A \cdot N(s) &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto $T(s)$ y $N(s)$ son ortogonales a A . Por lo cual A y $B(s)$ son colineales (ambos unitarios). Así,

$$A = B(s) \quad \text{o} \quad A = -B(s) \quad \forall s \in I,$$

lo que nos indica que $B(s)$ es constante y por lo tanto

$$B'(s) = 0,$$

con lo cual $\tau = 0$.

Si en cambio, $\tau = 0$, entonces $B'(s) = 0$, gracias a lo cual $B(s)$ es constante, y así, los puntos de la curva pertenecen al plano

$$B(s) \cdot X = \text{constante}$$

Ecuaciones de Frenet-Serre

Ahora, consideremos una curva de rapidez unitaria γ cuya curvatura no se anula en ningún punto. Hasta aquí, sabemos que

$$T'(s) = \kappa(s) N(s) \quad \text{y} \quad B'(s) = -\tau(s) N(s)$$

¿Qué sabemos sobre $N'(s)$?

Recordemos que

$$N(s) = B(s) \otimes T(s),$$

por lo tanto

$$N'(s) = \tau(s) B(s) - \kappa(s) T(s)$$

Así, γ satisface las ecuaciones de Frenet-Serre

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s) N(s) \\ N'(s) = -\kappa(s) T(s) + \tau(s) B(s) \\ B'(s) = -\tau(s) N(s) \end{cases}$$

Es posible obtener un sistema de Frenet-Serre para curvas planas

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s) N(s) \\ N'(s) = -\kappa(s) T(s) \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}$$

donde la matriz es antisimétrica.

Teorema Fundamental de curvas en el espacio

Teorema Dados cualquier par de mapas $\kappa, L: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en (a,b) y κ positivo, existe una curva de rapidez unitaria

$$\gamma: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

cuya curvatura es κ y su torsión es L .

Además, si $\tilde{\gamma}: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es otra curva de rapidez unitaria, tal que su curvatura es κ y su torsión L , entonces existe una isometría directa H de \mathbb{R}^3 tal que

$$\tilde{\gamma}(s) = H(\gamma(s)) \quad \forall s \in (a,b)$$

Demostración: Sea $s_0 \in (a,b)$, arbitrario pero fijo. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & L(s) \\ 0 & -L(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix} \quad (1)$$

sujeito a las restricciones

$$T(s_0) = (1, 0, 0),$$

$$N(s_0) = (0, 1, 0),$$

$$B(s_0) = (0, 0, 1).$$

En este contexto, buscamos

$$T, N, B: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

¿Qué sabemos sobre la existencia de soluciones en sistemas de EDOs?
Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dx}{ds} = A(s)x + b(s) \quad (2)$$

donde

$$x: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$A(s) \in M_{n \times n}$$

$$b(s) \in \mathbb{R}^n$$

sujeito a la restricción $x(a) = c$, con $c \in \mathbb{R}^n$

Supongamos, que existe $t > 0$ de modo que cada una de las funciones componentes de $A(s)$ y $b(s)$ son continuas en

$$\overline{B_t(a)} \subseteq I.$$

Existe una solución del problema (2) en $\overline{B_t(a)}$

Regresando a nuestro problema

Gracias a que κ y L son continuas en (a,b) , (por ser suaves), se tiene que

(1) admite una única solución

$$\begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}$$

sujeta a las restricciones

$$T(s_0) = (1, 0, 0)$$

$$N(s_0) = (0, 1, 0),$$

$$B(s_0) = (0, 0, 1)$$

Ahora, puesto que

$$\{T(s_0), N(s_0), B(s_0)\}$$

es una base ortonormal para \mathbb{R}^3 , junto con el hecho de que la matriz (1) es antisimétrica, se sigue que

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

es ortonormal para cada $s \in (a, b)$.

En efecto, supongamos que (a_{ij}) es una matriz antisimétrica de 3×3 . Sean v_1, v_2, v_3 funciones suaves (de variable s), las cuales dan solución al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$v_i' = \sum_{j=1}^3 a_{ij} v_j,$$

con $i=1, 2, 3$; el cual es un sistema de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}' = (a_{ij}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Sea s_0 un elemento del dominio de v_1, v_2 y v_3 para el cual

$$\{v_1(s_0), v_2(s_0), v_3(s_0)\}$$

es ortonormal. Probemos que el conjunto

$$\{v_1(s), v_2(s), v_3(s)\}$$

es ortonormal para cada valor posible de s . Sea s uno de estos números cualquiera. Probemos que

$$\lambda_{ij} = v_i(s) \cdot v_j(s) = \delta_{ij},$$

para cada $i, j=1, 2, 3$. Al derivar la anterior ecuación respecto a s obtenemos la EDO

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}' &= (v_i(s) \cdot v_j(s))' \\ &= v_i' \cdot v_j + v_i \cdot v_j' \\ &= \left(\sum_{k=1}^3 a_{ik} v_k \right) v_j + v_i \left(\sum_{k=1}^3 a_{jk} v_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^3 (a_{ik} v_k v_j + a_{jk} v_i v_k) \\ &= \sum_{k=1}^3 (a_{ik} \lambda_{kj} + a_{jk} \lambda_{ik}) \end{aligned}$$

para cada $i, j=1, 2, 3$. Ahora, recordemos que la matriz (a_{ij}) es anti-simétrica, por lo que

$$a_{ij} + a_{ji} = 0$$

para cada $i, j=1, 2, 3$, con $i \neq j$. Para cada $i, j=1, 2, 3$, el delta Kronecker δ_{ij} es la única solución de la EDO

$$\lambda_{ij}' = \sum_{k=1}^3 (a_{ik} \lambda_{kj} + a_{jk} \lambda_{ik})$$

En consecuencia $v_i(s) \cdot v_j(s) = \delta_{ij}$, para cada $i, j=1, 2, 3$.

regresando a nuestro problema.

Consideremos la curva parametrizada

$$\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$s \mapsto \gamma(s) = \int_{s_0}^s T(u) du.$$

la cual es de rapidez unitaria, de modo que T, N, B satisfacen las ecuaciones de Frenet-Serre, además K y L son la curvatura y torsión de γ , respectivamente.

Martes 22 de junio de 2021.

Homeomorfismos

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $W \subseteq \mathbb{R}^m$ dos abiertos, y

$$\sigma: U \rightarrow W$$

Decimos que σ es un homeomorfismo cuando σ es continuo y biyectivo, y σ^{-1} también continuo.

Decimos que U y W son homeomorfos.

Diferenciabilidad.

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y no vacío, y

$$\sigma: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Decimos que σ es diferenciable en $u = (u_1, \dots, u_n) \in U$ cuando $\partial \sigma_i / \partial u_j$ existe para cada $i = 1, \dots, m$ y cada $j = 1, \dots, n$.

Decimos que σ es diferenciable en U , cuando σ es diferenciable en cada punto de U .

Suavidad. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y no vacío, y

$$\sigma: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$u \mapsto \sigma(u) = (\sigma_1(u), \dots, \sigma_m(u)).$$

Decimos que σ es suave en $u \in U$ cuando cada función componente σ_i de σ admite derivadas parciales de todos los órdenes en u .

Decimos que σ es suave en U , cuando es suave en cada punto de U .

Decimos que $\sigma: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^m$ es un difeomorfismo cuando σ es biyectivo y suave en U , tal que σ^{-1} es suave en W .

Para nuestro interés

Consideremos $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y no vacío, y el mapa

$$\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto \sigma(u, v) = (\sigma_1(u, v), \sigma_2(u, v), \sigma_3(u, v)),$$

donde

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3: U \rightarrow \mathbb{R}$$

son las funciones componentes de σ

Recordemos que σ es suave en U si y sólo si cada función componente es suave en U . En este caso escribimos

$$\sigma_u: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto \sigma_u(u, v) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \sigma_3}{\partial u}(u, v) \right),$$

y

$$\sigma_v: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto \sigma_v(u, v) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \sigma_3}{\partial v}(u, v) \right).$$

Regularidad. Decimos de $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es regular cuando σ es suave y $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ son linealmente independiente para cada $(u,v) \in U$.

Así, σ es regular si y sólo si σ es suave y

$$\sigma_u(u,v) \otimes \sigma_v(u,v) = \sigma_u \otimes \sigma_v \neq 0 \quad \forall (u,v) \in U$$

Superficies

Consideremos $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Supongamos que para cada $p \in S$; existen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y $W \subseteq \mathbb{R}^3$ abiertas y no vacías y

continua, biyectiva y tal que σ^{-1} es continua. (σ es un homeomorfismo entre U y W)

Supongamos también que.

$p \in S \cap W$;

σ es un homeomorfismo entre U y $S \cap W$

Al homeomorfismo

$$\sigma: U \rightarrow S \cap W$$

le llamamos parametrización del abierto $S \cap W \subseteq S$, mientras que nos referiremos a un porche de superficie o carta a la pareja (σ, U) .

Decimos que S es una superficie

Definición 1.

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie y $\sigma: U \rightarrow S \cap W$ una parametrización de S . Decimos que σ es admisible para S cuando es regular.

Superficie diferenciable

Decimos que una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie diferenciable cuando para cada $p \in S$ existe una parametrización admisible

$$\sigma: U \rightarrow S \cap W$$

tal que

$$p \in \sigma(U) = W \cap S.$$

A la colección $\{(\sigma_p, U_p) : p \in S\}$ le llamamos atlas diferenciable para S .

Recubriendo la superficie

Notemos que

$$S \subseteq \bigcup_{p \in S} \sigma_p(U_p),$$

así

$$\{\sigma_p(U_p) : p \in S\}$$

es un recubrimiento abierto para S .

Ejemplo: Planos

Sean a un punto en el plano $S \subseteq \mathbb{R}^3$, y p, q vectores unitarios, paralelos al plano y ortogonales entre sí.

Para cualquier $b \in S$, $b-a$ también es paralelo al plano S , por lo tanto existe $u, v \in \mathbb{R}$

$$b-a = u p + v q$$

Así

$$u = u p \cdot p + v p \cdot q = (b-a) \cdot p$$

$$v = u p \cdot q + v q \cdot q = (b-a) \cdot q$$

cuya inversa tiene fórmula

$$\sigma^{-1}(b) = ((b-a) \cdot p, (b-a) \cdot q)$$

con esta idea, podemos considerar

$$\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u,v) \mapsto \sigma(u,v) = a + u p + v q$$

Contraejemplo

El cono circular con vértice en un punto v , de eje una recta ℓ que pasa por el punto v y el ángulo $\alpha \in (0, \pi/2)$, es el conjunto de puntos $p \in \mathbb{R}^3$, para los cuales la recta que pasa por p y v hace un ángulo α con ℓ .

En el caso $v = (0, 0, 0)$, ℓ el eje z y $\alpha = \pi/4$, al conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2\}$$

le llamamos cono circular.

En este caso, S no es una superficie

Supongamos que

$$\sigma: U \rightarrow S \cap W$$

$U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto

$W \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto

es un parche de S tal que $(0, 0, 0) \in S \cap W$. Así, existe $a \in U$ tal que $\sigma(a) = (a, a, a)$.

Como U es abierto, podemos suponer que $U = \text{Br}(a)$, para algún $r > 0$. Escribimos

$$S_+ = \{(x, y, z) \in S : z > 0\}$$

$$S_- = \{(x, y, z) \in S : z < 0\}$$

Como $(0, 0, 0) \in W$ abierto, podemos tomar $p \in W \cap S_+$ y $q \in W \cap S_-$.

Sean $b, c \in U$ tales que $\sigma(b) = p$ y $\sigma(c) = q$. Notemos que p y q son no nulas y distintas. Notemos que σ es biyectiva, así vemos que $a \neq b \neq c$.

Puesto que U arco-conexo, podemos elegir una curva $\pi \subseteq U$ que conecte b y c , pero que no contenga el punto a .

Al pasar por σ , π es enviado a la curva

$$\gamma: \sigma \circ \pi \subseteq S$$

que conecta a p y q , pero no pasan por el origen, lo cual es imposible. Así, S no es una superficie.

Sin embargo, $S_+ \cup S_-$ sí es una superficie con atlas

$$\{(U, \sigma_+), (U, \sigma_-)\}$$

donde

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

abierto,

$$\sigma_+(u, v) := (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$$

y

$$\sigma_-(u, v) := (u, v, -\sqrt{u^2 + v^2}).$$

Ejemplo: Esferas

Una esfera en \mathbb{R}^3 es un conjunto de puntos a una distancia fija (radio) de un punto determinado (centro).

Consideremos

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

De este modo, para

$$\sigma(\mathbb{R}^2) = S$$

se tiene que (σ, \mathbb{R}^2) es un parche de superficie y $\{(\sigma, \mathbb{R}^2)\}$ es un atlas de S .

Además

$$\sigma_u = p, \quad \sigma_v = q$$

Para probar que σ es suave, basta demostrar que las funciones componentes lo son. Para independencia lineal se obtiene puesto que

$$\sigma_u \otimes \sigma_v = p \otimes q \neq 0$$

Ejemplo

Un cilindro circular en \mathbb{R}^3 es el conjunto de puntos que se mantienen a una distancia constante respecto a una recta (eje del cilindro).

Así,

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1\}$$

es un cilindro circular de radio 1 con eje y , como eje.

Consideremos el mapa

$$\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto \sigma(u, v) = (\cos(u), u, \sin(u)) = \sigma(u + 2\pi, v)$$

para el cual $\sigma(\mathbb{R}^2) = S$. Problema: σ no es inyectivo.

Tomemos $V := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in [0, 2\pi[\}$, así $\sigma|_V$ es inyectivo.

Problema $\sigma|_V$ no es abierto.

Tomemos $U = \text{int}(V) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in (0, 2\pi) \}$. Así, como $\sigma|_U$ es biyectivo de U en $\sigma|_U(U)$, y es continuo con inversa continua.

Problema $\sigma|_U(U) \neq S$

Para $\tilde{U} := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in (3\pi/2, 5\pi/2) \}$, se tiene que $\sigma|_{\tilde{U}}$ es biyectivo de \tilde{U} en $\sigma|_{\tilde{U}}(\tilde{U})$. En resumen,

$$\mathcal{A} = \{(U, \sigma|_U), (\tilde{U}, \sigma|_{\tilde{U}})\}$$

es un atlas para S .

Notemos que σ es suave en \mathbb{R}^2 . Además

$$\sigma_u(u, v) = (-\sin(u), 0, \cos(u)) \quad \text{y} \quad \sigma_v = (0, 1, 0),$$

por lo tanto

$$\|\sigma_u \otimes \sigma_v\| = \|(-\cos(u), \cdot, -\sin(u))\| = 1$$

para cada $(u, v) \in U$, para cada $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{U}$. Así, $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ es linealmente independiente, para cada (u, v) en U o en \tilde{U} .

Así, el cilindro S es una superficie diferenciable.

Martes 29 de junio

Superficie diferenciable

Decimos que una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es diferenciable cuando para cada $p \in S$ existe una parametrización admisible

$$\sigma_p: U_p \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \cap W_p$$

tal que

$$p \in \sigma_p(U_p) = W_p \cap S.$$

A la colección

$$\{(U_p, \sigma_p) : p \in S\}$$

llamamos atlas diferenciables para S .

Gracias a las coordenadas esféricas, el mapa

$$\sigma: [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\theta, \varphi) \mapsto \sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

describe cada uno de los puntos de S^2

A σ la llamamos parametrización latitud-longitud.

A los círculos que se obtienen al fijar el valor de θ les llamamos paralelos; mientras que a los círculos que se obtienen al fijar el valor de φ les llamamos meridianos.

Podemos considerar el abierto

$$U := (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 2\pi)$$

para el cual

$$\sigma(U) \subset S^2$$

es el conjunto de puntos

Además, a los puntos en U los podemos girar ~~al~~ *rededor* un ángulo de π alrededor del eje z y de $\pi/2$ alrededor del eje x , de modo que

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(\theta, \varphi) &= \sigma(\theta + \pi/2, \varphi + \pi) \\ &= (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \end{aligned}$$

es tal que

$$\tilde{\sigma}(U) \subset S^2$$

incluye el conjunto de puntos en S^2 , excepto los de la forma $(x, y, 0)$ con $x \leq 0$.

El conjunto $\{(U, \sigma), (U, \tilde{\sigma})\}$ es un atlas para S^2

Vemos que σ y $\tilde{\sigma}$ son diferenciables sobre \mathbb{R}^2 . En este caso

$$\sigma_\theta(\theta, \varphi) = (-\cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi \sin \theta, \cos \theta);$$

$$\sigma_\varphi(\theta, \varphi) = (-\sin \varphi \cos \theta, \cos \varphi \cos \theta, 0);$$

$$\tilde{\sigma}_\theta(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta);$$

$$\tilde{\sigma}_\varphi(\theta, \varphi) = (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0).$$

No es difícil verificar que $\{\sigma_\theta, \sigma_\varphi\}$ y $\{\tilde{\sigma}_\theta, \tilde{\sigma}_\varphi\}$ son l.i. para cada $(\theta, \varphi) \in U$.

Ejemplo: Superficies de nivel

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que para cada $p \in S$, existe $W \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto, $p \in W$ y

$$f: W \rightarrow \mathbb{R}$$

suave tal que

$$1. S \cap W = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\} \text{ y}$$

$$2. \nabla f(p) \neq 0.$$

Se tiene que S es una superficie diferenciable, a la cual llamamos superficie de nivel.

Ejemplo.

Considémos

$$S = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

tomemos $W = \mathbb{R}^3$ y el mapa

$$f: W \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

En este caso

$$\nabla f(x, y, z) = 2(x, y, z)$$

y así

$$\|\nabla f(x, y, z)\| = 2$$

para cada $(x, y, z) \in S^2$. En consecuencia, S^2 es una superficie diferenciable.

Ejemplo.

Para $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2\}$,

consideremos la fórmula

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2,$$

para la cual

$$\nabla f(x, y, z) = 2(x, y, -z) \quad \text{y} \quad \|\nabla f(x, y, z)\| = 2\|(x, y, -z)\|$$

Notemos que $\nabla f(x, y, z) = 0$ si y sólo si $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Tomando $W = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ abierto, y el mapa

$$f: W \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

conseguimos probar que $S \setminus \{(0, 0, 0)\}$ es una superficie diferenciable.

Superficies cuadradas

Una **cuádrica** es un subconjunto de \mathbb{R}^3 descrito por la ecuación

$$v^T A v + b^T v + c = 0$$

con $v^T = (x, y, z)$, A una matriz simétrica constante de 3×3 , $b \in \mathbb{R}^3$ constante y $c \in \mathbb{R}$ constante.

Se conoce que cualquier cuádrica, corresponde, al aplicarse una isometría directa de \mathbb{R}^3 , a alguno de los siguientes conjuntos con $p, q, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

1. Elipsoide

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1\}$$

2. Hiperboloide de una hoja

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} - \frac{z^2}{r^2} = 1\}$$

3. Hiperboloide de dos hojas

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{z^2}{r^2} - \frac{y^2}{q^2} - \frac{x^2}{p^2} = 1\}$$

4. Paraboloide elíptico

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = z\}$$

5. Paraboloide hiperbólico

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = z \right\};$$

6. Cono cuadrático

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} - \frac{z^2}{r^2} = 0 \right\};$$

7. Cilindro elíptico:

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1 \right\};$$

8. Cilindro hiperbólico

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1 \right\}$$

9. Cilindro parabólico:

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{y^2}{p^2} = z \right\}$$

10. Plano

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \right\};$$

11. Dos planos paralelos.

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = p^2 \right\};$$

12. Dos planos que se intersecan

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q^2} = 0 \right\};$$

13. Líneas rectas

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 0 \right\};$$

14. Puntos

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 0 \right\}$$

Cada cuádrica, de la 1 a la 10 son superficies diferenciables, por ser superficies de nivel (en la 6 debemos retirar el vértice del cono)

Superficies Compactas

Decimos que $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie compacta, cuando S es una superficie diferenciable, y S es un conjunto compacto. Recordemos que $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es compacto si y solo si S es cerrado y acotado

Por ejemplo: la superficie diferenciable S^2 es un conjunto compacto.

Sabemos que cualquier plano en \mathbb{R}^3 es una superficie diferenciable, sin embargo no es compacto pues no es acotado. Así, no todas las superficies diferenciables son compactas.

Ejemplo:

El toro \mathbb{T} es el conjunto de puntos en \mathbb{R}^3 que se tiene al girar un círculo \mathcal{C} que se encuentra en un plano Π , alrededor de la recta ℓ en Π que no interseca a \mathcal{C} . Puesto que \mathbb{T} es cerrado y acotado, \mathbb{T} es compacto.

Tomemos como Π al plano XZ , ℓ el eje z , $a > 0$ la distancia del centro de \mathcal{C} a ℓ , $b \in (0, a)$ el radio de \mathcal{C} .

Inicialmente cada punto sobre \mathcal{C} es de la forma

$$(x, y, z) = (a + b \cos(\theta), 0, b \sin(\theta)),$$

los mismos que giran un ángulo φ alrededor de ℓ , convirtiéndose en

$$\sigma(\theta, \varphi) := ((a + b \cos \theta) \cos \varphi, (a + b \cos \theta) \sin \varphi, b \sin \theta).$$

No es difícil ver que σ es diferenciable en \mathbb{R}^2 , y además

$$\sigma_\theta \otimes \sigma_\varphi \neq 0.$$

Consideremos las abiertas

$$U_1 = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in (0, 2\pi), \varphi \in (0, 2\pi)\},$$

$$U_2 = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in (0, 2\pi), \varphi \in (-\pi, \pi)\},$$

$$U_3 = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in (-\pi, \pi), \varphi \in (0, 2\pi)\},$$

$$U_4 = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in (-\pi, \pi), \varphi \in (-\pi, \pi)\}.$$

Notemos que

$$\mathbb{T} \subseteq \bigcup_{k=1}^4 U_k$$

Tenemos que

$$\mathcal{a} = \{(U_k, \sigma) : k = 1, 2, 3, 4\},$$

es un atlas para \mathbb{T} , que hace que \mathbb{T} sea una superficie diferenciable compacta.

n -Toros

Mediante un procedimiento conocido como **suma conexa**, podemos «juntar» varias toros, a las cuales denotamos por \mathbb{T}_g , donde g represente el número de agujeros presentes, al cual denominamos **genus**.

