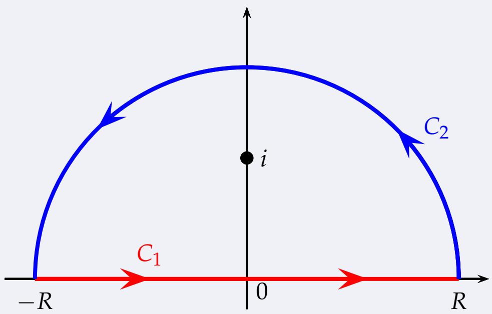
Ejercicio 1. El objetivo de este ejercicio es demostrar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \pi.$$

Se considera siguiente gráfica:



con $R > 1$ y tomando $C = C_1 \cup C_2$. Siga los siguientes pasos:

1. Calcule
$$\int_C \frac{1}{1+z^2}\, dz.$$

2. Evalúe el límite
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_2} \frac{1}{1+z^2}\, dz.$$

3. Deduzca la fórmula que se quería demostrar.

Solución.

1. Dado que la función definida por $z \mapsto \dfrac{1}{1+z^2}$ es analítica en C, junto con su interior, salvo en i, se tiene que
$$\int_C \frac{1}{1+z^2}\, dz = \int_C \frac{1}{(z+i)(z-i)}\, dz = \int_C \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i}\, dz = 2\pi i \left(\left.\frac{1}{z+i}\right|_{z=i} \right) = \pi.$$

2. Por la desigualdad triangular, se tiene que
$$\begin{aligned}\left| \int_{C_2} \frac{1}{1+z^2}\, dz \right| &\leq \int_{C_2} \frac{1}{|z^2+1|} |dz| \\ &\leq \int_{C_2} \frac{1}{|z^2|-1} |dz| \\ &= \int_{C_2} \frac{1}{R^2-1} |dz| \\ &= \frac{\pi R}{R^2-1},\end{aligned}$$
luego
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_2} \frac{1}{1+z^2} dz = 0,$$

pues
$$\lim_{R\to+\infty} \frac{\pi R}{R^2-1} = 0.$$

3. En resumen, se tiene que
$$\begin{aligned}
\pi &= \lim_{R\to+\infty} \int_C \frac{1}{1+z^2}\,dz \\
&= \lim_{R\to+\infty} \left(\int_{C_1} \frac{1}{1+z^2}\,dz + \int_{C_2} \frac{1}{1+z^2}\,dz \right) \\
&= \lim_{R\to+\infty} \left(\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{C_2} \frac{1}{1+z^2}\,dz \right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx + 0 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx,
\end{aligned}$$

de donde, por paridad,
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$
□