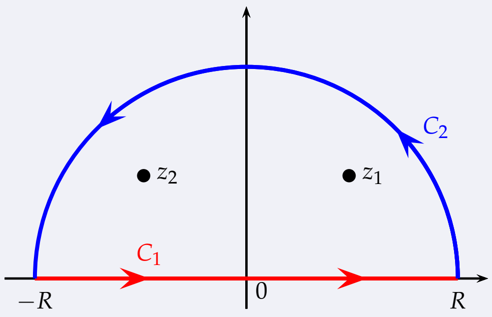
EJERCICIO 1. El objetivo de este ejercicio es demostrar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Se considera la siguiente gráfica



con $R > 1$, $z_1 = \frac{1+i}{2}$ y $z_2 = \frac{-1+i}{2}$; y tomando $C = C_1 \cup C_2$. Siga los siguientes pasos:

1. Factorice el polinomio $z^4 + 1$.
2. Utilice el teorema del residuo y la parte anterior para evaluar
$$\int_C \frac{1}{1+z^4}dz.$$
3. Evalúe el límite
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_2} \frac{1}{1+z^4}\,dz.$$
4. Deduzca la fórmula que se quería demostrar.

Solución.

1. Se tiene que
$$1+z^4 = (z^2+i)(z^2-i) = \left(z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(z - \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(z - \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right).$$

2. Dado que la función definida por $f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$ dentro de C tiene dos polos, simples, en z_1 y z_2, vamos a calcular sus residuos para calcular su integral. Se tiene que
$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \lim_{z\to z_1} f(z)(z-z_1) = \left.\frac{1}{\left(z - \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(z - \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)}\right|_{z=z_1} = \frac{\sqrt{2}}{4+4i}.$$

y de forma similar,

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \lim_{z \to z_2} f(z)(z - z_1) = \left.\frac{1}{\left(z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(z - \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)}\right|_{z=z_2} = \frac{\sqrt{2}}{-4+4i}.$$

Por el Teorema del Residuo, se tiene que

$$\int_C \frac{1}{1+z^2} dz = 2\pi i(\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2)) = 2\pi i \left(\frac{\sqrt{2}}{4+4i} + \frac{\sqrt{2}}{-4+4i}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

3. Por la desigualdad triangular, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_2} \frac{1}{1+z^4}\, dz\right| &\leq \int_{C_2} \frac{1}{|z^4+1|} |dz| \\
&\leq \int_{C_2} \frac{1}{|z^4|-1} |dz| \\
&= \int_{C_2} \frac{1}{R^4-1} |dz| \\
&= \frac{\pi R}{R^4-1},
\end{aligned}$$

luego

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_2} \frac{1}{1+z^4}\, dz = 0,$$

pues

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{\pi R}{R^4-1} = 0.$$

4. En resumen, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\sqrt{2}} &= \lim_{R \to +\infty} \int_C \frac{1}{1+z^4}\, dz \\
&= \lim_{R \to +\infty} \left(\int_{C_1} \frac{1}{1+z^4}\, dz + \int_{C_2} \frac{1}{1+z^4}\, dz\right) \\
&= \lim_{R \to +\infty} \left(\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^4}\, dx + \int_{C_2} \frac{1}{1+z^4}\, dz\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx + 0 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx,
\end{aligned}$$

de donde, por paridad,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

□