Así $\mathbb{T}_0 = S^2$ y $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}$. Se conoce el siguiente resultado, cuya demostración se escapa de nuestro control en este curso.

Teorema 1.

Para cada $g \in \mathbb{N}_0$, \mathbb{T}_g admite un atlas diferenciable que hace de \mathbb{T}_g una superficie diferenciable compacta. Además, cada superficie diferenciable compacta es difeomorfa a \mathbb{T}_g , para algún $g \in \mathbb{N}_0$.

Ejemplo: Superficie de revolución

Una superficie de revolución es la que se obtiene al girar una curva plana, a la cual llamamos curva de perfil, alrededor de una recta en el plano, a la cual llamamos eje de giro.

A los círculos que se obtienen al girar un punto fijo sobre la curva de perfil alrededor del eje de giro, les llamamos paralelos de la superficie. En cambio, a las curvas sobre la superficie que se obtiene al girar la curva de perfil un ángulo fijo, se denominan meridianos.

Consideremos en el plano xz a z como el eje de giro y la curva de perfil γ , donde

$$\begin{aligned} \gamma: I \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (f(t), 0, g(t)), \end{aligned}$$

donde

$$f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$$

son suaves en $\text{int}(I)$. Al girar la curva de perfil un ángulo θ alrededor del eje de giro, vemos que cada punto sobre la curva se transforma

$$\sigma(t, \theta) = (f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, g(t)).$$

Notemos que σ es diferenciable puesto que f, g son diferenciables. En nuestro caso,

$$\begin{aligned} \sigma_t(t, \theta) &= (f'(t) \cos \theta, f'(t) \sin \theta, g'(t)), \\ \sigma_\theta(t, \theta) &= (-f(t) \sin \theta, f(t) \cos \theta, 0), \\ \sigma_t \otimes \sigma_\theta &= (-f(t)g'(t) \cos \theta, -f(t)g'(t) \sin \theta, f(t)f'(t)), \\ \|\sigma_t \otimes \sigma_\theta\|^2 &= f^2(t)((f'(t))^2 + (g'(t))^2) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sigma_t \otimes \sigma_\theta \neq 0$$

si y solo si, f no se anula sobre I , y

$$(f'(t))^2 + (g'(t))^2 \neq 0$$

para cada $t \in \text{Int}(I)$.

De este modo, si γ es regular y f no se anula sobre I , entonces

$$\sigma_t \otimes \sigma_\theta \neq 0.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos $f(t) > 0$, por lo que $f(t)$ representa la distancia entre el eje z y $\sigma(t, \theta)$. Notemos que σ es inyectiva cuando γ no admite autointersecciones.

¿Puede una superficie de revolución ser diferenciable?
¿Cuál es su atlas?

Jueves 1 de Julio de 2020

Proposición 1

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable, $U, \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ abiertas,

$$\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

una parametrización regular de S , $\phi: \tilde{U} \rightarrow U$ biyectivo, suave tal que $\phi^{-1}: U \rightarrow \tilde{U}$ también es suave, tal que $\phi^{-1}: U \rightarrow \tilde{U}$ también es suave. Se tiene que

$$\tilde{\sigma} = \sigma \circ \varphi: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

es una parametrización regular de S .

Decimos que $\tilde{\sigma}$ es una reparametrización de σ y φ es el mapa de transición

Demostración:

Notemos que $\tilde{\sigma}$ es suave por ser la composición de mapas suaves.

Como φ es biyectivo, a cada $(u, v) \in U$, le corresponde un único $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{U}$

$$\varphi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u, v),$$

así,

$$\sigma(u, v) = \sigma(\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})) = \tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

De la regla de la cadena, tenemos que

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} = \sigma_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \sigma_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \quad \text{y} \quad \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \sigma_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \sigma_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}},$$

gracia a lo cual obtenemos que

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \otimes J(\varphi)(\sigma_u \otimes \sigma_v), \tag{1}$$

donde

$$J(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}$$

es la matriz Jacobiana del mapa φ .

Ahora, como φ y φ^{-1} son suaves, tenemos que

$$J(\varphi^{-1}) = (J(\varphi))^{-1},$$

con $\det(J(\varphi)) \neq 0$.

Así, por (1), y como σ_u y σ_v son linealmente independientes, concluimos que $\tilde{\sigma}_{\tilde{u}}$ y $\tilde{\sigma}_{\tilde{v}}$ también son linealmente independientes.

Esto muestra que $\tilde{\sigma}$ es una parametrización regular de S .

¡Atención!

Sean $S \in \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y

$$\sigma: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow W \cap S, \quad \tilde{\sigma}: \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{W} \cap S$$

parametrizaciones admisibles de S .

Si $V \subseteq U$ y $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$ son abiertas tales que

$$\sigma(V) = \tilde{\sigma}(\tilde{V}) = W \cap \tilde{W} \cap S,$$

entonces el mapa

$$\varphi = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}: \tilde{V} \rightarrow V$$

está bien definido, es biyectivo y es un difeomorfismo. Esto nos muestra que $\tilde{\sigma}$ es una reparametrización de σ , en el dominio que comparten.

Nota.

En adelante consideramos superficies diferenciables con parametrizaciones admisibles

Suavidad de mapas real valuados

Cuando S es una superficie diferenciable y $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que f es suave si y solo si

$$f \circ \sigma: U \rightarrow \mathbb{R}$$

es suave, para cada (U, σ) en el atlas diferenciable de S

Mapas suaves entre superficies

Sean $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ superficies diferenciables, con atlas diferenciables

$$\mathcal{A}_1 = \{(U, \sigma)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{A}_2 = \{(V, \xi)\}$$

respectivamente. Sabemos que existen

$$W_u, W_v \subseteq \mathbb{R}^3$$

abiertos, tales que

$$\sigma: U \rightarrow W_u \cap S_1 \quad \text{y} \quad \xi: V \rightarrow W_v \cap S_2$$

son homeomorfismos suaves.

Decimos que el mapa

$$f: S_1 \rightarrow S_2$$

es suave cuando

$$\xi^{-1} \circ f \circ \sigma: U \rightarrow V$$

es suave para cada $(U, \sigma) \in \mathcal{A}_1$ y para cada $(V, \xi) \in \mathcal{A}_2$.

Suavidad a través de reparametrizaciones

Sean $\tilde{\sigma}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{W}_u \cap S_1$ y $\tilde{\xi}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{W}_v \cap S_2$ reparametrizaciones de σ y ξ con mapas de transición

$$\varphi_\sigma: \tilde{U} \rightarrow U \quad \text{y} \quad \varphi_\xi: \tilde{V} \rightarrow V \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{suaves.} \end{array} \right.$$

respectivamente.

Notemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^{-1} \circ f \circ \sigma &= \tilde{\xi}^{-1} \circ \zeta \circ \zeta^{-1} \circ f \circ \sigma \circ \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma} \\ &= \varphi_\xi^{-1} \circ \zeta^{-1} \circ f \circ \sigma \circ \varphi_\sigma \end{aligned}$$

es suave pues φ_ξ^{-1} , $\zeta^{-1} \circ f \circ \sigma$ y φ_σ son suaves

Esto nos indica que la diferenciable se mantiene a través de reparametrizaciones

Difeomorfismos entre superficies diferenciables.

Sean S_1 y S_2 superficies diferenciables. Decimos que un mapa $f: S_1 \rightarrow S_2$ es un difeomorfismo cuando f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son suaves.

En este caso, decimos que S_1 y S_2 son difeomorfas como superficies diferenciables

Espacio tangente

Dada una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$, una curva sobre S es una curva parametrizada $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\gamma(I) \subseteq S.$$

Un vector tangente a la superficie S en un punto $p \in S$ no es más que un vector tangente a la curva γ sobre S que pasa por p , es decir, $\gamma'(t_0) = p$ para algún $t_0 \in I$.

Denotamos $T_p S$ al conjunto de todos los vectores tangentes a S en el punto p , y lo llamamos el espacio tangente a S en p .

Sean $p \in S$ y

$$\sigma: U \rightarrow W_0 \cap S \quad \text{con } W_0 \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ abierto}$$

es una parametrización de S tal que $p \in \sigma(u)$

Si $\gamma: I \rightarrow S$ es una curva sobre S , que pasa por p , entonces $p = \gamma(t_0)$ para algún $t_0 \in I$ y además

$$\sigma(u) = W_0 \cap S \ni \gamma(I) \cap W_0 \cap S \neq \emptyset.$$

Así, sobre $\sigma^{-1}(\gamma(I) \cap W_0 \cap S)$ existen dos funciones

$$u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$$

tales que

$$\gamma(t) = (u(t), v(t)) \quad \text{con } p = \gamma(t_0) = \sigma(u_0, v_0) = \sigma(u_0(t), v_0(t)).$$

Proposición 2.

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable, $p \in S$ y

$$\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

una parametrización para S tal que $p \in \sigma(u)$. Se tiene que

$$T_p S = \text{span} \{ \sigma_u, \sigma_v : (u, v) \in U \}$$

donde σ_u, σ_v se evalúan en el punto (u_0, v_0) tal que $\sigma(u_0, v_0) = p$.

P.D. $T_p S \subseteq \text{span} \{ \sigma_u, \sigma_v : (u, v) \in U \}$

Sea γ una curva sobre S que pasa por $p = \gamma(t_0)$. Tenemos que

$$\gamma'(t) = \sigma(u(t), v(t)),$$

donde $\gamma'(t_0)$ es tangente a γ en p .

Gracias a la regla de la cadena, obtenemos

$$\gamma'(t) = \sigma_u(u, v) u'(t) + \sigma_v(u, v) v'(t),$$

$$\gamma'(t_0) = \sigma_u u'(t_0) + \sigma_v v'(t_0) \quad (2)$$

donde σ_u y σ_v son linealmente independientes. Así, (2) nos indica que el vector tangente $\gamma'(t_0)$ es la combinación lineal de σ_u y σ_v .

$\text{span} \{ \sigma_u, \sigma_v : (u,v) \in U \} \in T_p S$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, cualesquiera

$$a\sigma_u + b\sigma_v \in \text{span} \{ \sigma_u, \sigma_v : (u,v) \in U \}$$

Definimos

$$\gamma(t) = \sigma(u_0 + at, v_0 + bt)$$

la cual induce una curva parametrizada γ sobre S , que es suave y además es tal que

$$\gamma'(0) = \sigma(u_0, v_0) = p$$

Así, $\gamma'(t) = a\sigma_u + b\sigma_v$ es tangente a S en p .

Corolario

El espacio tangente a cualquier punto de una superficie diferenciable es de dimensión 2. Por este motivo llamamos al espacio tangente, plano tangente.

El concepto de espacio tangente ¿Depende de la parametrización?

Supongamos S una superficie diferenciable.

$$\sigma: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow W_0 \cap S \quad \text{con } W_0 \subseteq \mathbb{R}^3$$

una parametrización tal que $p \in \sigma(u)$. Sea

$$\tilde{\sigma}: \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{W}_0 \cap S \quad \text{con } \tilde{W}_0 \subseteq \mathbb{R}^3$$

una reparametrización de σ .

En este caso, tenemos que

$$\sigma_u = \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} + \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}$$

$$\sigma_v = \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} + \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}$$

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} = \sigma_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \sigma_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}$$

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \sigma_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \sigma_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}$$

lo que muestra que σ_u y σ_v son combinaciones lineales de $\tilde{\sigma}_{\tilde{u}}$ y $\tilde{\sigma}_{\tilde{v}}$, y viceversa.

Por tanto, σ_u, σ_v y $\tilde{\sigma}_{\tilde{u}}, \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}$, generan el mismo espacio $T_p S$.

El concepto de espacio tangente no depende de la parametrización

Derivada de mapas suaves entre dos superficies diferenciables

Consideremos dos superficies diferenciables $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ y $f: S_1 \rightarrow S_2$ suave.

Sean $p \in S_1$ y $w \in T_p S_1$, arbitrarios pero fijos.

Sabemos que existe una curva $\gamma: I \rightarrow S_1$ tal que $\gamma(t_0) = p$ y $w = \gamma'(t_0)$, para algún $t_0 \in I$.

Así, $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ es una curva sobre S_2 a través de $f(p)$ tal que

$$\tilde{w} = \tilde{\gamma}'(t_0)$$

es un vector tangente a una curva sobre S_2 en

$$f(p) = \tilde{\gamma}(t_0).$$

De este modo $\tilde{\omega} \in T_{f(p)} S_2$.

Definición

Sean $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ dos superficies diferenciables y

$$f: S_1 \rightarrow S_2$$

suave. Para cada $p \in S_1$, está bien definido el mapa

$$D_p f: T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2 \\ w \mapsto D_p f(w) = \tilde{\omega}$$

al cual nos referimos como la derivada de f en $p \in S_1$.

¿De qué depende $D_p f$?

Consideremos una parametrización $\sigma: U \rightarrow W_0 \cap S_1$ tal que $p \in \sigma(u) = \sigma(u, v_0)$.
Sean

$$d, \beta: U \rightarrow \mathbb{R}$$

suaves, tales que

$$f(\sigma(u, v)) = \tilde{\sigma}(d(u, v), \beta(u, v)),$$

con $\tilde{\sigma}: \tilde{U} \rightarrow W \cap S_2$, y $f(p) \in \tilde{\sigma}(\tilde{u})$. Consideremos

$$w = a\sigma_u + b\sigma_v \in T_p S_1,$$

el cual es tangente a una curva γ sobre S_1 que pasa a través de p , así

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)) \quad u'(t_0) = a \quad \text{y} \quad v'(t_0) = b \quad (3)$$

A través de t , sobre S_2 obtenemos la curva $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\sigma}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$, donde

$$\tilde{u}(t) = d(u(t), v(t)) \quad \text{y} \quad \tilde{v}(t) = \beta(u(t), v(t)).$$

Gracias a (3), notemos que

$$D_p f(w) = \tilde{u}' \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} + \tilde{v}' \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} \\ = (u' d_u + v' d_v) \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} + (v' \beta_v + u' \beta_u) \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} \\ = (a d_u + b d_v) \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} + (b \beta_u + a \beta_v) \tilde{\sigma}_{\tilde{v}},$$

lo que nos indica que $D_p f(w)$ depende únicamente de p, f , y w (a través de a y b).

Además, se tiene que

$$D_p f(w) = D_p f(a\sigma_u + b\sigma_v) = \begin{pmatrix} a d_u & b d_v \\ a \beta_u & b \beta_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \\ \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} \end{pmatrix}$$

lo cual nos indica que $D_p f$ es lineal

Proposición 3

Sean S_1, S_2 y $S_3 \subseteq \mathbb{R}^3$ superficies diferenciables. Se cumplen las siguientes enunciados

1) Si $p \in S_1$, entonces la derivada del mapa $\text{id}: S_1 \rightarrow S_2$ es el mapa identidad
 $\text{id}: T_p S_1 \rightarrow T_p S_2$

2) Si $f: S_1 \rightarrow S_2$, $g: S_2 \rightarrow S_3$ son suaves, entonces para cada $p \in S_1$

$$D_p(g \circ f) = D_{f(p)}(g) \circ D_p(f)$$

3) Si $f: S_1 \rightarrow S_2$ es difeomorfismo, entonces $D_p f: T_p S_1 \rightarrow T_p S_2$ es invertible, para cada $p \in S_1$.

6. de julio de 2021

Superficies orientables

Consideramos una superficie diferenciable S , $p \in S$ y

$$\sigma: U \rightarrow W_0 \cap S$$

una parametrización tal que $p \in \sigma(u)$. Recordemos que

$$T_p S = \text{span} \{ \sigma_u, \sigma_v \}$$

así $T_p S$ es un plano que pasa por el origen.

Puesto que σ_u y σ_v son l.i., sabemos que el vector

$$\sigma_u \otimes \sigma_v \neq 0$$

es ortogonal a $T_p S$. Definimos la **unidad normal estandar de la parametrización σ en p** como el vector

$$N_\sigma = \frac{1}{\|\sigma_u \otimes \sigma_v\|} \sigma_u \otimes \sigma_v$$

¿El N_σ es independiente de σ ?

Consideramos una parametrización

$$\tilde{\sigma}: \tilde{U} \rightarrow W_0 \cap S$$

tal que

$$p \in \tilde{\sigma}(\tilde{u}).$$

En este escenario, tenemos que

$$\tilde{\sigma}_u \otimes \tilde{\sigma}_v = \det(J(\varphi)) \sigma_u \otimes \sigma_v$$

donde φ es el mapa de transición entre σ y $\tilde{\sigma}$, y $J(\varphi)$ es la matriz de cambio de base.

Por lo tanto

$$N_{\tilde{\sigma}} := \frac{1}{\|\tilde{\sigma}_u \otimes \tilde{\sigma}_v\|} \tilde{\sigma}_u \otimes \tilde{\sigma}_v$$

de donde,

$$= \frac{1}{\|\det(J(\varphi)) \sigma_u \otimes \sigma_v\|} \det(J(\varphi)) \sigma_u \otimes \sigma_v$$

$$= \frac{\det(J(\varphi)) \sigma_u \otimes \sigma_v}{|\det(J(\varphi))| \|\sigma_u \otimes \sigma_v\|}$$

Por lo tanto, se sigue que

$$N_{\sigma} = \frac{\det(J(\varphi))}{\|\det(J(\varphi))\|} N_{\sigma},$$

de donde

$$\frac{\det(J(\varphi))}{\|\det(J(\varphi))\|}$$

puede tomar valores de 1 y -1.

Esto nos indica que la unidad normal estándar no es siempre independiente de la parametrización con la que trabajamos.

Superficie orientable

Decimos que la superficie diferenciable $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es orientable, cuando admite un atlas diferenciable \mathcal{A} tal que

$$\det(J(\varphi)) > 0$$

para cualquier mapa de transición.

Superficie orientada

Decimos que una superficie diferenciable $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es orientada, cuando existe un mapa suave (cada función componente es suave)

$$N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que para cada $p \in S$, $N(p)$ es un vector unitario, perpendicular a $T_p S$.

$$U \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sigma} \sigma(U) \cap S \xrightarrow{N} \mathbb{R}^3$$

$N \circ \sigma: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es suave. para cada carta (σ, U) que contenga al punto p .

Las superficies orientables también son orientadas

Notamos que cada superficie orientable S es orientada, pues basta tomar

$$N: S \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ p \mapsto N(p) = N_{\sigma}$$

el cual está bien definido gracias a que S es orientable

Las superficies orientadas también son orientables

Cuando S es una superficie orientada, esta también es una superficie orientable!

Para demostrar esto, se puede considerar el atlas maximal de S (el atlas que posee todos los parches diferenciables de S), y considerar el subconjunto, al cual denotamos por \mathcal{A}' , cuyos elementos son parches

$$\sigma: U \rightarrow W \cup N S$$

para los cuales

$$\sigma_u \otimes \sigma_v$$

es un múltiplo positivo de N para cada punto $\sigma(u)$. Basta probar que \mathcal{A}' es un atlas que hace a S una superficie orientable.

Ejemplo: Banda de Möbius.

La banda de Möbius es la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ que se obtiene al rotar un segmento de recta ℓ alrededor de su punto medio p , el cual se desplaza simultáneamente por un círculo \mathcal{C} , de modo que mientras p se desplaza por \mathcal{C} , ℓ realiza un medio giro respecto a p .

Tomemos

$$\mathcal{C} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$$

con ℓ el segmento de recta de longitud l que en un inicio es paralela al eje z con punto medio $p = (1, 0, 0)$.

Luego de que p rota un ángulo θ alrededor del eje z , ℓ rota un ángulo de $\theta/2$ respecto a p en el plano que contiene a p y al eje z .

De esta manera, los puntos de ℓ que en un inicio eran de la forma $(1, 0, t)$, se transforman en

$$\sigma(t, \theta) = \left(\left(1 - t \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \cos(\theta), \left(1 - t \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \sin(\theta), t \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right),$$

donde σ puede evaluarse en el conjunto

$$U = \left\{ (t, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \ni t, \theta \in (0, 2\pi) \right\}$$

Así, (σ, u) es una carta para S , al igual que (σ, \tilde{u}) , en donde

$$\tilde{U} = \left\{ (t, \theta) \in \mathbb{R}^2 : t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \theta \in (-\pi, \pi) \right\}$$

Notemos que σ es suave pues sus componentes son suaves. Además, tenemos que

$$\sigma_t = \left(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta), -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

$$\sigma_\theta = \left(-\sin\theta - \frac{t}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) + t \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \cos\theta - \frac{t}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) - t \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta), -\frac{t}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right).$$

No es difícil verificar que

$$\sigma_t \otimes \sigma_\theta \neq 0$$

En efecto, se tiene que

$$\sigma_t \otimes \sigma_\theta = \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) - t \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{t}{2} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) - \frac{1}{2} t \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} t \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) + \frac{t}{2} \cos(\theta) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) - t \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \right.$$

$$\left. \cos^2(\theta) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - t \cos^2(\theta) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2(\theta) - t \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2(\theta) \right\}$$

Así, la banda de Möbius S es una superficie diferenciable con atlas

$$\mathcal{A} = \{ (\sigma, U), (\sigma, \tilde{U}) \}.$$

Ahora, calculemos la unidad normal estándar para las puntas en S tales que $t=0$.

En este caso, se sigue que

$$\sigma_t = \left(-\sin \frac{\theta}{2} \cos \theta, -\sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \cos \frac{\theta}{2} \right),$$

$$\sigma_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

$$\sigma_t \otimes \sigma_\theta = \left(-\cos \theta \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\|\sigma_t \otimes \sigma_\theta\| = 1.$$

Y, por lo tanto,

$$N_\sigma = \sigma_t \otimes \sigma_\theta$$

Probamos que la banda de Möbius no es orientable. Supongamos que así lo es, así, existe

$$N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$$

suave sobre cada punto de S . En un punto $\sigma(0, \theta)$ tenemos que

$$N = \lambda(\theta) N_\sigma$$

con $\lambda(\theta)$ tomando los valores de 1 o -1 , conforme $\theta \in (0, 2\pi)$.

Supongamos que $\lambda(\theta) = 1$. Como N es suave en $\sigma(0, 0) = (0, 2\pi)$. Tenemos que

$$N = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} N_\sigma = (-1, 0, 0)$$

$$N = \lim_{\theta \rightarrow 0^-} N_\sigma = (1, 0, 0)$$

lo cual no es posible. En consecuencia, la banda de Möbius no es orientable.

Los difeomorfismos preservan la orientación

Lema 1.

Sean S y S_* superficies diferenciales difeomorfas. Si S es orientable, entonces S_* también lo es.

Demostración.

Supongamos que

$$\mathcal{A} = \{ (\sigma_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in I \}$$

es un atlas para S , de modo que cada mapa de transición entre cartas $(\sigma_\alpha, U_\alpha)$ y (σ_β, U_β) , al cual denotamos por $\mathcal{D}_{\alpha, \beta}$, es tal que

$$\det(J(\varphi_{\alpha,\beta})) > 0.$$

Si f es un difeomorfismo entre S y S_* , entonces

$$f \circ \sigma_\alpha$$

es una parametrización admisible para S en S_* , para cada $d \in I$. Así,

$$\mathcal{A}_* = \{f \circ \sigma_\alpha, U_\alpha : d \in I\}$$

es un atlas diferenciable para S_* .

Además, puesto que

$$\begin{aligned}(f \circ \sigma_\beta)^{-1} \circ (f \circ \sigma_\alpha) &= \sigma_\beta^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ \sigma_\alpha \\ &= \sigma_\beta^{-1} \circ \sigma_\alpha \\ &= \varphi_{\alpha,\beta},\end{aligned}$$

\mathcal{A} y \mathcal{A}_* poseen los mismos mapas de transición. Esto prueba que S_* es orientable. En efecto, si poseen los mismos mapas de transición, el determinante de la matriz jacobiana de los mapas de transición para S_* también serán mayores que cero.

$$\det(J(\varphi_{\alpha,\beta})) > 0.$$

Teorema.

Toda superficie compacta es orientable

(Bosquejo de la demostración.)

Recordemos que toda superficie compacta es difeomorfa a \mathbb{T}_g , para algún $g \in \mathbb{N}_0$. Del lema 1) sabemos que los difeomorfismos preservan la orientabilidad. Así, basta probar que \mathbb{T}_g es orientable para cada $g \in \mathbb{N}_0$.

Sea $g \in \mathbb{N}_0$, cualquiera. Similar al teorema de la curva de Jordan, \mathbb{T}_g posee un interior (el cual es acotado) y un exterior (el cual no es acotado). En cada punto de \mathbb{T}_g podemos elegir como unidad normal estándar al vector normal a \mathbb{T}_g que apunta hacia el exterior.

Así, si

$$\sigma: U \rightarrow W \cup NS$$

y

$$\tilde{\sigma}: \tilde{U} \rightarrow W \cup NS$$

son parametrizaciones de \mathbb{T}_g , entonces

$$N_\sigma = N_{\tilde{\sigma}}$$

lo que implica que \mathbb{T}_g es orientable.

Bases orientadas

Sea U un espacio vectorial real de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Decimos que dos bases ordenadas

$$(E_1, \dots, E_n)$$

y

$$(\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_n)$$

de V son orientadas consistentemente cuando la matriz de transición $(B_i^j)_{i,j=1}^n$ tienen determinante positivo.

Recordemos que

$$E_i = \sum_{j=1}^n B_i^j \tilde{E}_j$$

para cada $i=1, \dots, n$.

Como ejercicio, puede demostrar que ser «orientado consistentemente» define una relación de equivalencia sobre el conjunto de bases ordenadas de V .

Dada una base ordenada (E_1, \dots, E_n) de un espacio vectorial real V , a la clase de equivalencia

$$[(E_1, \dots, E_n)]$$

le llamamos orientación para V . Denotamos por

$$[E_1, \dots, E_n]$$

la orientación que la base (E_1, \dots, E_n) determina y por

$$-[E_1, \dots, E_n]$$

a la orientación opuesta. A un espacio vectorial con una orientación, le llamamos espacio vectorial orientado.

Cuando un espacio vectorial real V está orientado, cualquier base orientada, está orientada positivamente cuando pertenece a la clase de equivalencia a la cual pertenece la base que determina la orientación de V , en caso contrario está orientada negativamente.

En el caso de los espacios vectoriales de dimensión cero, definimos la orientación como la elección de 1 o -1 .

Ejemplo.

Para \mathbb{R}^n , la orientación determinada por la base canónica

$$(e_1, \dots, e_n)$$

se conoce como orientación estándar.

Juarez 08 de Julio de 2021.

Primera forma fundamental

Sea S una superficie diferenciable y $p \in S$, arbitrario pero fijo. Al mapa bilineal

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{p,S} : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle_{p,S} = v \cdot w$$

le llamamos primera forma fundamental de S en p . Escribimos

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{p,S}$$

siempre que no haya lugar a confusiones.

Descripción a través de parametrizaciones

Sea $p \in S$

$$\sigma: U \rightarrow W \cap S$$

una parametrización de S en p . Puesto que

$$T_p S = \text{span}\{\sigma_u, \sigma_v\}$$

con $\sigma(u, v) = p$, sabemos para cada w en el espacio tangente a S en p , existen $a_w, b_w \in \mathbb{R}$ únicas tales que

$$w = a_w \sigma_u + b_w \sigma_v.$$

Con esta información, los mapas lineales

$$du: T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \mapsto du(w) = a_w$$

y

$$dv: T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \mapsto dv(w) = b_w$$

están bien definidos

Puesto que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es bilineal, vemos que

$$\begin{aligned} \langle w, w \rangle &= a_w^2 \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle + 2a_w b_w \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle + b_w^2 \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle \\ &= E a_w^2 + 2F a_w b_w + G b_w^2 \\ &= E du(w)^2 + 2F du(w) dv(w) + G dv(w)^2 \end{aligned}$$

en donde

$$E = \|\sigma_u\|^2,$$

$$F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle,$$

$$G = \|\sigma_v\|^2.$$

A la expresión

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

se le denomina la primera forma fundamental de la parametrización $\sigma(u, v) = p$.

Si bien E, F, G, du, dv dependen de σ , en general, la primera forma fundamental depende de S y p .

Longitud de una curva sobre una superficie

Sean S una superficie diferenciable y γ una curva sobre S contenida en algún parche $\sigma(u)$. Sabemos que

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$$

con u, v mapas real valorados suaves. Así

$$\gamma'(t) = \sigma_u u'(t) + \sigma_v v'(t),$$

por lo cual

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = E u'(t)^2 + 2F u'(t) v'(t) + G v'(t)^2$$

De este modo, la fórmula

$$\int (E u'(t)^2 + 2F u'(t) v'(t) + G v'(t)^2)^{1/2} dt$$

representa la longitud de la curva γ (o parte de ella)

Ejemplo

Consideremos la superficie de revolución, cuyas curvas tienen la forma

$$\sigma(t, \theta) = (f(t) \cos(\theta), f(t) \sin(\theta), g(t))$$

con f, g suaves respecto a t , además de que $f(t) > 0$ para todos los posibles valores de t , y también

$$f'(t)^2 + g'(t)^2 = 1 \quad \leftarrow \text{curva de rapidez unitaria.}$$

$$\sigma_t(t, \theta) = (f'(t) \cos \theta, f'(t) \sin \theta, g'(t))$$

$$\sigma_\theta(t, \theta) = (-f(t) \sin \theta, f(t) \cos \theta, 0)$$

$$\langle \sigma_t, \sigma_t \rangle = \cos^2(\theta) f'(t)^2 + f'(t)^2 \sin^2(\theta) + g'(t)^2 = f'(t)^2 + g'(t)^2 =$$

$$\langle \sigma_\theta, \sigma_\theta \rangle = f(t)^2 \sin^2(\theta) + f(t)^2 \cos^2(\theta) = f(t)^2 + g(t)^2 =$$

$$\langle \sigma_\theta, \sigma_t \rangle = f'(t) f(t) \cos \theta \sin \theta + f'(t) f(t) \cos(\theta) \sin(\theta)$$

En este caso obtenemos

$$E :=$$

$$F := \langle \sigma_t, \sigma_\theta \rangle = 0$$

$$G := \|\sigma_\theta\|^2 = f(t)^2$$

por lo cual la primera forma fundamental de esta superficie es

$$dt^2 + f(t)^2 d\theta^2$$

Ejemplo

Una superficie reglada es un subconjunto de \mathbb{R}^3 que se obtiene cuando una recta, llamada generatriz, se desplaza por una o varias curvas a las cuales denominamos directrices.

Por ejemplo, los cilindros son superficies regladas

Consideremos la curva parametrizada

$$\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

directriz de la superficie reglada S .

Supongamos que la generatriz interseca a γ en un punto q , por lo cual existe (a, b) tal que

$$q = \gamma(u)$$

Si denotamos por $\delta(u)$ al vector no nulo que sigue la dirección de la generatriz que pasa por q , entonces la generatriz tiene forma

$$\rho(t) = \gamma(u) + t\delta(u) \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, cualquier punto sobre S se describe con la fórmula

$$\sigma(u, t) = \gamma(u) + t\delta(u)$$

con σ definido sobre

$$U = \{ (u, t) \in \mathbb{R}^2 : u \in (a, b) \}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\sigma_u &= \gamma'(u) + t\delta'(u) \\ \sigma_t &= \delta(u)\end{aligned}$$

por lo que σ es regular si y solo si $\gamma'(u) + t\delta'(u)$ y $\delta(u)$ son linealmente independientes

Una superficie reglada para la cual

$$\delta(u) = a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

es constante sobre (a, b) , y paralelo a la generatriz, se denomina un cilindro generalizado.

En este caso, notemos que

$$\sigma(u_1, t_1) = \sigma(u_2, t_2) \Leftrightarrow \gamma(u_1) - \gamma(u_2) = (t_1 - t_2)a$$

lo que nos indica que σ es inyectiva cuando cada recta paralela a \mathcal{Q} interseca a γ una sola vez

Además, se tiene que

$$\sigma_u = \gamma'(u) \quad \text{y} \quad \sigma_t = a$$

por lo tanto σ es regular si y sólo si la generatriz no es tangente a la curva directriz.

En el caso de que γ sea de rapidez unitaria y está contenida en el plano que contiene a \mathcal{Q} , se tiene que

$$E = \|\sigma_u\|^2 = \|\gamma'(u)\|^2 = 1, \quad F = \sigma_u \sigma_t = \gamma'(u) \cdot a = 0 \quad G = \|\sigma_t\|^2 = \|a\|^2 = 1.$$

en consecuencia, la primera forma fundamental de este cilindro generalizado es

$$du^2 + dt^2$$

Superficies isométricas

Dadas dos superficies S_1 y S_2 , decimos que un mapa

$$f: S_1 \rightarrow S_2$$

es una isometría local cuando para toda curva γ sobre S_1 , el mapa

$$(f \circ \gamma)'(t)$$

es una curva sobre S_2 de la misma longitud de γ

En este caso, decimos que S_1 y S_2 son localmente isométricas

Caracterización

Teorema

Sean $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^3$ superficies diferenciables y

$$f: S_1 \rightarrow S_2$$

se cumple. Se tiene que f es una isometría local si y solo si

$$f^*(v, w)_p = \langle v, w \rangle_p \quad \text{para cada } v, w \in T_p S_1$$

para cada $p \in S_1$, en donde

$$f^*(\cdot, \cdot)_p : T_p S_1 \times T_p S_1 \rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) \mapsto f^*(v, w)_p = \langle D_p f(v), D_p f(w) \rangle_{f(p)}$$

Demostración

Sea $p \in S_1$, cualquiera. Sea $\gamma: (a, b) \rightarrow S_1$ una curva parametrizada cuya longitud es

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_p^{1/2} dt$$

Veamos que $f \circ \gamma$ es una curva sobre S_2 tal que

$$\begin{aligned} \int_a^b \|(f \circ \gamma)'(t)\| dt &= \int_a^b \langle (f \circ \gamma)'(t), (f \circ \gamma)'(t) \rangle_p^{1/2} dt \\ &= \int_a^b \langle D_p f(\gamma'(t)), D_p f(\gamma'(t)) \rangle_p^{1/2} dt \\ &= \int_a^b \|f^*(\gamma', \gamma')\| dt \end{aligned} \quad (2)$$

En caso de que

$$f^*(v, w)_p = \langle v, w \rangle_p \quad \forall v, w \in T_p S_1.$$

Las curvas γ y $f \circ \gamma$ tienen la misma longitud

Gracias a (2) concluimos que f es una isometría local

Ahora, supongamos que f es una isometría local. Por lo tanto,

$$\int_a^b \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_p^{1/2} dt = \int_a^b \|f^*(\gamma'(t), \gamma'(t))\| dt,$$

para cada curva $\gamma: (a, b) \rightarrow S_1$. En consecuencia

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = f^*(\gamma'(t), \gamma'(t))_p \quad (3)$$

para cada curva γ sobre S_1 .

Recordemos que cualquier vector v tangente a S_1 en p , es un vector tangente a una curva S_1 , así, gracias a (3), se tiene que

$$\langle v, v \rangle = f^*(v, v)_p \quad \forall v \in T_p S_1 \quad (4)$$

Escribiendo $g(v) = \langle v, v \rangle$, vemos que

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} (g(v+w) - g(v) - g(w)) \quad \forall v, w \in T_p S_1 \quad (5)$$

Al combinar (4) y (5), obtenemos

$$f^*(v, w)_p = \langle v, w \rangle_p \quad \text{para cada } v, w \in T_p S_1,$$

lo que concluye la demostración

Clase, martes 13 de julio de 2021

Superficies isométricas

Dadas dos superficies diferenciables S_1 y S_2 , decimos que un mapa

$$f: S_1 \rightarrow S_2$$

es una isometría local cuando para toda curva γ sobre S_1 , el mapa

$$\gamma \circ f$$

es una curva sobre S_2 de la misma longitud de γ . En este caso, decimos que S_1 y S_2 son localmente isométricas

Caracterización

Sean S_1 y $S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ superficies diferenciables y

$$f: S_1 \rightarrow S_2$$

suave. Se tiene que f es una isometría local si y solo si

$$f^*(v, w)_p = \langle v, w \rangle_p \quad v, w \in T_p S_1$$

para cada $p \in S_1$, donde

$$f^*: T_p S_1 \times T_p S_1 \rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) \mapsto f^*(v, w) = \langle D_p f(v), D_p f(w) \rangle_{f(p)}$$

Nota 1

Notemos que cuando f es una isometría local entre S_1 y S_2 el mapa

$$D_p f: T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$$

establece una isometría entre $T_p S_1$ y $T_{f(p)} S_2$, para cada $p \in S_1$.

Corolario

Sean S_1 y S_2 superficies diferenciables y

$$f: S_1 \rightarrow S_2$$

un difeomorfismo. Se tiene que f es una isometría local si y solo si σ y $f \circ \sigma$ poseen la misma primera forma fundamental, para cada parametrización σ de S_1 .

Demostración:

Sea $p \in S_1$, cualquiera. Sea $\sigma_i: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, una parametrización para S_i tal que $p \in \sigma_i(U)$, cualquiera.

Vamos a probar que σ_1 y $f \circ \sigma_1 = \sigma_2$ poseen la misma primera forma fundamental si y solo si

$$f^*(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$$

Notemos que para σ_1 y σ_2 , las primeras formas fundamentales son:

$$E_i du^2 + 2F_i du dv + G_i dv^2$$

con

$$E_i = \langle (\sigma_i)_u, (\sigma_i)_u \rangle, \\ \text{para cada } i = 1, 2.$$

$$F = \langle (\sigma_1)_u, (\sigma_1)_v \rangle$$

$$G = \langle (\sigma_1)_v, (\sigma_1)_v \rangle$$

Si suponemos que

$$f^*(\cdot, \cdot)_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$$

entonces,

$$\begin{aligned} \langle (\sigma_2)_u, (\sigma_2)_u \rangle_{f(p)} &= \langle D_p f((\sigma_1)_u), D_p f((\sigma_1)_u) \rangle \\ &= f^*((\sigma_1)_u, (\sigma_1)_u) \\ &= \langle (\sigma_1)_u, (\sigma_1)_u \rangle \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$E_1 = E_2$$

De manera análoga se obtiene que $F_1 = F_2$ y $G_1 = G_2$, lo que nos permite concluir que las primeras formas fundamentales coinciden.

(\Leftarrow) En cambio, cuando $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$ y $G_1 = G_2$, vemos que

$$f^*(v, w)_p = \langle v, w \rangle_p \quad (1)$$

para cada $v, w \in T_p S_1$, de la forma $(\sigma_1)_u, (\sigma_1)_v$, los cuales generan $T_p S_1$. Puesto que $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ es bilineal, (1) es válida para cada $v, w \in T_p S_1$, lo que muestra que f es una isometría local.

Ejemplo:

Consideremos el cilindro circular

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

y el mapa

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S \\ (u, v) &\longmapsto f(u, v) = (\cos u, \sin u, v) \end{aligned}$$

el cual no es inyectivo ni sobreyectivo, por lo tanto no es biyectivo. Intuitivamente, lo que hace f es enrollar el plano yz para formar el cilindro.

Para iniciar, vamos a probar que f es un difeomorfismo local cuando el plano yz se parametriza con el mapa

$$\begin{aligned} \tau: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \tau(u, v) = (0, u, v), \end{aligned}$$

y consideramos S con su atlas

$$\mathcal{A} = \{(u, \sigma|_u), (\tilde{u}, \sigma|_{\tilde{u}})\}$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) &= (\cos u, \sin u, v) \\ U &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in (0, 2\pi)\} \\ \tilde{U} &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in (-\pi, \pi)\}. \end{aligned}$$

Sea $p = (0, a, b)$, cualquier punto del plano yz .

Si a no es un múltiplo par de π , entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$2n\pi < a < 2(n+1)\pi$$

De este modo para cada $u \in (2\pi n, 2(n+1)\pi)$ se tiene que

$$f(\tau(u, v)) = \sigma|_u(u - 2\pi n, v)$$

y por lo tanto, f es un difeomorfismo de

$$O = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \in (2\pi n, 2(n+1)\pi)\}$$

subconjunto abierto del plano, en

$$f(O) := \{(x, y, z) \in S : x \neq 1\}$$

subconjunto abierto de S .

De manera análoga, podemos probar que, si a no es un múltiplo impar de π , entonces

$$f(\tau(u, v)) = \sigma|_{\tilde{u}}(u - (2n+1)\pi, v)$$

para cada $u \in ((n-1)\pi, (n+1)\pi)$, y por tanto f es un difeomorfismo de un conjunto abierto del plano

$$\tilde{O} = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \in ((n-1)\pi, (n+1)\pi)\}$$

a un subconjunto abierto de S

$$f(\tilde{O}) = \{(x, y, z) \in S : x \neq -1\}.$$

Como a no puede ser par e impar de π , y p es arbitrario, se sigue que f es un difeomorfismo local.

Ahora, tomando

$$\sigma_1(u, v) = (0, u, v)$$

para S_1 y

$$\sigma_2(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

para S_2 , se obtiene que la primera forma fundamental para S_1 y S_2 es

$$du^2 + dv^2.$$

En efecto, para S_1

$$(\sigma_1)_u = (0, 1, 0), \quad (\sigma_1)_v = (0, 0, 1) \quad \Rightarrow \quad E = \|(\sigma_1)_u\|^2 = 1, \quad F = \langle (\sigma_1)_u, (\sigma_1)_v \rangle = 0, \quad G = \|(\sigma_1)_v\|^2 = 1$$

análogamente, se obtiene para S_2 . Y, por lo tanto

$$f(\sigma_1(u, v)) = \sigma_2(u, v).$$

Esto nos muestra que f es una isometría local entre el plano yz y el cilindro S .

Transformaciones conformes

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y

$$\gamma: I \rightarrow S$$

y

$$\zeta: J \rightarrow S$$

curvas parametrizadas regulares sobre S que se intersecan sobre un punto $p \in S$.

Así,

$$p = \gamma'(t_0) = \xi'(r_0),$$

para ciertos $t_0 \in I$ y $r_0 \in J$.

El ángulo de intersección entre γ y ξ en p , es el número θ tal que

$$\cos \theta = \frac{1}{\|\gamma'(t_0)\| \|\xi'(r_0)\|} \gamma'(t_0) \cdot \xi'(r_0). \quad (2)$$

Notemos que θ es el ángulo entre los vectores $\gamma'(t_0)$, $\xi'(r_0)$.

Consideremos

$$\sigma: U \rightarrow WNS$$

una parametrización de S tal que $p \in W$ y γ, ξ pertenecen a

$$\sigma(U) = WNS.$$

Sabemos que

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)) \quad \text{y} \quad \xi(r) = \sigma(u_*(t), v_*(t)),$$

donde u, v, u_*, v_* son funciones diferenciables real-valoradas.

Si la primera forma fundamental de σ es

$$E du^2 + F du dv + G dv^2$$

entonces (2) toma la forma

$$\cos \theta = \frac{E u' u_*' + F (u' v_*' + u_*' v') + G v' v_*'}{(E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2)^{1/2} (E u_*'^2 + 2F u_*' v_*' + G v_*'^2)^{1/2}}$$

En efecto,

$$\gamma'(t) = \sigma_u(u(t), v(t)) (u') + \sigma_v(u(t), v(t)) v',$$

de donde

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle^{1/2} = \langle \sigma_u u' + \sigma_v v', \sigma_u u' + \sigma_v v' \rangle = (\sigma_u u' + \sigma_v v')^2 \\ &= \sigma_u^2 u'^2 + 2\sigma_u \sigma_v u' v' + \sigma_v^2 v'^2 \\ &= E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2 \end{aligned}$$

Análogamente, se tiene para $\xi(t)$

donde u', v', u_*', v_*' , están evaluadas en t_0 y r_0 , respectivamente.

Ejemplo:

Sean S una superficie diferenciable, $p \in S$,

$$\sigma: U \rightarrow \sigma(U)$$

tal que

$$p = \sigma(u_0, v_0).$$

Consideremos las curvas de parámetros

$$\gamma(t) = \sigma(u_0, t) \quad \text{y} \quad \xi(t) = (t, v_0),$$

para las cuales $u(t) = u_0$, $v(t) = t$, $u_x(t) = 1$, $v_x(t) = v_0$.

$$u'(t) = 0, \quad v'(t) = 1, \quad u_x'(t) = 1 \quad \text{y} \quad v_x'(t) = 0,$$

y así,

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

con E, F y G evaluadas en (u_0, v_0) .

Notemos que γ y ξ son ortogonales si y sólo si $F = 0$.

Invarianza de ángulos.

Definición

Sean S_1 y S_2 superficies diferenciables y

$$f: S_1 \rightarrow S_2$$

un difeomorfismo. Sean γ_1, ξ_1 curvas que intersecan sobre S_1 . Escribimos

$$\gamma_2 = f \circ \gamma_1 \quad \text{y} \quad \xi_2 = f \circ \xi_1.$$

Decimos que f es una transformación conforme cuando el ángulo entre γ_1, ξ_1 es igual al ángulo entre γ_2 y ξ_2 .

Clase, jueves 15 de julio de 2021

Propiedades de las transformaciones conformes

1. La composición de dos transformaciones conformes es conforme;
2. La inversa de una transformación conforme es conforme.

Teorema.

Sean $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^3$ superficies diferenciables y

$$f: S_1 \rightarrow S_2$$

un difeomorfismo ^{local}. Se tiene que f es una transformación conforme si y sólo si existe un mapa

$$\lambda: S_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

suave, tal que

$$f^*(\langle v, w \rangle)_p = \lambda(p) \langle v, w \rangle_p \quad \forall v, w \in T_p S_1, \quad \forall p \in S_1$$

Demostración:

Sean $p \in S_1$, γ y ξ dos curvas regulares sobre S_1 que intersecan a p , cualesquiera.

Recordemos un poco de información.

Sabemos que el ángulo de intersección θ entre γ y ξ en p es

$$\cos \theta = \frac{1}{\|\gamma'(t_0)\| \|\xi'(r_0)\|} \gamma'(t_0) \cdot \xi'(r_0) \quad (1)$$

donde $p = \gamma(t_0) = \xi(r_0)$.

Así mismo $f \circ \gamma$ y $f \circ \xi$ son dos curvas regulares que se intersecan sobre S_2 , cuyo ángulo $\hat{\theta}$ es tal que

$$\cos \hat{\theta} = \frac{(f \circ \gamma)'(t_0) \cdot (f \circ \xi)'(r_0)}{\|(f \circ \gamma)'(t_0)\| \|(f \circ \xi)'(r_0)\|} \quad (2)$$

Supongamos que f es una transformación conforme, por lo tanto $\theta = \hat{\theta}$ y así, las expresiones (1) y (2) son iguales.

Por otro lado, de la definición, tenemos que

$$\begin{aligned} f^*(\gamma'(t_0), \xi'(r_0)) &= \langle D_p f(\gamma'), D_p f(\xi') \rangle \\ &= (f \circ \gamma)'(t_0) \cdot (f \circ \xi)'(r_0) \end{aligned}$$

$$f^*(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0)) = (f \circ \gamma)'(t_0) \cdot (f \circ \gamma)'(t_0)$$

$$f^*(\xi'(r_0), \xi'(r_0)) = (f \circ \xi)'(r_0) \cdot (f \circ \xi)'(r_0)$$

Así, gracias a que (1) y (2) son iguales, obtenemos

$$\frac{\langle \gamma'(t_0), \xi'(r_0) \rangle}{\|\gamma'(t_0)\| \|\xi'(r_0)\|} = \frac{f^*(\gamma'(t_0), \xi'(r_0))}{f^*(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0))^{1/2} f^*(\xi'(r_0), \xi'(r_0))^{1/2}} \quad (3)$$

Puesto que γ y ξ y puesto que todo elemento de $T_p S_1$ es un vector tangente a una curva sobre S_1 que pasa por p , de (3) se sigue que

$$\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \frac{f^*(v, w)}{f^*(v, v)^{1/2} f^*(w, w)^{1/2}} \quad \forall v, w \in T_p S_1, v \neq 0 \quad (4)$$

Ahora, supongamos que

$$\{v_1, v_2\}$$

es una base ortonormal para $T_p S_1$ con respecto a la primera forma fundamental $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Consideremos los escalares

$$\alpha = f^*(v_1, v_1), \quad \alpha = f^*(v_1, v_2) \quad \beta = f^*(v_2, v_2).$$

Sea $\theta \in \mathbb{R}$ arbitrario pero fijo. Tomemos

$$v = v_1 \in T_p S_1$$

$$w = \cos \theta v_1 + \sin \theta v_2 \in T_p S_1$$

en $T_p S_1$.

Calculemos:

$$\langle v, v \rangle = v_1 \cdot v_1 = v_1^2 = 1, \quad \langle w, w \rangle = (\cos \theta v_1 + \sin \theta v_2) \cdot (\cos \theta v_1 + \sin \theta v_2) = \cos^2 \theta v_1^2 + 2 \cos \theta \sin \theta v_1 v_2 + \sin^2 \theta v_2^2 = 1 \quad (b)$$

$$\langle v, w \rangle = v_1 \cdot (\cos \theta v_1 + \sin \theta v_2) = \cos \theta v_1 \cdot v_1 + \sin \theta v_2 v_1 = \cos \theta$$

$$f^*(v, v) = f^*(v_1, v_1) = \lambda$$

$$f^*(v, w) = f^*(v_1, \cos \theta v_1 + \sin \theta v_2) = \cos \theta f^*(v_1, v_1) + \sin \theta f^*(v_2, v_1) = \cos \theta \lambda + \sin \theta d$$

$$f^*(w, w) = f^*(\cos \theta v_1 + \sin \theta v_2, \cos \theta v_1 + \sin \theta v_2) = \cos^2 \theta f^*(v_1, \cos \theta v_1 + \sin \theta v_2) + \sin \theta f^*(v_2 + \cos \theta v_1 + \sin \theta v_2)$$

$$= \cos^2 \theta f^*(v_1, v_1) + \cos \theta \sin \theta f^*(v_1, v_2) + \sin \theta \cos \theta f^*(v_2, v_1) + \sin^2 \theta f^*(v_2, v_2)$$

$$= \cos^2 \theta \lambda + \cos \theta \sin \theta d + \sin \theta \cos \theta d + \sin^2 \theta \beta$$

$$= \cos^2 \theta \lambda + 2d \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta \beta$$

Gracias a (4), obtenemos que

$$\cos \theta = \frac{\lambda \cos \theta + d \sin \theta}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda \cos^2 \theta + 2d \cos \theta \sin \theta + \beta \sin^2 \theta}}$$

Cuando $\theta = \pi/2$, obtenemos, de la identidad anterior, tenemos que

$$d = 0$$

y por lo tanto,

$$\cos \theta = \frac{\lambda \cos \theta}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda \cos^2 \theta + \beta \sin^2 \theta}} = \cos^2 \theta = \frac{(\lambda \cos \theta)^2}{(\lambda)(\lambda \cos^2 \theta + \beta \sin^2 \theta)}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 \cos^2 \theta (\lambda \cos^2 \theta + \beta \sin^2 \theta) = \lambda^2 \cos^2 \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 \cos^2 \theta - \cos^2 \theta \lambda (\lambda \cos^2 \theta + \beta \sin^2 \theta) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 \cos^2 \theta (\lambda - \lambda \cos^2 \theta - \beta \sin^2 \theta) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 \cos^2 \theta (\lambda \cos^2 + \lambda \sin^2 \theta - \lambda \cos^2 \theta - \beta \sin^2 \theta) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 \cos^2 \theta (\lambda \sin^2 \theta - \beta \sin^2 \theta) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 \cos^2 \theta (\sin^2 \theta (\lambda - \beta)) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \theta \sin^2 \theta (\lambda^2 - \lambda \beta) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto $\lambda^2 - \lambda \beta = 0$, se sigue que $\lambda = \beta$. De este modo, por (4), se tiene que

$$f^*(v_1, v_2) = \lambda \langle v_1, v_2 \rangle$$

para cualquier base ortonormal $\{v_1, v_2\}$ para $T_p S_1$, por lo tanto

$$f^*(v, w) = \lambda \langle v, w \rangle_p \quad \forall v, w \in T_p S_1 \quad \forall p \in S_1$$

\Leftarrow Recíprocamente, supongamos que existe un mapa

$$\lambda: S_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

suave, tal que

$$f^*(v, w)_p = \lambda(p) \langle v, w \rangle_p \quad \forall v, w \in T_p S_1 \quad \forall p \in S_1$$

y sean θ el ángulo de intersección entre γ' y ξ' y $\hat{\theta}$ el ángulo de intersección entre $(f \circ \gamma)'$ y $(f \circ \xi)'$ en S_2 .

Por otro lado, como

$$\langle (f \circ \gamma)'(t_0), (f \circ \xi)'(r_0) \rangle_{f(p)} = \langle D_p f(\gamma'(t_0)), D_p f(\xi'(r_0)) \rangle_{f(p)} = f^*(\gamma'(t_0), \xi'(r_0))$$

$$\langle (f \circ \gamma)'(t_0), (f \circ \gamma)'(t_0) \rangle_{f(p)} = \langle D_p f(\gamma'(t_0)), D_p f(\gamma'(t_0)) \rangle_{f(p)} = f^*(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0))$$

$$\langle (f \circ \xi)'(r_0), (f \circ \xi)'(r_0) \rangle_{f(p)} = \langle D_p f(\xi'(r_0)), D_p f(\xi'(r_0)) \rangle_{f(p)} = f^*(\xi'(r_0), \xi'(r_0))$$

De donde, como

$$\cos \hat{\theta} = \frac{(f \circ \gamma)'(t_0) \cdot (f \circ \xi)'(r_0)}{\| (f \circ \gamma)'(t_0) \| \| (f \circ \xi)'(r_0) \|} = \frac{\langle (f \circ \gamma)'(t_0), (f \circ \xi)'(r_0) \rangle}{\langle (f \circ \gamma)'(t_0), (f \circ \gamma)'(t_0) \rangle^{1/2} \langle (f \circ \xi)'(r_0), (f \circ \xi)'(r_0) \rangle^{1/2}}$$

Reemplazando las expresiones obtenidas anteriormente

$$\cos \hat{\theta} = \frac{f^*(\gamma'(t_0), \xi'(r_0))}{f^*(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0))^{1/2} f^*(\xi'(r_0), \xi'(r_0))^{1/2}}$$

y dado que $f^*(v, w) = \lambda(p) \langle v, w \rangle_p$, entonces

$$\cos \hat{\theta} = \frac{\lambda(p) \langle \gamma'(t_0), \xi'(r_0) \rangle}{(\lambda(p) \langle \gamma'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle)^{1/2} (\lambda(p) \langle \xi'(r_0), \xi'(r_0) \rangle)^{1/2}}$$

$$= \frac{\lambda(p) \langle \gamma'(t_0), \xi'(r_0) \rangle}{\lambda(p) \langle \gamma'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle^{1/2} \langle \xi'(r_0), \xi'(r_0) \rangle^{1/2}}$$

$$= \frac{\langle \gamma'(t_0), \xi'(r_0) \rangle}{\langle \gamma'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle^{1/2} \langle \xi'(r_0), \xi'(r_0) \rangle^{1/2}}$$

$$= \frac{\gamma'(t_0) \cdot \xi'(r_0)}{\| \gamma'(t_0) \| \| \xi'(r_0) \|}$$

$$= \cos \theta.$$

De donde, se concluye que $\theta = \hat{\theta}$ y así f es conforme.

Corolario

Sean S_1, S_2 superficies diferenciables y

$$f: S_1 \rightarrow S_2$$

un difeomorfismo. Se tiene que f es conforme si y solo si para cualquier parametrización σ de S_1 , las primeras formas fundamentales de σ y $f \circ \sigma$ son proporcionales.

Ejemplo

Consideremos la superficie diferenciable S^2 . Tomemos

$$q \in S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$$

arbitrario pero fijo.

Al punto

$$n = (0, 0, 1)$$

le llamamos polo norte.

Notemos que la recta que pasa por n y q , interseca al plano xy en un punto al cual denotamos p . Visualmente es más sencillo considerar al plano paralelo xy , que corta al eje z en $z = -1$.

Al mapa

$$\begin{aligned} \Pi: S^2 \setminus \{n\} &\longrightarrow \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ q &\longmapsto \pi(q) = p \end{aligned}$$

le llamamos proyección estereográfica de S^2 sobre el plano

$$\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Vamos a demostrar que Π es conforme, para lo cual vamos a proveer a $S^2 \setminus \{n\}$ de un atlas diferenciable.

Sea $q \in S^2 \setminus \{n\}$, cualesquiera. Puesto que p, q, n son puntos sobre una misma recta, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$q - n = a(p - n).$$

Si

$$q = (x, y, z) \quad \text{y} \quad p = (u, v, 0).$$

Con $z \neq 1$, entonces

$$\begin{aligned} q &= (x, y, z) \\ &= (0, 0, 1) + a((u, v, 0) - (0, 0, 1)) \\ &= (au, av, 1 - a), \end{aligned} \tag{5}$$

y por lo tanto

$$a = 1 - z, \quad u = \frac{x}{1 - z}, \quad v = \frac{y}{1 - z}$$

En consecuencia

$$\Pi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}, 0 \right).$$

Recordemos que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, y por lo tanto

$$a = 1 - z = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Así,

$$q = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) : \sigma_1(u, v) \tag{6}$$

por lo que σ_1 induce una parametrización para $S^2 \setminus \{n\}$.

Notemos que en el plano

$$\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

puede parametrizarse usando

$$\sigma_2(u, v) = (u, v, 0).$$

Además, tenemos que

$$\pi(\sigma_1(u, v)) = \sigma_2(u, v) \quad \text{para cada } u, v \in \mathbb{R}$$

por tanto, para probar que π es conforme, basta con verificar que las primeras formas fundamentales para σ_1 y σ_2 son proporcionales

La primera forma fundamental para σ_2 es

$$du^2 + dv^2. \quad (7)$$

En cambio, para σ_1 , tenemos que

$$(\sigma_1)_u = \left(\frac{2(v^2 - u^2 + 1)}{(1 + v^2 + u^2)^2}, \frac{-4uv}{(1 + u^2 + v^2)^2}, \frac{4u}{(1 + u^2 + v^2)^2} \right)$$

$$(\sigma_1)_v = \left(\frac{-4uv}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{2(v^2 + u^2 + 1)}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \frac{4v}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \right).$$

de donde obtenemos

$$E = \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2}, \quad F = 0, \quad G = \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2}.$$

Así, la primera forma fundamental para σ_1 es

$$\frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2} (du^2 + dv^2) \quad (8)$$

Al comparar (7) y (8) vemos que la primera forma fundamental de σ_2 es

$$\frac{1}{4} (u^2 + v^2 + 1)^2$$

veces la primera forma fundamental de σ_1 , por lo cual podemos concluir que π es un mapa conforme.

Clase, martes 27 de julio de 2021

Área.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y

$$\sigma: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \sigma(u)$$

una parametrización de S . Dado $R \subseteq U$, decimos que

$$A_\sigma(R) = \int_R \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du \, dv$$

es el área de la región R .

El área en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental

Proposición

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable

$$\sigma: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \sigma(u)$$

una parametrización de S y $R \subseteq U$. se tiene que

$$A_\sigma(R) = \int_R (EG - F^2)^{1/2} du dv$$

Demostración:

Tomemos en cuenta que para $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$, se tiene que

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$$

Recordemos además que

$$E = \sigma_u \cdot \sigma_u,$$

$$F = \sigma_u \cdot \sigma_v$$

$$G = \sigma_v \cdot \sigma_v.$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \|\sigma_u \otimes \sigma_v\|^2 &= (\sigma_u \otimes \sigma_u) \cdot (\sigma_u \otimes \sigma_v) \\ &= (\sigma_u \cdot \sigma_u) \cdot (\sigma_u \cdot \sigma_v) - (\sigma_u \cdot \sigma_v) \cdot (\sigma_v \cdot \sigma_u) \\ &= EG - F^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

pues $\sigma_u \otimes \sigma_v \neq 0$

Gracias a esta última igualdad

$$\begin{aligned} A_\sigma(R) &= \int_R \|\sigma_u \otimes \sigma_v\| du dv \\ &= \int_R (EG - F^2)^{1/2} du dv \end{aligned}$$

El área es invariante bajo reparametrizaciones

Teorema.

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable

$$\sigma: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \sigma(u)$$

una parametrización de S y $R \subseteq U$. Sea

$$\tilde{\sigma}: \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{\sigma}(\tilde{u})$$

una reparametrización de σ ; con mapa de reparametrización $\varphi: \tilde{U} \rightarrow U$. Se tiene que

$$A_\sigma(R) = \int_{\tilde{R}} \|\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \otimes \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}\| du dv$$

donde $\tilde{R} = \varphi^{-1}(R)$

Demostración

Nuestro mapa de reparametrización

$$\begin{aligned} \varphi: \tilde{U} &\rightarrow U \\ (\tilde{u}, \tilde{v}) &\mapsto \varphi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u, v) \end{aligned}$$

es tal que

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \otimes \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = \det(J(\varphi)) \sigma_u \otimes \sigma_v$$

como φ es suave

Gracias a la fórmula de cambio de variables para integrales dobles, se sigue que

$$\begin{aligned} A_{\sigma}(\tilde{R}) &= \int_{\tilde{R}} \|\sigma_u \otimes \sigma_v\| \, d\tilde{u} \, d\tilde{v} \\ &= \int_R \det(J(\psi)) \|\sigma_u \otimes \sigma_v\| \, d\tilde{u} \, d\tilde{v} \\ &= \int_R \|\sigma_u \otimes \sigma_v\| \, d\tilde{u} \, d\tilde{v} \\ &= A_{\sigma}(R) \end{aligned}$$

Así, el concepto de área es independiente de la parametrización que se elija.

Mapas que preservan el área

Sean S_1 y S_2 mapas diferenciales y

$$f: S_1 \rightarrow S_2$$

un difeomorfismo. Decimos que f es equiareal cuando preserve áreas de S_1 en S_2 .

Caracterización

Teorema 2.

Sean S_1 y S_2 superficies diferenciables y

$$f: S_1 \rightarrow S_2$$

es un difeomorfismo. Sea σ una parametrización sobre S_1 . Denotamos E_1, F_1, G_1 y E_2, F_2, G_2 los coeficientes de las primeras formas fundamentales de σ y $f \circ \sigma$, respectivamente.

Se tiene que f es equiareal si y solo si

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2$$

Ejemplo: Teorema de Arquímedes

Consideremos la esfera S^2 y el cilindro

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Observamos que

1. La esfera está contenida en el cilindro
2. Estos dos conjuntos tienen como puntos en común aquellos que pertenecen al círculo de centro cero y radio 1 en el plano xy .

Para cada $p \in S^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ existe una única recta paralela al plano xy que contiene al punto p y corta al eje z .

Esta recta corta al cilindro en dos puntos. Denotamos por q a uno de estos puntos, de modo que su distancia a p sea la más pequeña.

Consideremos el mapa

$$\begin{aligned} f: S^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\} &\rightarrow S \\ p &\mapsto f(p) = q \end{aligned}$$

Escribimos

$$p = (x, y, z) \in S^2 \quad q = (X, Y, Z) \in S$$

Puesto que la recta que estamos considerando es paralela al plano xy , tenemos que

$$z = Z$$

y también

$$(X, Y) = \lambda(x, y)$$

para algún escalar λ a determinar

Para ello; puesto que q pertenece al cilindro, notemos que

$$1 = x^2 + y^2 = \lambda^2(x^2 + y^2)$$

de donde se sigue que

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

el cual está bien definido pues $(x, y, z) \in S^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$.

Con estas observaciones vamos a demostrar que

$$f: S^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\} \rightarrow S \\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right)$$

es un mapa equiareal.

Vamos a describir los puntos en $S^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ a través de la parametrización

$$\sigma_1(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta),$$

con dominios

$$U_1 = (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 2\pi) \\ U_2 = (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi, \pi)$$

Para S , tomamos la parametrización

$$\sigma_2(\theta, \varphi) = f \circ \sigma_1(\theta, \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, \sin \theta)$$

con dominios U_1, U_2 . Notemos que esta parametrización describe el cilindro comprendido entre los planos $z=1$ y $z=-1$.

No es difícil demostrar que

$$\{(\sigma_2, U_1), (\sigma_2, U_2)\}$$

es un atlas diferenciable para S .

Calculamos los coeficientes de las primeras formas fundamentales para $S^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ y S , respecto a σ_1 y σ_2 . En este caso, tenemos que

$$E_1 = 1, \quad F_1 = 0, \quad G_1 = \cos^2 \theta,$$

y

$$E_2 = 1, \quad F_2 = 0, \quad G_2 = 1.$$

En consecuencia se sigue que

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2$$

y por lo tanto \approx

Clase, Jueves 29 de julio de 2024

Grandes círculos y círculos pequeños

Un gran círculo, círculo mayor o círculo máximo, sobre S^2 es el círculo que resulta de la intersección de S^2 con un plano que pasa por el origen.

Notemos que este tipo de círculos dividen S^2 en dos hemisferias. Un gran semi-círculo es un semicírculo de un gran círculo.

Los grandes círculos son de centro 0 y radio 1 en \mathbb{R}^3

En cambio, cuando un plano no pasa por el origen y corta S^2 , llamamos a la intersección de este plano con S^2 , círculo pequeño.

Puntos antipodales

Decimos que p, q en S^2 son antipodales cuando

$$p \neq q \quad \text{y} \quad p = -q$$

Los grandes círculos conectan puntos sobre S^2

Proposición 1

Cualquier par de puntos de S^2 , pertenecen a un gran círculo.

Demostración:

Sean $p, q \in S^2$, cualesquiera.

- Caso 1: Supongamos que $p = q$. Basta considerar el gran círculo que resulta de la intersección de S^2 con el plano que pasa por el origen y contiene a p .
- Caso 2: Supongamos que p y q son antipodales. Así, p y q están sobre una misma recta, la cual contiene al origen, por lo tanto, podemos considerar cualquiera de los planos que contengan a esta recta, obteniendo un gran círculo que contiene a p y q .
y no son antipodales
- Caso 3: Supongamos que $p \neq q$. En este caso, $p \otimes q$, por el cual podemos considerar el plano que pasa por el origen y para el cual $p \otimes q$ es ortogonal. La intersección de este plano con S^2 , genera un gran círculo que contiene a p y q .

Proposición 2.

Sean $p, q \in S^2$, distintos:

- 1) Cuando $p \neq -q$, el arco de menor longitud en el gran círculo que pasa por p y q y es la única curva sobre S^2 de menor longitud que une p y q ;
- 2) Cuando p y q son antipodales, cualquier gran semi-círculo uniendo p y q , es la curva sobre S^2 de menor longitud que une p y q .

y por lo tanto,

$$\cos^2 \theta(t) (\varphi'(t))^2 = 0$$

sobre $[t_0, t_1]$. Notemos que $\cos \theta = 0$, solamente en las polos norte y sur, así

$$\varphi' = 0$$

para cada punto sobre \mathcal{C} , lo que nos permite concluir que, ℓ es constante, de manera más específica

$$\varphi = 0$$

para cada punto sobre la curva \mathcal{C} que pasa por p . Esto nos indica que \mathcal{C} es parte de \mathcal{E} .

Grandes círculos; las nuevas «rectas»

El resultado anterior nos indica que los grandes círculos sobre S^2 son los análogos a las rectas en el espacio euclidiano.

Un ser vivo que habite esta esfera S^2 , y que no este consciente de que su mundo es un subconjunto de \mathbb{R}^3 , puede recorrer la distancia mínima de un punto a otro sobre la esfera, siguiendo el arco más pequeño del gran círculo que une a dichos puntos.

En este caso, notemos que no hay rectas paralelas, pues cualesquier par de grandes círculos siempre se intersecan.

Noticia: S^2 tiene su propia geometría.

Geometría esférica

Sobre S^2 , con esta nueva geometría esférica, definiremos el mapa

$$d_{S^2}: S^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) \mapsto d_{S^2}(p, q),$$

donde $d_{S^2}(p, q) \in [0, \pi]$ es el ángulo tal que

$$\cos d_{S^2}(p, q) = p \cdot q$$

así $d_{S^2}(p, q)$ es la longitud de arco más pequeño del gran círculo que une p y q

¿Es d_{S^2} una métrica sobre S^2 ?

Recordemos que la proyección estereográfica

$$\pi: S^2 \setminus \{n\} \rightarrow \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

es una transformación conforme, a la cual vamos a realizar varios cambios.

En lugar de \mathbb{R}^2 , consideremos el plano complejo \mathbb{C} . Escribimos

$$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

al cual le llamamos: plano complejo extendido. Así

$$\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$$

es una biyección, al tener $\pi(n) = \infty$.

Demostración:

Para S^2 , consideremos la parametrización longitud-latitud

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

la cual posee la primera forma fundamental

$$d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2 \quad (1)$$

Notemos que cualquier rotación de S^2 establece una isometría local de S^2 consigo misma, por tanto, su primera forma fundamental será

$$d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2.$$

Gracias a esta observación, podemos asumir que $p = (0, 0, 1)$ y, por medio de una rotación más alrededor del eje z de ser necesario, que q pertenece al gran círculo \mathcal{C} que pasa por los puntos $p = (0, 0, 1)$ (pdo sur) y $(1, 0, 0)$.

Supongamos que q se ubica en el plano xy . Por tanto, existe $\alpha \in [0, \pi/2[$ tal que

$$q = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$$

y así, la longitud del arco más pequeño sobre \mathcal{C} que une p y q es

$$\frac{\pi}{2} - \alpha \quad (2)$$

Además, cualquier curva γ sobre S^2 que une p y q es tal que

$$p = \gamma'(t_0) \quad \text{y} \quad q = \gamma'(t_1)$$

para ciertos $t_0, t_1 \in \text{Dom}(\gamma)$ y su longitud viene dada por

$$\int_{t_0}^{t_1} [\theta'(t)^2 + \cos^2 \theta(t) \varphi'(t)^2]^{1/2} dt \quad (3)$$

gracias a (1). Notemos que

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \int_{t_0}^{t_1} \theta'(t) dt \leq \int_{t_0}^{t_1} [\theta'(t)^2 + \cos^2 \theta(t) \varphi'(t)^2]^{1/2} dt \quad (4)$$

en donde

$$\int_{t_0}^{t_1} \theta'(t) dt = \int_{\alpha}^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (5)$$

pues $\theta'(t) dt = d\theta$.

Combinando (2), (4) y (5), concluimos que la curva con menos longitud que une p y q es el arco más pequeño del gran círculo que contiene a p y q . Si γ es una superficie sobre S^2 que une a p y q , cuya longitud (3) es igual a

$$\frac{\pi}{2} - \alpha,$$

entonces

$$[\theta'(t)^2 + \cos^2 \theta(t) \varphi'(t)^2]^{1/2} = |\theta'(t)| \quad \text{para cada } t \in [t_0, t_1],$$

Por lo tanto, para cada $p, q \in \mathbb{S}^2$, existen $w, z \in \mathbb{C}_\infty$ únicas tales que

$$p = \pi^{-1}(w) \quad \text{y} \quad q = \pi^{-1}(z)$$

Con esta identificación obtenemos

$$d_{\mathbb{S}^2}(w, z) = d_{\mathbb{S}^2}(\pi^{-1}(w), \pi^{-1}(z)) = d_{\mathbb{S}^2}(p, q)$$

Proposición 3

Para cualquier par de puntos $w, z \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\tan \frac{1}{2} d_{\mathbb{S}^2}(w, z) = \left| \frac{w - z}{1 + \bar{w}z} \right|$$

Clase · martes 3 de agosto de 2021

Geometría esférica.

Para cualquier par de puntos $w, z \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\tan \frac{1}{2} d_{\mathbb{S}^2}(w, z) = \frac{|w - z|}{|1 + \bar{w}z|}$$

Demostración:

Sabemos que a cada $w \in \mathbb{C}$ le corresponde el punto

$$\pi^{-1}(w) = \left(\frac{w + \bar{w}}{|w|^2 + 1}, \frac{w - \bar{w}}{i(|w|^2 - 1)}, \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} \right)$$

en \mathbb{S}^2 .

Por tanto, para cada $w, z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \cos d_{\mathbb{S}^2}(w, z) &= \pi^{-1}(w) \cdot \pi^{-1}(z) \\ &= \frac{1}{(|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)} \left((w + \bar{w})(z + \bar{z}) - (w - \bar{w})(z - \bar{z}) + (|w|^2 - 1)(|z|^2 - 1) \right) \\ &= \frac{1}{(|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)} \left(2(\bar{w}z + w\bar{z}) + (1 - |w|^2)(1 - |z|^2) \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Escribimos

$$t = \frac{|w - z|}{|1 + \bar{w}z|}$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{1 - t^2}{1 + t^2} &= \frac{|1 + \bar{w}z|^2 - |w - z|^2}{|1 + \bar{w}z|^2 + |w - z|^2} \\ &= \frac{(1 + \bar{w}z)(1 + \bar{w}\bar{z}) - (w - z)(\bar{w} - \bar{z})}{(1 + \bar{w}z)(1 + \bar{w}\bar{z}) - (w - z)(\bar{w} - \bar{z})} \\ &= \frac{2(\bar{w}z + w\bar{z}) + (1 - |w|^2)(1 - |z|^2)}{(1 + |w|^2)(1 + |z|^2)} \end{aligned} \quad (2)$$

Al comparar (1) y (2), se sigue que

$$\cos d_{\mathbb{S}^2}(w, z) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Al combinar esta última identidad, con la identidad trigonométrica

$$\cos \beta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\beta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\beta}{2}}, \quad = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

se obtiene que

$$\tan \frac{1}{2} d_{\mathbb{S}^2}(w, z) = \frac{|w-z|}{|1+\bar{w}z|} = t$$

Corolario.

$(\mathbb{S}^2, d_{\mathbb{S}^2})$ es un espacio métrico.

Círculos esféricos.

Dados $p \in \mathbb{S}^2$ y $R > 0$, un círculo esférico de centro p y radio R , es el conjunto

$$\{q \in \mathbb{S}^2 : d_{\mathbb{S}^2}(q, p) = R\}$$

En caso de que $R \in [0, \pi/2]$, se tiene que:

1. El círculo esférico de centro p y radio R , es un círculo euclidiano de radio $\sin R$
2. El área de un círculo esférico de radio R está dado por

$$2\pi(1 - \cos R)$$

¿Qué se puede decir cuando $R > \pi/2$?

Triángulos esféricos

Un triángulo esférico es un triángulo en \mathbb{S}^2 , cuyos vértices son puntos \mathbb{S}^2 y sus lados son arcos de grandes círculos conectando esos puntos.

En adelante, consideraremos triángulos para los cuales la longitud de sus lados es menor o igual a π

Puesto que los grandes círculos son curvas sobre \mathbb{S}^2 , cada par de lados de un triángulo esférico encierran un ángulo

¿Qué representan estos objetos?

Consideremos un triángulo esférico de vértices $a, b, c \in \mathbb{S}^2$

Denotemos A, B, C la longitud de arco de grandes círculos que unen b y c , a y c , a y b respectivamente

Sean α, β, γ los ángulos opuestos a los arcos de longitud A, B y C , respectivamente

Sabemos que

- A es el ángulo (en radianes) formado por los vectores unitarios b y c ;
- B es el ángulo (en radianes) formado por los vectores unitarios c y a ; y

• C es el ángulo (en radianes) formado por los vectores unitarios a y b.

Por lo tanto,

$$\begin{cases} \cos A = b \cdot c \\ \cos B = a \cdot c \\ \cos C = a \cdot b \end{cases} \quad (3)$$

Consideremos el arco de longitud C, parte del gran círculo que une a y b, el cual resulta de la intersección de S^2 y el plano que pasa por el origen y es ortogonal a $a \times b$, al cual denotamos P_c .

De manera análoga, podemos definir P_a y P_b como planos que pasan por el origen y son ortogonales a $b \times c$ y $a \times c$, respectivamente.

Consideremos también el plano paralelo al plano tangente en S^2 en c y lo llamamos P_c .

El plano P_c interseca a los planos P_a y P_b , formando dos rectas tangentes a cada uno de los lados del triángulo esférico que pasan por c.

El ángulo γ corresponde al ángulo formado por estas dos rectas, el cual es el ángulo entre P_a y P_b , es decir, el ángulo entre $b \otimes c$ y $a \otimes c$.

Así,

$$\cos \gamma = \frac{(b \otimes c) \cdot (a \otimes c)}{\|b \otimes c\| \cdot \|a \otimes c\|} \quad (4)$$

Por un razonamiento similar, se sigue que

$$\cos \alpha = \frac{(a \otimes b) \cdot (a \otimes c)}{\|a \otimes b\| \cdot \|a \otimes c\|} \quad (5)$$

y

$$\cos \beta = \frac{(b \otimes a) \cdot (b \otimes c)}{\|b \otimes a\| \cdot \|b \otimes c\|} \quad (6)$$

Por otro lado, puesto que a, b, c son vectores unitarios, tenemos que

$$\begin{cases} \sin A = \|b \otimes c\| \\ \sin B = \|a \otimes c\| \\ \sin C = \|a \otimes b\| \end{cases} \quad (7)$$

Puesto que

$$(u \otimes w) \cdot (v \otimes w) = (v \cdot u)(w \cdot w) - (u \cdot w)(v \cdot w) \quad \text{para } u, v, w \in \mathbb{R}^3$$

junto con (3), (4), (5), (6) y (7), obtenemos las ecuaciones

$$\cos \gamma = \frac{\cos C - \cos A \cos B}{\sin A \sin B}$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos A - \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

$$\cos \beta = \frac{\cos B - \cos C \cos A}{\sin C \sin A}$$

a las cuales se les denomina leyes de cosenos.

Recordemos también que

$$(u \otimes v) \cdot w = (u \otimes w) \cdot (v \otimes w) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}^3$$

Notemos que

$$\text{sen } d = \frac{\|(a \times b) \times (a \times c)\|}{\text{sen } C \text{ sen } B} = \frac{|(a \times c) \cdot b|}{\text{sen } C \text{ sen } B}$$

$$\frac{\text{sen } d}{\text{sen } A} = \frac{|(a \times c) \cdot b|}{\text{sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C}$$

Puesto que

$$|(a \times c) \cdot b| = |(a \times b) \cdot c| = |(b \times c) \cdot a|,$$

se sigue que

$$\frac{\text{sen } d}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } C}$$

conocida como regla de senos

Nota.

La ley de cosenos de triángulos esféricos recibe su nombre gracias a que cuando A, B, C son pequeños, los arcos de grandes círculos cuya longitud es A, B, C se aproximan a rectas.

$$\cos(\cdot) \approx 1 - \frac{1}{2}(\cdot)^2 \quad \text{y} \quad \text{sen}(\cdot) \approx (\cdot),$$

de modo que

$$C^2 \approx A^2 + B^2 - 2AB \cos \alpha$$

la cual corresponde a la regla de cosenos en el plano euclidiano.

Lema 1 - Pitágoras -

Sea $\Delta(a, b, c)$ un triángulo esférico de modo que los arcos que unen b y c , a y c , a y b , miden A, B y C respectivamente. Si el ángulo opuesto a C es de $\pi/2$, entonces

$$\cos C = \cos A \cos B$$

Clase - jueves 5 de agosto de 2021

Segunda forma fundamental

Consideremos una superficie diferenciable $S \subseteq \mathbb{R}^3$, $p \in S$ y

$$\sigma: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3(u)$$

una parametrización de S tal que $p \in \sigma(u)$. Recordemos que la unidad normal estándar

$$N_\sigma = \frac{\sigma_u \otimes \sigma_v}{\|\sigma_u \otimes \sigma_v\|} = N$$

es ortogonal al plano $T_p S$.

Puesto que $p \in \sigma(U)$, existe $(u_0, v_0) \in U$ tal que

$$\sigma(u_0, v_0) = p.$$

Como U es abierto y σ es un homeomorfismo, podemos considerar $(h_1, h_2) \in U$ tal que

$$\sigma(u_0 + h_1, v_0 + h_2) \in \sigma(U) \subseteq S.$$

Notemos que el punto $\sigma(u_0 + h_1, v_0 + h_2) \in S$ no pertenece a $T_p S$, más bien se aleja. ¿Qué tanto?

$$|(\sigma(u_0 + h_1, v_0 + h_2) - \sigma(u_0, v_0)) \cdot N|.$$

Usando el desarrollo en series de Taylor, de segundo orden, vemos que

$$\sigma(u_0 + h_1, v_0 + h_2)$$

$$= \sigma(u_0, v_0) + \sigma_u(u_0, v_0) h_1 + \sigma_v(u_0, v_0) h_2 + \frac{1}{2} (\sigma_{uu}(u_0, v_0) h_1^2 + 2\sigma_{uv}(u_0, v_0) h_1 h_2 + \sigma_{vv}(u_0, v_0) h_2^2) + \text{error},$$

en donde

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{error}}{\|(h_1, h_2)\|} = 0.$$

Con estas fórmulas, el punto $p(u_0 + h_1, v_0 + h_2) \in S$ se aleja de $T_p S$ la cantidad

$$(\sigma_u(u_0, v_0) h_1 + \sigma_v(u_0, v_0) h_2 + \frac{1}{2} (\sigma_{uu}(u_0, v_0) h_1^2 + 2\sigma_{uv}(u_0, v_0) h_1 h_2 + \sigma_{vv}(u_0, v_0) h_2^2) + \text{error}) \cdot N$$

y puesto que N es ortogonal a $\sigma_u(u_0, v_0)$ y $\sigma_v(u_0, v_0)$, la anterior expresión se reduce a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\sigma_{uu}(u_0, v_0) h_1^2 + 2\sigma_{uv}(u_0, v_0) h_1 h_2 + \sigma_{vv}(u_0, v_0) h_2^2) + \text{error} \\ &= \frac{1}{2} (L h_1^2 + 2M h_1 h_2 + N h_2^2) + \text{error}, \end{aligned}$$

donde

$$L = \sigma_{uu} \cdot N,$$

$$M = \sigma_{uv} \cdot N$$

$$\text{y } N = \sigma_{vv} \cdot N.$$

Como la expresión

$$L h_1^2 + 2M h_1 h_2 + N h_2^2$$

nos ayuda a medir que tanto nuestra superficie no es un plano, también nos ayuda a tener una idea del concepto de curvatura. Llamamos a

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

la segunda forma fundamental de S para la parametrización σ en el punto p

Ejemplo:

Recordemos que cuando $a \in \mathbb{R}^n$ es un punto en el plano $S \subseteq \mathbb{R}^3$, y p, q son vectores

unitarios, paralelos al plano y ortogonales entre sí, S es una superficie diferenciable con parametrización

$$\begin{aligned} \sigma: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \sigma(u, v) = a + up + vq \end{aligned}$$

En este caso

$$\sigma_u = p \quad \text{y} \quad \sigma_v = q$$

y por lo tanto

$$\sigma_{uu} = \sigma_{uv} = \sigma_{vv} = 0,$$

por lo que la segunda forma fundamental del plano S es cero

Ejemplo:

Consideremos la superficie de revolución cuyos puntos tienen la fórmula

$$\sigma(t, \theta) = (f(t)\cos(\theta), f(t)\sin(\theta), g(t))$$

con f, g suaves respecto a t , $f(t) > 0$, $f'(t)^2 + g'(t)^2 = 1$.

En este caso, recordemos que

$$E = \|\sigma_t\|^2 = f'(t)^2 + g'(t)^2 = 1, \quad F = \langle \sigma_t, \sigma_\theta \rangle = 0 \quad \text{y} \quad G = \|\sigma_\theta\|^2 = f(t)^2$$

por lo cual la primera forma fundamental de esta superficie de revolución es

$$dt^2 + f(t)^2 d\theta^2$$

Puesto que

$$\sigma_t(t, \theta) = (f'(t)\cos\theta, f'(t)\sin\theta, g'(t))$$

$$\sigma_\theta(t, \theta) = (-f(t)\sin\theta, f(t)\cos\theta, 0)$$

$$\sigma_t \otimes \sigma_\theta = (-f(t)g'(t)\cos\theta, -f(t)g'(t)\sin\theta, f(t)f'(t))$$

$$\|\sigma_t \otimes \sigma_\theta\| = f(t),$$

se sigue que

$$L = f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t),$$

$$M = 0,$$

$$N = f(t)g'(t),$$

por lo cual, la segunda forma fundamental de esta superficie de revolución es

$$(f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)) dt^2 + f(t)g'(t) d\theta^2$$

Ejemplo.

Para S^2 con su parametrización latitud-longitud, su primera y segunda forma fundamentales son

$$d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2$$

Lema 1.

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable, $p \in S$ y $\sigma: U \rightarrow \sigma(U)$ una parametrización tal que $p \in \sigma(U)$. Se tiene que

$$N_u \cdot \sigma_u = -L$$

$$N_u \cdot \sigma_v = N_v \cdot \sigma_u = -M$$

$$N_v \cdot \sigma_v = -N,$$

donde

$$N_u = \partial_u N$$

y

$$N_v = \partial_v N$$

Demostración.

Puesto que los vectores σ_u y σ_v son tangentes a S , se tiene que $N \cdot \sigma_u = N \cdot \sigma_v = 0$.

Por lo tanto,

$$N_u \cdot \sigma_u + N \cdot \sigma_{uu} = 0,$$

$$N_v \cdot \sigma_u + N \cdot \sigma_{uv} = 0,$$

$$N_u \cdot \sigma_v + N \cdot \sigma_{vu} = 0,$$

$$N_v \cdot \sigma_v + N \cdot \sigma_{vv} = 0.$$

en donde, recordemos

$$L = \sigma_{uu} \cdot N$$

$$M = \sigma_{uv} \cdot N$$

$$N = \sigma_{vv} \cdot N,$$

de donde sigue el resultado

Clase • martes 10 de agosto de 2021

Mapas de Gauss y de Weingarten.

Dada una superficie diferenciable $S \subseteq \mathbb{R}^3$, consideremos el mapa ζ_S (entre superficies diferenciables)

$$\zeta_S: S \rightarrow \mathbb{S}^2$$

$$p \mapsto \zeta_S(p) = N_p,$$

donde N_p denota la unidad normal estándar

$$N_\sigma := N_p$$

en p . llamamos a ζ_S el mapa de Gauss de S .

Usando el mapa de Gauss de una superficie S , podemos representar la variación de N_σ , a través de la derivada de ζ_S , es decir, el mapa,

$$D_p \zeta_S: T_p S \rightarrow T_{\zeta_S(p)} \mathbb{S}^2,$$

para cada $p \in S$. Así,

$$W_{p,S} : T_p S \longrightarrow T_{\xi_S(p)} S^2$$

$$v \longmapsto W_{p,S}(v) = -D_p \xi_S(v)$$

está bien definido, y lo llamamos *mapa de Weingarten de S*.

Al mapa bilineal

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{p,S} : T_p S \times T_p S \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle_{p,S} = \langle W_{p,S}(v), w \rangle$$

le llamamos la *segunda forma fundamental de S en p*.

Proposición 1.

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable, $p \in S$, $\sigma : U \rightarrow \sigma(U)$ una parametrización tal que $p \in \sigma(U)$, y

$$L du^2 + 2H du dv + N dv^2$$

la segunda forma fundamental de S para la parametrización σ en p. Se tiene que

$$\langle w, z \rangle_{p,S} = B(w, z) \quad \forall w, z \in T_p S,$$

en donde

$$B : T_p S \times T_p S \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(w, z) \longmapsto B(w, z) = L du(w) du(z) + N dv(z) dv(z) + H (du(w) dv(z) + dv(z) du(w)).$$

Demostración

Puesto que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{p,S}$ y B son mapas bilineales y simétricos, nos basta con verificar su igualdad en $\{\sigma_u, \sigma_v\}$, base de $T_p S$.

Sabemos que

$$du(\sigma_u) = dv(\sigma_v) = 1 \quad \text{y} \quad du(\sigma_v) = dv(\sigma_u) = 0,$$

por lo tanto

$$B(\sigma_u, \sigma_u) = L,$$

$$B(\sigma_v, \sigma_v) = N,$$

$$B(\sigma_u, \sigma_v) = B(\sigma_v, \sigma_u) = H,$$

lo cual nos indica que es suficiente probar que

$$\langle \sigma_u, \sigma_u \rangle_{p,S} = L, \quad \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle_{p,S} = N \quad \text{y} \quad \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle_{p,S} = H.$$

Puesto que $p \in \sigma(U)$, existen $(u_0, v_0) \in U$, tales que

$$p = \sigma(u_0, v_0).$$

Consideremos las curvas de parámetros

$$\sigma(u_0, t) \quad \text{y} \quad \sigma(t, v_0)$$

sobre S, y sus correspondientes curvas sobre S^2 a través del mapa de Gauss

$$\xi_S(\sigma(u_0, v)) \quad \text{y} \quad \xi_S(\sigma(u, v_0))$$

Así,

$$W_{p,S}(\sigma_u(u_0, v_0)) = - \frac{d}{du} \Big|_{u=u_0} \zeta_S(\sigma(u, v_0))$$

$$= - \frac{d}{du} \Big|_{u=u_0} \mathbf{N}(u, v_0) = - \mathbf{N}_u$$

$$W_{p,S}(\sigma_v(u_0, v_0)) = - \frac{d}{dv} \Big|_{v=v_0} \zeta_S(\sigma(u_0, v))$$

$$= - \frac{d}{dv} \Big|_{v=v_0} \mathbf{N}(u_0, v) = - \mathbf{N}_v$$

y en consecuencia

$$\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle_{p,S} = - \mathbf{N}_u \cdot \sigma_u = L$$

De manera análoga, se obtiene

$$\langle \sigma_v, \sigma_v \rangle_{p,S} = N$$

y

$$\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle_{p,S} = \langle \sigma_v, \sigma_u \rangle_{p,S} = H$$

lo cual, concluye nuestra demostración.

Corolario 1

La segunda forma fundamental de una superficie diferenciable es una aplicación bilineal simétrica. En adición, el mapa de Weingarten es autoadjunto.

Curvaturas normal y geodésica

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientada y γ una curva de rapidez unitaria sobre S . Recordemos que γ' es un vector tangente a la superficie S , y por lo tanto, ortogonal a \mathbf{N} .

De este modo, γ' , \mathbf{N} y $\mathbf{N} \otimes \gamma'$ son mutuamente ortogonales. En adición, puesto que

$$\gamma' \cdot \gamma' = 1$$

sabemos que

$$\gamma' \cdot \gamma'' = 0$$

lo cual nos indica que γ'' pertenece al plano generado por \mathbf{N} y $\mathbf{N} \otimes \gamma'$.

Así, existen dos números k_n y k_g tales que

$$\gamma'' = k_n \mathbf{N} + k_g \mathbf{N} \otimes \gamma'$$

a los cuales llamamos curvatura normal y curvatura geodésica de γ , respectivamente.

Recordemos que cuando γ es regular, pero no de rapidez unitaria, siempre existe una reparametrización de rapidez unitaria (en el parámetro longitud de arco), con la cual podemos trabajar.

Proposición 2

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientable y γ una curva de rapidez unitaria sobre S . Se tiene que

$$\begin{aligned}K_n &= \gamma'' \cdot N \\K_g &= \gamma'' \cdot (N \otimes \gamma') \\K^2 &= K_n^2 + K_g^2 \\K_n &= K \cos \psi \\K_g &= |K \sin \psi|\end{aligned}$$

donde

$$K = \|\gamma''\|$$

es la curvatura de γ y ψ es el ángulo entre N y el vector normal principal de γ .

Proposición 3

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y γ una curva de rapidez unitaria sobre S a través de $p \in S$. Se tiene que

$$K_n = \langle \gamma', \gamma' \rangle_{p,S}$$

Además, si

$$\sigma: U \rightarrow S$$

es una parametrización de S y

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$$

es una curva en $\sigma(u) \ni p$, entonces

$$K_n = 2u'^2 + 2Huv'v' + Nv'^2$$

Demostración:

Puesto que

$$N \cdot \gamma' = 0,$$

se sigue que

$$N \cdot \gamma'' + N \cdot \gamma''' = 0,$$

en donde

$$N' = \frac{d}{dt} \tilde{g}_S(\gamma'(t)) = -W_{p,S}(\gamma'(t))$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}K_n &= \gamma'' \cdot N \\&= -N' \cdot \gamma' \\&= W_{p,S}(\gamma') \cdot \gamma' \\&= \langle \gamma', \gamma' \rangle_{p,S} = B(\gamma', \gamma').\end{aligned}$$

De esta última identidad, junto con la proposición 1, obtenemos que

$$K_n = 2u'^2 + 2Huv'v' + Nv'^2$$

¡Atención!

El resultado anterior nos indica que la curvatura normal depende de la segunda forma fundamental de una superficie diferenciable.

En contraste, si $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientable y

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$$

es una curva de rapidez unitaria sobre S a través de $p \in S$, entonces

$$k_g = (v''u' - v'u'') \sqrt{EG - F^2} + Au'^3 + B2u'^2v' + Cu'v'^2 + Dv'^3,$$

donde A, B y C son cantidades

Clase • jueves 12 de agosto de 2021

Teorema 1 (Meusnier)

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientable, $p \in S$ y v un vector unitario tangente a S en p . Denotamos por

$$\Pi_\theta$$

al plano que contiene a la recta que pasa por p , paralela a v y que forma un ángulo θ con el plano tangente $T_p S$.

Supongamos que Π_θ no es paralelo a $T_p S$, y que interseca a S , generando una curva regular α sobre S con curvatura k_α . Se tiene que

$$k_n = k_g \sin \theta$$

no depende de θ .

Demostración

Puesto que α es regular, admite una reparametrización de rapidez unitaria a la cual denotamos por γ_θ . Así

$$\gamma_\theta' = v \quad \text{o} \quad \gamma_\theta' = -v$$

por lo cual γ_θ'' es ortogonal a v y paralelo a Π_θ .

En consecuencia, el ángulo ψ entre la unidad normal estándar y el vector normal principal es

$$\frac{\pi}{2} - \theta.$$

Por lo tanto,

$$k_n = k_g \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = k_g \sin \theta$$

en donde k_n depende únicamente de p y v , pero no de θ

Corolario

Bajo las hipótesis del teorema de Meusnier, tomemos

$$\theta = \pi/2$$

$$0$$

$$\theta = -\pi/2$$

(en este caso decimos que γ es una sección normal de S). Se tiene que

$$K_g = 0$$

y

$$K_n = K$$

o

$$K_n = -K$$

Campo de vectores

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

una curva sobre S . Decimos que V es un campo de vectores tangente a lo largo de γ , cuando V es un mapa diferenciable sobre un intervalo abierto $(a,b) \subseteq I$ en \mathbb{R}^3 , tal que

$$V(t) \in T_{\gamma(t)} S$$

$$\forall t \in (a,b).$$

Reflexionemos.

Supongamos que un vehículo se desplaza sobre la línea ecuatorial de la tierra (entendida como S^2), con una rapidez constante. Para el conductor del vehículo, la carretera es recta, no tiene que girar hacia la derecha o izquierda para continuar. Así, su vector velocidad, no sólo su rapidez, es constante. Sin embargo, un observador ubicado en el espacio se daría cuenta de que el vector velocidad del vehículo no es constante, pues este se está desplazando por un gran círculo de la esfera.

¿Qué está pasando?

Lo que sucede es que el conductor percibe únicamente la componente tangencial de la aceleración, mientras que el observador percibe las componentes tangencial y normal de la aceleración.

Derivada covariante.

En general, si consideramos una superficie diferenciable $S \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

una curva sobre S y V un campo de vectores tangente a lo largo de γ , el conductor de un vehículo que se desplaza sobre S siguiendo γ , percibe la componente tangencial del radio de cambio de V , es decir, la proyección ortogonal de V' sobre $T_{\gamma(t)} S$. En cambio, si N es la unidad normal estándar (respecto a una parametrización $\sigma: U \rightarrow \sigma(U)$), la componente normal del radio de cambio de V está dada por

$$(V' \cdot N) \cdot N$$

(la proyección ortogonal de V' sobre el subespacio vectorial generado por N)

En consecuencia, la componente tangencial del radio de cambio de V es

$$\nabla_{\gamma'} V = V' - (V' \cdot N) \cdot N,$$

a la cual llamamos derivada covariante de V a lo largo de γ .

Recordemos que N puede cambiar de signo al usar reparametrizaciones, sin embargo, esto no afecta el valor de $\nabla_{\gamma'} V$, por lo cual, la derivada covariante está bien definida sobre superficies orientadas y no orientadas.

Decimos que V es covariante constante o que es paralelo a lo largo de γ , cuando

$$\nabla_{\gamma} V = 0$$

sobre cada punto de γ .

Proposición 1.

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable, γ una curva sobre S y V un campo de vectores tangente a lo largo de γ . Se tiene que V es paralelo a lo largo de γ si y solo si V' es ortogonal al plano tangente a S en todos los puntos de γ .

Demostración

Notemos que

$$\nabla_{\gamma} V = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (V' \cdot N) N = V' \quad (1)$$

Si V es paralelo a lo largo de γ , gracias a (1) vemos que V' es colineal a N , y por tanto ortogonal al plano tangente a S en cada punto de γ .

En cambio, si V' es ortogonal al plano tangente a S en todos los puntos de γ , entonces

$$V' = a N$$

para algún $a \in \mathbb{R}$. Así,

$$\nabla_{\gamma} V = a N - (a N \cdot N) \cdot N = 0,$$

pues N es unitario.

Teorema.

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable, $\sigma: U \rightarrow \sigma(u)$ una parametrización de S y

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad \text{y} \quad L du^2 + 2H du dv + N dv^2$$

la primera y segunda formas fundamentales de S respecto a σ . Se tienen las ecuaciones de Gauss

$$\sigma_{uu} = \Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + L N,$$

$$\sigma_{uv} = \Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v + H N,$$

$$\sigma_{vv} = \Gamma_{22}^1 \sigma_u + \Gamma_{22}^2 \sigma_v + N N.$$

en donde

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{G E_u - 2F F_u + F E_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2E F_u - E E_v - F E_u}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{G E_v - F G_u}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{E G_v - F E_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2G F_v - G G_u - F G_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{E G_v - 2F F_v + F G_u}{2(EG - F^2)}$$

a los cuales los llamamos coeficientes de Christoffel

Demostración:

Puesto que $\{\sigma_u, \sigma_v, \mathbf{N}\}$ es una base para \mathbb{R}^3 , sabemos que existen $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ con $i=1,2,3$, tales que

$$\sigma_{uu} = a_1 \sigma_u + a_2 \sigma_v + a_3 \mathbf{N} \quad (2)$$

$$\sigma_{uv} = b_1 \sigma_u + b_2 \sigma_v + b_3 \mathbf{N} \quad (3)$$

$$\sigma_{vv} = c_1 \sigma_u + c_2 \sigma_v + c_3 \mathbf{N} \quad (4)$$

Al multiplicar (2), (3) y (4) con \mathbf{N} , obtenemos

$$a_3 = \sigma_{uu} \cdot \mathbf{N} = L,$$

$$b_3 = \sigma_{uv} \cdot \mathbf{N} = M,$$

$$c_3 = \sigma_{vv} \cdot \mathbf{N} = N$$

Por otro lado, al multiplicar (2) con σ_u y σ_v , se sigue que

$$\begin{aligned} \sigma_{uu} \cdot \sigma_u &= a_1 \sigma_u \sigma_u + a_2 \sigma_v \sigma_u + a_3 \mathbf{N} \sigma_u \\ &= a_1 E + a_2 F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{uu} \cdot \sigma_v &= a_1 \sigma_u \cdot \sigma_v + a_2 \sigma_v \cdot \sigma_v + a_3 \mathbf{N} \sigma_v \\ &= a_1 F + a_2 G \end{aligned}$$

gracias al cual obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1 E + a_2 F = \sigma_{uu} \cdot \sigma_u = \frac{1}{2} E_u \\ a_1 F + a_2 G = \sigma_{uu} \cdot \sigma_v = \frac{1}{2} E_v \end{cases}$$

el cual tiene como solución a $a_1 = \Gamma_{11}^1$ y $a_2 = \Gamma_{11}^2$

De manera similar, se pueden deducir los otros dos sistemas de ecuaciones al multiplicar (3), (4)

Clase • martes 17 de agosto de 2021

Proposición 1

Sean S una superficie diferenciable

$$\sigma: U \rightarrow \sigma(U) \subseteq S$$

una parametrización de S y γ una curva sobre S tal que $\gamma \subseteq \sigma(U)$. Sea

$$\gamma(t) = \alpha(t) \sigma_u + \beta(t) \sigma_v$$

un campo de vectores tangente a lo largo de γ . Se tiene que V es paralelo a lo largo de γ si y solo si

$$\begin{cases} \alpha' + (\Gamma_{11}^1 \alpha' + \Gamma_{12}^1 \beta') \alpha + (\Gamma_{12}^2 \alpha' + \Gamma_{22}^1 \beta') \beta = 0, \\ \beta' + (\Gamma_{11}^2 \alpha' + \Gamma_{12}^2 \beta') \alpha + (\Gamma_{12}^2 \alpha' + \Gamma_{22}^2 \beta') \beta = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Demostración
Usando las ecuaciones de Gauss obtenemos

$$\begin{aligned}
 V'(t) &= (d\sigma_u + \beta d\sigma_v)' \\
 &= d'\sigma_u + \alpha d'\sigma_u + \beta'\sigma_v + \beta d\sigma_v' \\
 &= d'\sigma_u + \beta'\sigma_v + \alpha(\sigma_{uu}u' + \sigma_{uv}v') + \beta(\sigma_{uv}u' + \sigma_{vv}v') \\
 &= d'\sigma_u + \beta'\sigma_v \\
 &\quad + \alpha(\Gamma_{11}\sigma_u + \Gamma_{12}\sigma_v + L\mathbf{N})u' + \alpha(\Gamma_{12}\sigma_u + \Gamma_{22}\sigma_v + H\mathbf{N})v' \\
 &\quad + \beta(\Gamma_{12}\sigma_u + \Gamma_{22}\sigma_v + H\mathbf{N})u' + \beta(\Gamma_{22}\sigma_u + \Gamma_{22}\sigma_v + N\mathbf{N})v' \\
 &= (\alpha' + \alpha(\Gamma_{11}u' + \Gamma_{12}v')) + \beta(\Gamma_{12}u' + \Gamma_{22}v'))\sigma_u \\
 &\quad + (\beta' + \alpha(\Gamma_{12}u' + v'\Gamma_{12}) + \beta(\Gamma_{12}u' + \Gamma_{22}v'))\sigma_v \\
 &\quad + (\alpha L\mathbf{N} + \beta H\mathbf{N})u' + (\alpha H\mathbf{N} + \beta N\mathbf{N})v'
 \end{aligned} \tag{2}$$

Recordemos que V es paralelo a lo largo de la curva γ si y solo si V' es ortogonal al plano tangente a S en todos los puntos de γ , lo cual equivale a exigir que los coeficientes σ_u y σ_v en (2) sean iguales a cero, lo cual nos conduce al sistema de ecuaciones (1).

Por otro lado, cuando tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (1), lo podemos escribir como

$$\begin{cases} \alpha' = f(\alpha, \beta, t) \\ \beta' = g(\alpha, \beta, t) \end{cases}$$

el cual tiene una única solución α y β , provisto de condiciones iniciales $\alpha(t_0) = \alpha_0$ y $\beta(t_0) = \beta_0$, en un intervalo abierto, vecindad de t_0 . Así, podemos considerar

$$V(t) = \alpha_0 \sigma_u + \beta_0 \sigma_v$$

el cual es un campo de vectores paralelo a α lo largo de γ .

Corolario

Sean γ una curva sobre una superficie S y $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}S$. Existe un único campo de vectores V paralelo a lo largo de γ tal que

$$V(t_0) = v_0$$

Curvaturas Gaussiana y Media

Consideremos una superficie orientada S , $p \in S$ y el mapa de Weingarten

$$W = W_{p,S} = -D_p \mathcal{G}_S,$$

el cual es lineal, así W está asociado a una matriz, respecto a la cual definiremos

$$K := \det(W) \quad \text{y} \quad H = \frac{1}{2} \text{tr}(W),$$

las curvaturas Gaussiana y media de S en p , respectivamente.

Sea $\sigma: U \rightarrow \sigma(U)$ una parametrización de S tal que $p \in \sigma(U)$. Consideremos la primera y segunda forma fundamental de S respecto a σ

$$E du^2 + F du dv + G dv^2 \quad L du^2 + H du dv + N dv^2$$

Consideremos las matrices simétricas

$$\mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}_2 = \begin{pmatrix} L & H \\ H & N \end{pmatrix}$$

Proposición 2.

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientable, $p \in S$ y

$$\sigma: U \rightarrow \sigma(U)$$

una parametrización de S tal que $p \in \sigma(U)$. La matriz asociada a $W_{p,S}$ respecto a la base $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ de $T_p S$ es

$$\tilde{F}_1^{-1} \tilde{F}_2$$

Demostración

Recordemos que

$$W(\sigma_u) = -N_u$$

$$W(\sigma_v) = -N_v$$

así, si

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a W , entonces

$$-N_u = a\sigma_u + b\sigma_v$$

$$-N_v = c\sigma_u + d\sigma_v$$

Al multiplicar estas ecuaciones por σ_u y σ_v obtenemos

$$L = aE + bF, \quad H = aF + bG, \quad H = cE + dF, \quad N = cF + dG$$

de donde, se sigue que

$$\begin{pmatrix} L & H \\ H & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \tilde{F}_1^{-1} \tilde{F}_2$$

Corolario 2

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientable, $p \in S$ y

$$\sigma: U \rightarrow \sigma(U)$$

una parametrización de S tal que $p \in \sigma(U)$. Se tiene que

$$H = \frac{LG - 2HF + NE}{2(EG - F^2)}$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

Ejemplo.

Consideremos la superficie de revolución S alrededor del eje z , generada por la curva de perfil

$$x(t) = (f(t), 0, g(t))$$

con $f > 0$, $f'^2 + g'^2 = 1$. En este caso recordemos que

$$\sigma(t, \theta) = (f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, g(t))$$

describe cada uno de los puntos que pertenecen a S .

En este caso, tenemos que

$$\underbrace{E=1, F=0, G=f^2}_{\text{I}}; \quad \underbrace{L=f'g'' - f''g', H=0, N=fg'}_{\text{II}}$$

$$H = \frac{(f'g'' - f''g')(f^2) - 2(0)(0) + (fg')(1)}{2((1)(f^2) - 0^2)} = \frac{f'g''f^2 - f''g'f^2 + fg'}{2f^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{f'g''}{f} - \frac{f''g'}{f} + \frac{g'}{f} \right)$$

Por tanto

$$K = \frac{(f'g'' - f''g')fg'}{f^2} = \frac{f'g'g'' - f''g'^2}{f^2} = \frac{-f'^2f'' - f''g'^2}{f^2} = \frac{(-f'^2 - g'^2)f''}{f} = -\frac{f''}{f}$$

pues como $f'^2 + g'^2 = 1$,

Además

$$H = \frac{ff' + g'' - ff''g' + g'}{2f}$$

• Cuando $f(t) = t$, $g(t) = 0$, $\gamma(t) = (t, 0, 0)$, $t \geq 0$, S es el plano xy , para el cual

$$H = K = 0;$$

• Cuando $f(t) = 1$, $g(t) = t$, $\gamma(t) = (1, 0, t)$; $t \geq 0$, S es el cilindro circular, para el cual

$$K = 0, \quad \text{y} \quad H = \frac{1}{2};$$

• Cuando $f(t) = \cos t$, $g(t) = \sin t$, $\gamma(t) = (\cos t, 0, \sin t)$, S es la esfera S^2 , para la cual

$$K = 1 \quad \text{y} \quad H = 1.$$

Ejemplo

Cuando S es una superficie reglada que tiene a $\gamma(u)$ como directriz y a $\delta(u)$ como dirección de la recta recordemos que todos los puntos de S están descritos por

$$\sigma(u, t) = \gamma(u) + t\delta(u).$$

En este caso

$$\sigma_{uu} = \gamma'' + t\delta'' \quad \text{y} \quad \sigma_{tt} = \delta,$$

mientras que

$$\sigma_{uu} = \gamma'' + t\delta'', \quad \sigma_{ut} = \delta', \quad \sigma_{tt} = 0$$

Así,

$$K = -\frac{(\delta \cdot \mathbf{N})^2}{EG - F^2} \leq 0.$$

Curvatura Gaussiana

$K > 0$ (Eléfrica)

$K = 0$ (Euclídea)

$K < 0$ (Hiperbólica)

Clase • martes 24 de agosto de 2021

Superficies de curvatura gaussiana constante

Consideremos la superficie de revolución S , con parametrización

$$\sigma(t, \theta) = (f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, g(t))$$

con curva de perfil

$$\gamma(t) = (f(t), 0, g(t))$$

tal que $(f')^2 + (g')^2 = 1$, recordemos que

$$K = -\frac{f''}{f}$$

(1)

Supongamos que K es constante

Caso $K = 0$

De (1), obtenemos la EDO $f'' = 0$, cuya solución es

$$f(t) = at + b$$

para ciertas constantes $a, b \in \mathbb{R}$. Además,

$$(g')^2 = 1 - (f')^2 = 1 - a^2$$

Por tanto,

$$|g'| = \sqrt{1 - a^2}$$

siempre que $|a| < 1$. Así

$$g(t) = \pm \sqrt{1 - a^2} t + c,$$

para cierta constante $c \in \mathbb{R}$.

A través de una traslación, podemos suponer que $c = 0$, mientras que a través de una rotación, de ser necesario, podemos suponer que

$$g(t) = \sqrt{1 - a^2} t$$

Hasta aquí tenemos que

$$\sigma(t, \theta) = ((at + b) \cos \theta, (at + b) \sin \theta, \sqrt{1 - a^2} t)$$

$$= (b \cos \theta, b \sin \theta, 0) + t(a \cos \theta, a \sin \theta, \sqrt{1 - a^2}),$$

lo que nos indica que S es una superficie reglada. De hecho, S es el cilindro circular de ecuación

$$x^2 + y^2 = \frac{a}{1 - a^2} z + b$$

Caso: $k > 0$

Tomemos $R > 0$ tal que

$$k = \frac{1}{R^2}.$$

De (1), obtenemos la EDO homogénea

$$f'' + \frac{1}{R^2} f = 0$$

cuya solución es

$$f(t) = a \cos\left(\frac{t}{R} + b\right),$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, constantes. Consideremos $u = t + Rb$, gracias a lo cual

$$f(u) = a \cos\left(\frac{u}{R}\right)$$

y por lo tanto,

$$(g')^2(u) = 1 + \frac{a^2}{R^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{R}\right).$$

Gracias a esto, podemos tomar

$$g(u) = \int \sqrt{1 + \frac{a^2}{R^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{R}\right)} du.$$

De la teoría de funciones Elementales, esta integral puede ser evaluada cuando $a = R, 0, -R$.

Si $a = 0$, no obtenemos una superficie. Por otro lado, cuando $a = R, -R$, entonces

$$g(u) = R \operatorname{sen}\left(\frac{u}{R}\right).$$

Así, cuando $k > 0$, S es la esfera de centro cero y radio $R > 0$, el cual satisface la ecuación

$$k = \frac{1}{R^2}$$

Caso $k < 0$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $k = -1$. De (1), obtenemos que la EDO homogénea

$$f'' - f = 0.$$

Cuya solución es: $f(t) = ae^t + be^{-t}$, supongamos que $a = 1$ y $b = 0$, por lo cual

$$f(t) = e^t,$$

y así

$$g(t) = \int \sqrt{1 - e^{2t}} dt$$

Lo cual nos obliga a tomar $t \leq 0$.

Además,

$$zt = u$$

$$e^u = \cos \theta$$

$$\begin{aligned} g(t) &= \int \sqrt{1 - e^{2t}} dt \\ &= \int \frac{|\sin \theta| - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\cos \theta} d\theta \\ &= \int \frac{\sin 2\theta}{\cos \theta} d\theta \\ &= \sin \theta - \ln(\sec \theta + \tan \theta) \\ &= \sqrt{1 - e^{2t}} - \ln(e^{-t} + \sqrt{e^{-2t} - 1}), \end{aligned}$$

omitiendo la constante a través de una traslación.

Así, la curva de perfil tiene coordenadas

$$x = e^t \quad z = \sqrt{1 - e^{2t}} - \ln(e^{-t} + \sqrt{e^{-2t} - 1}) = \sqrt{1 - x^2} - \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right).$$

A esta curva se la conoce como **tractrix**, y a la superficie de revolución S que genera le llamamos **pseudoesfera**, pues es una «esfera» de radio negativo.

Curvaturas principales

Sea S una superficie diferenciable y $p \in S$. Recordemos que el mapa de Weingarten, es autoadjunto, es decir

$$\langle W_{p,S} v, w \rangle = \langle v, W_{p,S} w \rangle \quad \forall v, w \in T_p S$$

Por tanto, existen $t_1, t_2 \in T_p S$ y $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\{t_1, t_2\}$ es una base de $T_p S$ y

$$W(t_1) = \kappa_1 t_1 \quad \text{y} \quad W(t_2) = \kappa_2 t_2.$$

Llamamos a κ_1, κ_2 las curvaturas principales de S , mientras que t_1 y t_2 son vectores principales de S correspondientes a κ_1 y κ_2 , respectivas.

Notemos que cuando $\kappa_1 \neq \kappa_2$, t_1 y t_2 son ortogonales.

Decimos que $p \in S$ es un punto umbilico cuando $\kappa_1 = \kappa_2$ para p . En los puntos umbilicos, existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tal que

$$W(t) = \kappa t,$$

para cualquier combinación lineal t de t_1 y t_2 .

Lema.

Sean S una superficie diferenciable, $p \in S$ y κ_1, κ_2 las curvaturas principales de S . Se tiene que

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \quad \text{y} \quad K = \kappa_1 \kappa_2.$$

Demostración:

Notemos que el determinante y la traza del mapa de Weingarten, puede calcularse respecto a cualquier base del plano tangente $T_p S$. En particular, para $\{t_1, t_2\}$, la (76)

matriz de representación de $W_{p,S}$ es

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, se sigue que

$$K = k_1 k_2$$

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Ángulo orientado

Supongamos que S es una superficie diferenciable orientada, $p \in S$ y \mathbf{N} la unidad normal estándar a S en p . Decimos que una rotación del plano tangente $T_p S$ es positiva o antihoraria, cuando al realizar la rotación, el vector normal que surge al usar la regla de la mano derecha coincide con la dirección de \mathbf{N} .

Así, el plano «divide» al espacio en dos partes, donde la «parte positiva» es aquella hacia la que \mathbf{N} apunta.

Dados $x, y \in T_p S$ no nulos, llamamos ángulo orientado entre x e y al ángulo \widehat{xy} que x debe rotar, en sentido antihorario, de modo que se convierta en múltiplo positivo de y . Como ejercicio, se deja verificar que

$$\widehat{yx} = -\widehat{xy}$$

Teorema de Euler

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientada

$$\sigma: U \rightarrow \sigma(U)$$

una parametrización de S , γ una curva sobre S tal que (de rapidez unitaria)

$$|\gamma'| \equiv 1,$$

k_1, k_2, t_1, t_2 las curvaturas y vectores principales de S respecto a σ , respectivamente. Supongamos que t_1 y t_2 son no nulos. Se tiene que

$$k_n = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta,$$

donde $\theta = \widehat{t_1 \gamma'}$.

Demostración

Sea $p \in \gamma'$, cualquiera. Recordemos que $\{t_1, t_2\}$ puede asumirse como una base ortonormal de $T_p S$. Así, podemos asumir que

$$\widehat{t_1 t_2} = \frac{\pi}{2}.$$

Puesto que $\gamma' \in T_p S$, se tiene que

$$\gamma' = (\cos \theta) t_1 + (\sin \theta) t_2$$

$$\begin{aligned} \text{Así, } k_n &= \langle \gamma', \gamma' \rangle_{p,S} \\ &= \cos^2 \theta \langle t_1, t_1 \rangle_{p,S} + 2 \sin \theta \cos \theta \langle t_1, t_2 \rangle_{p,S} + \sin^2 \theta \langle t_2, t_2 \rangle_{p,S} \end{aligned}$$

en donde

$$\langle t_i, t_j \rangle_{p,S} = \langle W_{p,S}(t_i), t_j \rangle$$

$$= \langle k_i t_i, t_j \rangle$$

$$= \begin{cases} k_j & \text{cuando } i=j, \\ 0 & \text{cuando } i \neq j. \end{cases}$$

con $i, j = 1, 2$. En consecuencia

$$k_n = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$$

Corolario 1

Las curvaturas principales a una superficie diferenciable en un punto, son los valores máximo y mínimo que puede tomar la curvatura normal, de entre todas las curvaturas sobre la superficie que pasan por ese punto. Además, los vectores principales correspondientes, son los vectores tangentes a las curvas de curvaturas principales. (curva de rapidez unitaria)

Demostración:

Sean S una superficie diferenciable y $p \in S$ cualquiera. Supongamos que k_1 y k_2 son distintos. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $k_1 > k_2$. Gracias al teorema de Euler, sabemos que

$$k_n = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta = k_1 - (k_1 - k_2) \sin^2 \theta$$

por lo cual podemos observar que $k_n \leq k_1$, pues son iguales cuando $\theta = 0$ (γ' y t_1 son paralelos). De manera análoga, vemos también que

$$k_n = k_2 + (k_1 - k_2) \cos^2 \theta$$

lo cual nos permite observar que $k_2 \leq k_n$, pues son iguales cuando $\theta = \pi/2$ (γ' y t_2 son paralelos).

En resumen, se tiene que $k_2 \leq k_n \leq k_1$, cuando k_1 y k_2 son iguales, por el teorema de Euler

$$k_n = k_1 = k_2$$

para cada curva sobre S que pasa por p , así todo vector del espacio tangente es un vector principal.

Clase • Jueves 26 de agosto de 2021

Teorema 2

Sean S una superficie orientable, $\sigma: U \rightarrow \sigma(U)$ una parametrización de S con primera y segunda de formas fundamentales

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

$$\text{y } L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

Las curvaturas principales corresponden a soluciones de la ecuación

$$\begin{vmatrix} L - \kappa E & M - \kappa F \\ M - \kappa F & N - \kappa G \end{vmatrix} = 0,$$

y el vector principal asociado a κ , es el vector $y = \xi \sigma_u + \eta \sigma_v$ tal que

$$\begin{pmatrix} L - \kappa E & M - \kappa F \\ M - \kappa F & N - \kappa G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Cuando S es un cilindro circular con parametrización

$$\sigma(u, v) = (\cos v, \sin v, u)$$

sus primera y segunda formas fundamentales son

$$du^2 + dv^2 \quad \text{y} \quad dv^2$$

Así, las curvaturas principales son las raíces de

$$0 = \begin{vmatrix} -\kappa & 0 \\ 0 & 1-\kappa \end{vmatrix} = \kappa(1-\kappa)$$

es decir $\kappa_1 = 0$ y $\kappa_2 = 1$.

Puntos umbilicos

Recordemos que un punto de una superficie diferenciable es un punto umbilico cuando sus dos curvaturas principales son iguales.

Proposición 1

Sea S una superficie diferenciable de modo que cada uno de sus puntos es umbilico. Se tiene que S es o un subconjunto abierto de un plano o parte de una esfera.

Demostración

Sea $\sigma: U \rightarrow \sigma(u)$ una parametrización de S . Podemos asumir que U es conexo. Sea $p \in \sigma(U)$. Como p es umbilico, este posee una curvatura principal κ , de modo que cada elemento de $T_p S$ es un vector principal.

Así,

$$W(t) = \kappa t \quad \forall t \in T_p S$$

Recordemos que

$$W(\sigma_u) = -N_u \quad \text{y} \quad W(\sigma_v) = -N_v$$

Por lo tanto,

$$N_u = -\kappa \sigma_u \quad \text{y} \quad N_v = -\kappa \sigma_v, \quad (1)$$

Y así,

$$(\kappa \sigma_u)_v = -(N_u)_v \quad \text{y} \quad (\kappa \sigma_v)_u = -(N_v)_u.$$

Puesto que $N_{uv} = N_{vu}$, se sigue que

$$(\kappa \sigma_u)_v = (\kappa \sigma_v)_u \Rightarrow \kappa_u = \kappa_v$$

pues σ_u y σ_v son l.i.

Supongamos que S tiene una sola carta

Caso 1: $\kappa = 0$. Por (1), $N_u = N_v = 0$, lo cual significa que N es constante. Así,

$$(N \cdot \sigma)_u = N \cdot \sigma_u = 0 = N \cdot \sigma_v = (N \cdot \sigma)_v$$

Lo cual nos indica que \mathbf{N} es constante. Así,

$$\mathbf{N} \cdot \sigma(u,v) = c \quad \forall (u,v) \in \mathcal{U}$$

lo que significa que $\sigma(\mathcal{U})$ es parte del plano de ecuación $\mathbf{N} \cdot \mathbf{r} = c$.

Caso: $k \neq 0$. Gracias a (1), tenemos que

$$\mathbf{N} = -k\sigma + a,$$

con $a \in \mathbb{R}^3$ constante. Por lo tanto,

$$\left\| \sigma - \frac{1}{k}a \right\|^2 = \left\| \frac{1}{k}\mathbf{N} \right\|^2 = \frac{1}{k^2}$$

lo cual nos indica que los puntos de $\sigma(\mathcal{U})$ pertenecen a una esfera.

Así, cuando S tiene más de un parche, cada uno de estos parches es o parte de un plano o de una esfera.

Así, si dos parches se intersecan entre sí, entonces o ambas pertenecen al mismo plano o son parte de la misma esfera.

Atención

Clasificación de puntas sobre las superficies.

Sea S una superficie diferenciable y $p \in S$. Mediante isometrías directas, podemos suponer que

- $p = (0,0,0)$;
- $T_p S$ es el plano xy ;
- $t_1 = (1,0,0)$ y $t_2 = (0,1,0)$;
- $\mathbf{N} = (0,0,1)$

Sean k_1 y k_2 las curvaturas principales respecto a t_1 y t_2 , respectivamente. Sea

$$\sigma: \mathcal{U} \rightarrow \sigma(\mathcal{U})$$

una parametrización de S , para la cual

$$\sigma(0,0) = p.$$

Como $\{\sigma_u(0,0), \sigma_v(0,0)\}$ es una base para $T_p S = \mathbb{R}^2$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ únicos para los cuales

$$t = (x, y, 0) = \alpha \sigma_u + \beta \sigma_v = x t_1 + y t_2.$$

Usando el desarrollo en series de Taylor, tenemos que

$$\sigma(\alpha, \beta) = \sigma(0,0) + \alpha \sigma_u + \beta \sigma_v + \frac{1}{2} (L \alpha^2 + 2H \alpha \beta + N \beta^2) + \text{error}.$$

Así, cuando x, y son pequeños (por ende α, β son pequeñas), obtenemos

$$(x, y, z) \approx \sigma(\alpha, \beta)$$

donde

$$z \approx \frac{1}{2} (L \alpha^2 + 2H \alpha \beta + N \beta^2) \quad (8)$$

con $Ldu^2 + 2Hdudv + Ndv^2$ es la segunda forma fundamental de σ en $(0,0)$.

Notemos que

$$\langle t, t \rangle_{p, S} = \langle w(t), t \rangle = L\alpha^2 + 2H\alpha\beta + N\beta^2,$$

en donde $t = \alpha t_1 + \beta t_2$; por lo cual

$$\begin{aligned} w(t) &= \alpha w(t_1) + \beta w(t_2) \\ &= (\alpha k_1, \beta k_2, 0) \end{aligned}$$

En consecuencia, obtenemos

$$\begin{aligned} 2z &\approx L\alpha^2 + 2H\alpha\beta + N\beta^2 \\ &= (d^2\sigma_{uu} + 2d\beta\sigma_{uv}) \cdot N \\ &= k_1 x^2 + k_2 y^2 \end{aligned}$$

Esto nos permite entender que una parte de S , cercana a p , se aproxima por la cuádrica

$$z = \frac{1}{2} (k_1 x^2 + k_2 y^2). \quad (2)$$

Con esta identidad obtenemos cuatro casos:

- Caso 1: $k_1, k_2 > 0$ o $k_1, k_2 < 0$
En este caso (2) representa un paraboloides elíptico, y por lo tanto decimos que p es un punto elíptico de S .
- Caso 2: $k_1 > 0, k_2 < 0$ o $k_2 > 0, k_1 < 0$
En este caso (2) representa un paraboloides hiperbólico, y por lo tanto, decimos que p es un punto hiperbólico de S .
- Caso 3: $k_i = 0$ y $k_j \neq 0$ $i, j \in \{1, 2\}$
En este caso (2) representa un cilindro parabólico, y por lo tanto decimos que p es un punto parabólico de S .
- Caso 4: $k_1 = k_2 = 0$
En este caso (2) representa un plano, y por lo tanto decimos que p es un punto planar de S .

Ejemplo 1:

Para la esfera S^2 , se tiene que

$$k_1 = k_2 = 1 \quad \text{o} \quad k_1 = k_2 = -1$$

por lo cual todas sus puntas son umbilicas elípticas

Ejemplo 2:

Para cualquier plano se tiene que

$$k_1 = k_2 = 0$$

por lo que todas sus puntas son planares umbilicas.

Ejemplo:

Recordemos que todas las puntas del toro Π pueden describirse a través de la fórmula

$$\sigma(\theta, \varphi) = (a+b \cos \theta) \cos \varphi, (a+b \cos \theta) \sin \varphi, b \sin \theta$$

de modo que las primeras y segundas formas fundamentales son

$$b^2 d\theta^2 + (a+b \cos \theta)^2 d\varphi^2$$

y

$$b d\theta^2 + (a + b \cos \theta) \cos \theta d\varphi^2$$

Así, $\kappa_1 = 1/b > 0$, $\kappa_2 = \cos \theta / (a+b \cos \theta)$, donde el signo de κ_2 depende de θ .

- Los puntos son elípticos si $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$;
- Los puntos son parabólicos cuando $\theta = \pi/2$ o $\theta = -\pi/2$;
- Los puntos son hiperbólicos cuando $\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$.

Clase - martes 31 de agosto

Geodésicas

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable, y $\gamma \subseteq S$ una curva parametrizada.

Decimos que γ es una geodésica cuando $\gamma'' = 0$ o γ'' es ortogonal al plano tangente a S en cada punto sobre la curva.

En el contexto de la derivada covariante, notemos que γ es una geodésica si y solo si:

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0.$$

(En otras palabras, cuando γ'' es paralelo a lo largo de γ).

Propiedades

1. Cualquier geodésica tiene rapidez constante;
2. Las reparametrizaciones de rapidez unitaria de geodésicas regulares, son también geodésicas.
3. Una curva de rapidez unitaria es una geodésica si y solo si su curvatura geodésica es nula en cada uno de sus puntos.
4. Cualquier porción de recta sobre una superficie diferenciable, es una geodésica.

Demostración

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y $\gamma \subseteq S$ una curva parametrizada, cualquiera.

1. Supongamos que γ es una geodésica. Así,

$$\frac{d}{dt} \|\gamma'(t)\|^2 = 2\gamma''(t) \cdot \gamma'(t) = 0$$

pues $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}S$, para cada t . Al integrar, se sigue que

$$\|\gamma'(t)\| = c \quad \forall t$$

2. En caso de que γ sea regular ($c \neq 0$), se tiene que

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma\left(\frac{t}{c}\right),$$

induce una reparametrización de rapidez unitaria para γ . Por tanto, como

$$\tilde{\gamma}'(t) = \frac{1}{c} \gamma'\left(\frac{t}{c}\right) \quad \forall t$$

y γ es una geodésica, $\tilde{\gamma}'$ o es nula, o $\tilde{\gamma}''$ es ortogonal al plano tangente a S en cada punto sobre la curva, lo cual significa que $\tilde{\gamma}$ es una geodésica.

3. Supongamos que γ es de rapidez unitaria. Sea σ , cualquier

$$\sigma: U \rightarrow \sigma(U)$$

una parametrización de S , tal que $\gamma \subseteq \sigma(U)$. Recordemos que

$$K_g = \gamma'' \cdot (\mathbf{N} \otimes \gamma'),$$

donde \mathbf{N} es la normal estándar respecto a σ .

Si γ es una geodésica, entonces o $\gamma'' = 0$ o γ'' es paralelo a \mathbf{N} y ortogonal a $\mathbf{N} \otimes \gamma'$. En cualquiera de los dos casos, se tiene que

$$K_g = 0.$$

En cambio, si $K_g = 0$, entonces γ'' y $\mathbf{N} \otimes \gamma'$ son ortogonales. Puesto que γ' y γ'' son ortogonales, y $\gamma', \mathbf{N}, \gamma'' \otimes \mathbf{N}$ también son ortogonales,

$$\gamma'' \text{ y } \mathbf{N}$$

son paralelos. Esto muestra que γ es una geodésica.

4. En caso de que γ sea una recta, tiene como fórmula

$$\gamma(t) = at + b,$$

con $a, b \in \mathbb{R}^3$ constantes. No es difícil ver que $\gamma'' = 0$, lo que significa que γ es una geodésica.

Ejemplos.

- Todas las rectas en un plano son geodésicas de este.
- Todas las rectas en una superficie reglada, son geodésicas.
- Sobre S^2 , las geodésicas son arcos de grandes círculos.
- Cualquier sección normal sobre una superficie diferenciable S es una geodésica.

Una sección normal sobre una superficie diferenciable S , es la curva γ que resulta de la intersección de una superficie con un plano ortogonal a $T_x S$ por cada t , pues

$$K_g = \gamma'' \cdot (\mathbf{N} \otimes \gamma') = 0.$$

Teorema.

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable, $\gamma \subseteq S$ una curva parametrizada. Se tiene que γ es una geodésica si y solo si para cualquier porción de γ

$$\gamma(t) = (u(t), v(t)),$$

contenida en una parametrización $\sigma: U \rightarrow \sigma(U)$, se satisface el sistema de ecuaciones geodésicas.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (Eu' + Fv') = \frac{1}{2} (Eu u'^2 + 2Fu u'v' + Gv v'^2) \\ \frac{d}{dt} (Fu' + Gv') = \frac{1}{2} (Ev u'^2 + 2Fv u'v' + Gv v'^2) \end{cases}$$

donde

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

es la primera forma fundamental de S respecto a σ .

Sea $\sigma: U \rightarrow \sigma(U)$ una parametrización de S que tiene puntos de \mathcal{R}^3 , cualquiera. Puesto que

$$\{\sigma_u, \sigma_v\}$$

es una base para cada espacio tangente a cada punto de $\sigma(U)$, γ es una geodésica si y solo si γ'' es ortogonal a σ_u y σ_v . Notemos que

$$\gamma = \sigma(u, v),$$

$$\gamma' = \sigma_u u' + \sigma_v v'$$

$$\gamma'' = \frac{d}{dt} (\sigma_u u' + \sigma_v v')$$

Así, γ es una geodésica si y solo si:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot \sigma_u = 0 \\ \frac{d}{dt} (\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot \sigma_v = 0 \end{cases}$$

Gracias a la regla de Leibniz, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} (\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot \sigma_u \\ &= \frac{d}{dt} ((\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot \sigma_u) - (\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot \frac{d\sigma_u}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} (u'E + v'F) - (\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot (u' \cdot \sigma_{uu} + v' \cdot \sigma_{uv}) \\ &= \frac{d}{dt} (u'E + v'F) - \frac{1}{2} (Eu u'^2 + 2Fu u'v' + Gu v'^2) \end{aligned}$$

pues

$$\sigma_u \cdot \sigma_{uu} = \frac{Eu}{2}, \quad Fu = \sigma_u \cdot \sigma_{uv} + \sigma_v \cdot \sigma_{uu} \quad \text{y} \quad \sigma_v \cdot \sigma_{uv} = \frac{Gv}{2}$$

Esto nos permite tener la primera ecuación geodésica

$$\frac{d}{dt} (Eu' + Fv') = \frac{1}{2} (Eu u'^2 + 2Fu u'v' + Gu v'^2)$$

Usando las ecuaciones de Gauss.

(Proposición 1: clase martes 17 de agosto de 2021)

Proposición 2.

Sean S una superficie diferenciable, $\sigma: U \rightarrow \sigma(U)$ una parametrización de S y γ una curva sobre S tal que $\gamma \subseteq \sigma(U)$. Se tiene que γ es geodésica si y solo si

$$\begin{cases} 0 = u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2, \\ 0 = v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2. \end{cases}$$

Demostración

Recordemos que γ es una geodésica si y solo si la derivada covariante de γ' es cero, por lo tanto, gracias a la proposición 1, respecto al campo

$$\gamma' = u'\sigma_u + v'\sigma_v$$

γ es una geodésica si y solo si

$$\begin{cases} 0 = u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2, \\ 0 = v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2. \end{cases}$$

Clase • martes 7 de septiembre de 2021

Geodésicas las curvas con menor longitud que unen cualquier par de puntos sobre una superficie

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable

$$\sigma: U \rightarrow \sigma(U)$$

una parametrización de S , $p, q \in \sigma(U)$, cualesquiera

Sean $\gamma \subseteq \sigma(U)$ una curva parametrizada que une p y q .

Sea $\delta > 0$ arbitrario, pero fijo. A continuación determinamos bajo que condiciones γ es una geodésica.

Consideremos una familia de curvas $(\gamma^z)_{z \in (-\delta, \delta)}$ en $\sigma(U)$ tales que

1) Para cada $z \in (-\delta, \delta)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\gamma^z: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \sigma(U)$$

está bien definida y es suave en $(-\varepsilon, \varepsilon)$;

2) Para cada $z \in (-\delta, \delta)$, existe $a, b \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $a < b$, tales que

$$\gamma^z(a) = p \text{ y } \gamma^z(b) = q;$$

3) El mapa

$$\begin{aligned} (-\delta, \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (z, t) &\longmapsto \gamma^z(t) \end{aligned}$$

es suave;

$$4) \gamma^0 = \gamma$$

Sabemos que la cantidad

$$\mathcal{L}(z) = \int_a^b \|(\gamma^z)'\| dt$$

representa la longitud de la curva γ^z entre p y q , para cada $z \in (-s, s)$

Teorema:

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable, $\sigma: U \rightarrow \sigma(U)$ una parametrización de S , $p, q \in \sigma(U)$, cualesquiera. Sean $\gamma \subseteq \sigma(U)$ una curva parametrizada de rapidez unitaria que conecta p y q . Se tiene que γ es una geodésica si y solo si

$$\frac{d}{dz} \mathcal{L}(z) = 0 \quad \text{cuando } z=0,$$

para todas las familias de curvas

$$(\gamma^z)_{z \in (-s, s)}$$

tales que $\gamma^0 = \gamma$

Demostración:

Sea $(\gamma^z)_{z \in (-s, s)}$ una familia de curvas tales que

$$\gamma^0 = \gamma,$$

cualquiera, con $s > 0$.

Sean $s > 0$ y $z \in (-s, s)$, cualesquiera. Puesto que γ^z es suave, $\mathcal{L}(z)$ también es suave.

Del Teorema de derivación bajo el signo integral, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \mathcal{L}(z) &= \frac{d}{dz} \int_a^b \|(\gamma^z)'\| dt \\ &= \frac{d}{dz} \int_a^b (Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)^{1/2} dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dz} (Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)^{1/2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b (g(z, t))^{-1/2} \frac{d}{dz} g(z, t) dt \end{aligned}$$

con

$$g(z, t) = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2$$

donde ' nos indica la derivación respecto a t .

Gracias a la regla de Leibniz y la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{d}{dz} g(z, t)$$

$$= \frac{dE}{dz} u'^2 + 2 \frac{dF}{dz} u'v' + \frac{dG}{dz} v'^2 + 2Eu' \frac{du'}{dz} + 2F \left(\frac{du'}{dz} v' + u' \frac{dv'}{dz} \right) + 2Gv' \frac{dv'}{dz}$$

$$= (Eu' u'^2 + 2Fu' u'v' + Gu' v'^2) \frac{\partial u}{\partial z} + (Ev' u'^2 + 2Fv' u'v' + Gv' v'^2) \frac{\partial v}{\partial z} + 2(Eu' + Fv') \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + 2(Fu' + Gv') \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} \quad (2)$$

Ahora, gracias a la integración por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_a^b (g(z, t))^{-1/2} \left((Eu' + Fv') \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + (Fu' + Gv') \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} \right) dt \\ &= (g(z, t))^{-1/2} \left((Eu' + Fv') \frac{\partial u}{\partial z} + (Fu' + Gv') \frac{\partial v}{\partial z} \right) \Big|_{t=a}^{t=b} \\ & - \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t} \left((g(z, t))^{-1/2} (Eu' + Fv') \right) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \left((g(z, t))^{-1/2} (Fu' + Gv') \right) \frac{\partial v}{\partial z} \right) dt \quad (3) \end{aligned}$$

Ahora, como $\delta^z(a) = p$ y $\delta^z(b) = q$, para cada $z \in (-\delta, \delta)$, se sigue que

$$\frac{\partial \delta^z}{\partial z}(a) = 0 = \frac{\partial \delta^z}{\partial z}(b) \quad \forall z \in (-\delta, \delta)$$

y como

$$\frac{\partial \delta^z}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_u + \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_v$$

se sigue que

$$0 = \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_u(a) + \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_v(a) \quad \text{y} \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_u(b) + \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_v(b)$$

por lo cual

$$\frac{\partial u}{\partial z}(a) = \frac{\partial v}{\partial z}(a) = \frac{\partial u}{\partial z}(b) = \frac{\partial v}{\partial z}(b) = 0$$

pues σ_u y σ_v son linealmente independientes.

Gracias a esta información, el primer sumando en (3) se anula.

Escribimos

$$\begin{cases} u(z, t) = \frac{1}{2} g^{-1/2} (Eu' u'^2 + 2Fu' u'v' + Gu' v'^2) - \frac{d}{dt} (g^{-1/2} (Eu' + Fv')), \\ v(z, t) = \frac{1}{2} g^{-1/2} (Ev' u'^2 + 2Fv' u'v' + Gv' v'^2) - \frac{d}{dt} (g^{-1/2} (Fu' + Gv')). \end{cases} \quad (4)$$

Al combinar (1), (2), (3) y (4), se sigue que

$$\frac{d}{dz} \mathcal{L}(z) = \int_a^b \left(u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) dt \quad (5)$$

Recordemos que $\gamma' = \gamma'^0$ es de rapidez unitaria y

$$g(z, t) = E|u|^2 + 2F|u'v| + G|v|^2 = \|(\gamma^z)'(t)\|^2,$$

por lo tanto

$$g(0, t) = 1, \quad \forall t.$$

Así, γ' va a ser geodésica si y solo si $u(0, t) = v(0, t) = 0$

Ahora, al comparar (u) con las ecuaciones geodésicas, notamos que γ' es una geodésica si y solo si

$$u(0, t) = v(0, t) = 0$$

lo cual obliga a que

$$\frac{d}{dz} \mathcal{L}(0) = 0,$$

gracias a (5).

Ahora, supongamos que

$$0 = \frac{d}{dz} \mathcal{L}(z) = \int_a^b \left(u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) dt \quad (6)$$

cuando $z=0$.

Vamos a probar que $u=v=0$, cuando $z=0$, lo cual haría que γ' satisfaga las ecuaciones geométricas, y por tanto, γ' sería una geodésica.

Supongamos que $u \neq 0$ en $z=0$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que existe $t_0 \in (a, b)$ tal que

$$u(0, t_0) > 0.$$

Notemos que u es continua, por lo cual existe $\eta > 0$ tal que

$$t \in \mathbb{R}, \quad |t - t_0| < \eta \Rightarrow u(0, t) > 0.$$

Consideremos, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es suave tal que

$$\varphi(t) > 0 \quad \forall t \in (t_0 - \eta, t_0 + \eta)$$

y

$$\varphi(t) \neq 0 \quad \forall t \in (t_0 - \eta, t_0 + \eta)^c$$

Puesto que

$$\gamma'(t) = \sigma(u(t), v(t)),$$

podemos considerar la familia de curvas cuyas elementos son de la forma

$$\gamma^z(t) = \sigma(u(z, t), v(z, t))$$

en donde $u(z, t) = u(t) + z\varphi(t)$ y $v(z, t) = v(t)$

No es difícil ver que en este caso, $\gamma^0 = \gamma$.

Además

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = \varphi(t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = 0$$

para cada z, t . De (6), obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left(u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) dt \Big|_{t=0} \\ &= \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} u(0,t) \varphi(t) dt \\ &> 0 \end{aligned}$$

lo cual no es posible. En consecuencia, $u=0$, cuando $z=0$. De manera similar, se obtiene que $v=0$. Así, γ es una geodésica.

Clase • jueves 9 de septiembre

Teorema 1 - Clairaut

Sean S una superficie de revolución, $\gamma \subseteq S$ una curva parametrizada y

$$p: S \rightarrow \mathbb{R}$$

la distancia entre cualquier punto de S y el eje de rotación. Denotemos por ψ el ángulo entre γ' y los meridianos de S .

Se tiene que:

- 1) Si γ es una geodésica, entonces $p \sin(\psi)$ es constante a lo largo de γ ;
- 2) Si $p \sin(\psi)$ es constante a lo largo de γ , ninguna parte de γ pertenece a un paralelo de S y $u^2 + v^2 + z^2 = 1$, entonces γ es una geodésica.

Demostración

En este caso recordemos que cada punto de S está descrito a través de la parametrización

$$\sigma(t, \theta) = (f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, g(t))$$

por lo cual $p = f(t)$. Además,

$$\begin{aligned} \sigma_t &= (f'(t) \cos \theta, f'(t) \sin \theta, g'(t)) \\ \sigma_\theta &= (-f(t) \sin \theta, f(t) \cos \theta, 0) f'(t) \end{aligned}$$

Así, σ_t y $1/f \sigma_\theta$ son vectores unitarios, tangentes a los meridianos y paralelos de S , respectivamente.

También notemos que

$$\sigma_t \cdot \sigma_\theta = F = 0,$$

por lo cual σ_t y σ_θ son ortogonales. Por otra parte, como

$$\gamma'(s) = \sigma(u(s), v(s))$$

de rapidez unitaria, tenemos que

$$\gamma'(s) = \cos \psi \sigma_t + \sin \psi p^{-1} \sigma_\theta,$$

en donde, el signo de ψ se elige de tal forma que la anterior identidad se cumpla.

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\sigma_z \otimes \gamma' &= \sigma_z \otimes (\cos \psi \sigma_z + \sin \psi \rho^{-1} \sigma_\theta) \\ &= \rho^{-1} \sin \psi \sigma_z \otimes \sigma_\theta.\end{aligned}$$

Notemos además que

$$\gamma' = u' \sigma_z + v' \sigma_\theta,$$

así, obtenemos

$$\begin{aligned}\sigma_z \otimes \gamma' &= \sigma_z \otimes (u' \sigma_z + v' \sigma_\theta) \\ &= u' \sigma_z \otimes \sigma_z + v' \sigma_z \otimes \sigma_\theta \\ &= v' \sigma_z \otimes \sigma_\theta.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$v' \sigma_z \otimes \sigma_\theta = \rho^{-1} \sin \psi \sigma_z \otimes \sigma_\theta,$$

gracias a lo cual, se tiene que

$$\rho^2 v' = \rho \sin \psi. \quad (1)$$

Si γ' es una geodésica, entonces se satisface el sistema de ecuaciones geodésicas

$$u'' = f \frac{dv}{ds} v'^2 \quad (2)$$

$$\frac{d}{ds} (f^2 v') = 0 \quad (3)$$

Al reemplazar (1) en (3), podemos concluir que

$$\rho \sin \psi = \Omega,$$

con Ω constante.

Si al contrario, $\rho \sin \psi$ es constante a lo largo de una curva $\gamma \subset S$ tal que

$$u'^2 + f^2 v'^2 = 1,$$

entonces (3) se cumple.

Mostramos que (2) también se cumple cuando γ' no pertenece a un paralelo de S , (o que obliga a γ' a ser una geodésica. Puesto que

$$\rho \sin \psi = \Omega$$

para alguna constante $\Omega \in \mathbb{R}$, gracias a (1), vemos que

$$v' = \frac{\Omega}{f^2}$$

Puesto que $u'^2 + f^2 v'^2 = 1$, obtenemos,

$$u'^2 = 1 - f^2 \frac{\Omega^2}{f^4} = 1 - \frac{\Omega^2}{f^2}.$$

Por tanto,

$$2u'u'' = \frac{2\Omega^2}{\rho^3} \frac{d\rho}{ds} u' = 2\rho v'^2 \frac{d\rho}{ds},$$

pues,

$$\rho = f = f(u(s))$$

sobre la curva.

Así, obtenemos la ecuación

$$u' \left(u'' - \rho \frac{d\rho}{ds} v'^2 \right) = 0$$

lo cual involucra (3). Supongamos que (3) no es cierta, es decir, asumamos que

$$u'' - \rho \frac{d\rho}{ds} v'^2 \neq 0$$

para algún punto $\gamma(t_0) = \sigma(u_0, v_0) \in \gamma$. Gracias a la continuidad, sabemos que existe δ tal que

$$u'' - \rho \frac{d\rho}{ds} v'^2 \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad |s - t_0| < \delta$$

Así, (4) nos indica que $u' = 0$ en una vecindad de t_0 , por lo cual u es constante en una vecindad de t_0 , obligando a que parte de γ pertenezca a un paralelo de S , lo cual no es posible pues contradice una de nuestras hipótesis.

Esto nos indica que, en (4), quien se anula es

$$u'' - \rho \frac{d\rho}{ds} v'^2,$$

y por tanto γ satisface las ecuaciones geodésicas, y es por tanto, una geodésica.

Para culminar, se deja como un pequeño ejercicio que en una superficie de revolución, no todas las paralelos son curvas geodésicas, de ahí la restricción sobre la segunda parte del teorema de Clairaut.

Ecuaciones de Codazzi - Mainardi

Sean S una superficie diferenciable, $\sigma: U \rightarrow \sigma(u)$ una parametrización de S y

$$Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2 \quad \text{y} \quad Ldu^2 + 2Hdu dv + Ndv^2,$$

las primera y segunda formas fundamentales respecto a σ . Se satisface el sistema de ecuaciones

$$L_v - H_u = L\Gamma_{12}^1 + H(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1) - N\Gamma_{11}^2$$

$$H_v - N_u = L\Gamma_{22}^1 + H(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2) - N\Gamma_{12}^2$$

Ecuaciones de Gauss.

Además, si K es la curvatura Gaussiana respecto a σ , entonces

$$EK = (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2$$

$$FK = (\Gamma_{12}^1)_v - (\Gamma_{11}^1)_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1$$

$$FK = (\Gamma_{12}^2)_v - (\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2$$

$$GK = (\Gamma_{22}^2)_u - (\Gamma_{12}^2)_v + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{12}^2)^2$$

Demostración

Puesto que σ es suave, se sigue que

$$(\sigma_{2u})_v = (\sigma_{2v})_u.$$

Gracias a las ecuaciones de Gauss, sabemos que

$$\sigma_{2u} = \Gamma_{11}^2 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + LN,$$

$$\sigma_{2v} = \Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v + MN;$$

así

$$\cdot (\Gamma_{11}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + LN)_v = (\Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v + MN)_u.$$

De esta última desigualdad, al usar la regla de Leibniz y las ecuaciones de Gauss, se sigue que

$$\left(\frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} \right) \sigma_u + \left(\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} \right) \sigma_v + (Lv - Mu) N$$

$$= \Gamma_{12}^1 \sigma_{2u} + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \sigma_{2v} - \Gamma_{11}^2 \sigma_{2v} - LN_v + MN_u \quad (5)$$

$$= \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{11}^2 \sigma_v + LN) + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) (\Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v + MN)$$

$$- \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{12}^1 \sigma_u + \Gamma_{12}^2 \sigma_v + MN) - LN_v + MN_u.$$

Puesto que N_u y N_v son ortogonales a N , ambas son combinaciones lineales de σ_u y σ_v . Así, de la última ecuación obtenemos al igualar los coeficientes que multiplican a N que

$$Lv - Mu = L\Gamma_{12}^1 + M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N\Gamma_{11}^2,$$

la cual es precisamente la primera ecuación del sistema Codazzi - Mainardi.

La otra ecuación se deduce de manera similar usando las ecuaciones de Gauss para σ_{2v} y σ_{2u} .

Demostración (Ecuaciones de Gauss)

Supongamos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada al mapa de Weingarten, en donde

$$a = \frac{HF - LG}{EG - F^2}, \quad c = \frac{NF - HG}{EG - F^2}.$$

Sabemos que

$$-N_u = a\sigma_u + b\sigma_v \quad \text{y} \quad -N_v = c\sigma_u + d\sigma_v.$$

Al reemplazar las formulas N_u y N_v , en (5), e igualar los coeficientes correspondientes a σ_u , obtenemos

$$(\Gamma_{ii})_v - (\Gamma_{iz})_u = \Gamma_{iz}^2 \Gamma_{iz}^1 - \Gamma_{ii}^2 \Gamma_{zz}^1 - Lc + Ha,$$

en donde

$$\begin{aligned} -Lc + Ha &= -L \cdot \frac{NF - HG}{EG - F^2} + H \cdot \frac{HF - LG}{EG - F^2} \\ &= -\frac{F(LN - H^2)}{EG - F^2} \\ &= -FK, \end{aligned}$$

lo cual nos permite obtener la primera ecuación de Gauss. Las demás, se obtienen de manera similar.

Teorema.

Sean $\sigma: U \rightarrow \sigma(U)$ y $\Sigma: V \rightarrow \Sigma(V)$ dos parametrizaciones de dos superficies diferenciables S y S^* . Si σ y Σ determinan las mismas primeras y segundas formas fundamentales, entonces existe una isometría directa entre $\sigma(U)$ y $\Sigma(V)$.

¡Hay más!

Supongamos que $W \subseteq \mathbb{R}^3$ es no vacío y abierto, y E, F, G, L, H, N son funciones suaves sobre W , tales que

$$E > 0, \quad G > 0, \quad EG - F^2 > 0,$$

y satisfacen las ecuaciones de Codazzi-Hainardi y de Gauss, con

$$K = \frac{LN - H^2}{EG - F^2}$$

Existe un único parche de superficie, salvo isometrías directas, para el cual E, F, G, L, H, N son los coeficientes de las primeras formas fundamentales.

Atención

Supongamos que S_1 y S_2 son superficies diferenciables y

$$f: S_1 \rightarrow S_2$$

un difeomorfismo. Se tiene que f es una isometría local si y solo si σ y $f \circ \sigma$ poseen la misma primera forma fundamental, para cada parametrización σ de S_1 .

Notemos que los símbolos de Cristoffel dependen únicamente de la primera forma fundamental. Por tanto, gracias a las ecuaciones de Gauss, la curvatura

Teorema I - Teorema Egregium de Gauss.

La curvatura Gaussiana de una superficie se mantiene invariante bajo isometrías

Gracias a esto podemos decir que la curvatura Gaussiana es intrínseca de una superficie, lo cual significa que la curvatura Gaussiana puede ser medida por un ser que viva sobre la superficie.

Proposición

Cualquier mapa de cualquier región de la tierra, distorsiona distancias.

Demostración

Supongamos que $S \in \mathbb{R}^3$ es un mapa (porción de plano) de determinada área de la tierra. Supongamos que este mapa S preserva las distancias, por tanto existe un difeomorfismo entre una porción de la esfera y S , el cual multiplica todas las distancias por una misma constante no nula C . Sin pérdida de generalidad, supongamos que nuestro mapa atraviesa por el origen.

Al componer este difeomorfismo con el mapa

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S \\ r &\mapsto e^{-1}r \end{aligned}$$

establecemos una isometría local entre una porción de la esfera, y una porción del plano S .

Gracias al teorema Egregium de Gauss, la porción de la esfera y la porción del plano, tienen la misma curvatura Gaussiana K , donde

$$0 = K > 0$$

lo cual es contradictorio.

Variedades topológicas.

Decimos que un espacio topológico M es una variedad topológica de dimensión n , o una n -variedad topológica, cuando se satisfacen los siguientes enunciados.

- VT_1 : M un espacio de Hausdorff
- VT_2 : M es segundo contable
- VT_3 : M es localmente euclidiano de dimensión n , es decir, para cada $p \in M$ existen $U \subset M$ vecindad abierta de p , $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow U$ tales que φ sea un homeomorfismo.

Notemos que toda variedad topológica posee una única dimensión bien definida, así, el conjunto conformado por el plano y una recta, no puede ser una variedad topológica.

Parametrizaciones

Sea M una n -variedad topológica. Una carta de coordenadas o simplemente carta, es un par (U, φ) , donde $U \subset M$ es abierto y $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo. En este contexto, decimos que U es el dominio de la (U)

carta (U, φ) , mientras el mapa

$$\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$p \mapsto \varphi(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p))$$

Se conoce como mapa coordenado local, en donde

$$x^i: U \rightarrow \mathbb{R}, \text{ para cada } i$$

Ejemplo: El plano cartesiano

Consideremos el espacio euclidiano \mathbb{R}^2 , el cual sabemos que es de Hausdorff y segundo contable

Notemos que el mapa

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$p = (x^1, x^2) \mapsto \varphi(p) = (x^1, x^2)$$

es un homeomorfismo. De este modo (\mathbb{R}^2, φ) es una carta coordenada, con coordenadas locales

$$x^1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$p = (x^1, x^2) \mapsto x^1(p) = x^1$$

$$y \quad x^2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$p = (x^1, x^2) \mapsto x^2(p) = x^2$$

Así, \mathbb{R}^2 es una 2-variedad topológica

Ejemplo: El plano en coordenadas polares

Recordemos que: mediante el cambio de coordenadas polares, para cada $p = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ no nulo, existen $r > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi]$ tales que

$$p = (x^1, x^2) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Con un dominio adecuado, el mapa que pone en correspondencia a \mathbb{R}^2 , con sus puntos descritos en coordenadas polares, con el espacio euclidiano \mathbb{R}^2 , permite proporcionar a \mathbb{R}^2 en coordenadas polares, de una estructura de variedad topológica.

• El plano en coordenadas lineales.

Ejemplo: La esfera

Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$$

No es difícil ver que S^n es de Hausdorff y segundo contable

Para probar que S^n es localmente euclidiano, para cada $i = 1, \dots, n+1$, consideremos los conjuntos

$$U_i^+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x^i > 0\}$$

$$U_i^- = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x^i < 0\}$$

y los mapas

$$\varphi_i^+ : U_i^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x^1, \dots, x^{n+1}) \mapsto \varphi_i^+(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1})$$

$$\varphi_i^- : U_i^- \rightarrow \mathbb{R}^n$$

donde $\hat{}$ nos indica que la componente x^i se omite del arreglo.