Clase - 9 de noviembre de 2021

Monday, November 8, 2021 9:02 AM

Optimización

Capítulo 1: Modelos de programación lineal

Definición (Modelo)
Un modelo es una estructura que permite estudiar tendencias, rasgos en forma simplificada, de un sistema o fenómeno.

¿Para qué construir modelos?

1. Permiten la experimentación: cambios de algunas características de los elementos
2. Permiten determinar ciertos comportamientos que no son visibles a primera vista (Modelos de DATA MINING)
3. Ayuda a la toma de DECISIONES

MODELOS ≈ SIMPLIFICACIÓN

Modelo viene del griego MODUS ≈ MEDIR

TIPOS DE MODELOS

1.1 Modelos físicos y abstractos

Físicos se dice prototipo: represa
corazón artificial, tuneles de vien[to]

- Son caros
- Poco adaptados a la experimentación.

Abstractos: usan los objetos de la matemática (variables, parámetros, funciones, ecuaciones, desigualdades, redes, etc.) para establecer interrelaciones entre los elementos del sistema con el objeto de medir ciertas cantidades.

La simplificación se hace mediante:

- Hipótesis
- El uso de la abstracción en el proceso de determinación de

• Hipótesis
• El uso de la abstracción es el proceso de determinación de los principales características que presenta un sistema o fenómeno

Los modelos abstractos o matemáticos conducen a problemas matemáticos (resolución de un sistema de ecuaciones, ecuaciones en derivadas parciales) (los problemas se los puede resolver en el computador

Estos modelos pueden ser:

• Modelo determinístico: todas sus componentes son conocidos con certeza
• Modelos estocásticos: algunas componentes pueden ser variables aleatorias

› Se clasifica a los modelos por el horizonte de planificación: es el lapso para el cual se supone es válido el modelo

• Modelos estratégicos o a largo plazo (mayor que un año)
• Tácticos o a mediano plazo. Ejm. comprar una flota de camiones si se quiere hacer la distribución de los productos
• Operativas o a corto plazo Ejm. Plan de producción diario de una empresa

1.2 MODELOS DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA

La investigación operativa es una disciplina de la matemática que formula modelos para optimizar algunos procesos

• PL
• Programación matemática
• Cadenas de Markov
• Teoría de colas
• Planes de inversión

Operación ≈ Planificación

Nos interesan los modelos de optimización:
que tratan de escoger una alternativa posible o factible dentro de un conjunto finito o no que sea la mejor con respecto a algún criterio

Ayuda a la toma de decisiones

- Por experiencia o conocimiento del problema
- Sentido común
- Grupos de expertos

Ejemplo:
Una empresa tiene que desplazar a 5 consultores que viven en Quito en 4 semanas consecutivas a Guayaquil para prestar sus servicios.
Los consultores deben salir en avión el lunes por la mañana y regresar el miércoles por la tarde.
Hay 3 opciones de compra de pasajes

O1) Un pasaje de ida y vuelta Q-G y G-Q a $180 si su uso se hace en la misma semana

O2) Se rebaja el 20% el uso completo del pasaje de ida y vuelta deja transcurrir por lo menos un fin de semana

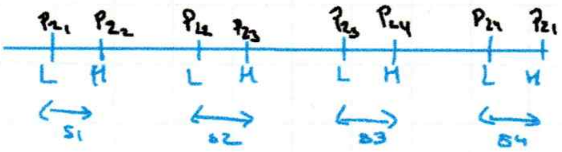
O3) Son pasajes simples G-Q o Q-G a un costo de $120

Se quiere determinar como comprar los pasajes para desplazar a los consultores, pagando una menor cantidad por el transporte total en el mes.

Hipótesis. Es suficiente hacer el cálculo del costo total para un solo consultor, pues el costo total es proporcional. (no hay descuentos por cantidad)

Solución
Más cara:

Óptima: Comprar 4 pasajes de tipo 2 para un consultor



P_{2_i}: i-ésimo pasaje de tipo 2
$i = 1, \dots, 4$

$180 \times 0.8 = 144{,}0$ Valor por pasajes tipo 2

Costo por consultor $= 4 \times 144 = \$576$

Por 5 consultores $= \$576 \times 5 = \$2880$

$$\text{Error relativo} = \frac{4200-2880}{2880} = \frac{2320}{2880} = 0.4583$$

Observación

Cuando se implementan modelos de investigación operativa se obtiene una mejora de entre 5% a 30%

Este problema tiene los componentes de un problema de optimización

conjunto factible

- Las posibles alternativas serán el # de pasajes
- Además, existen restricciones sobre el uso de cada uno de los tipos de pasajes
- Los consultores salen el lunes y regresan el miércoles en la tarde

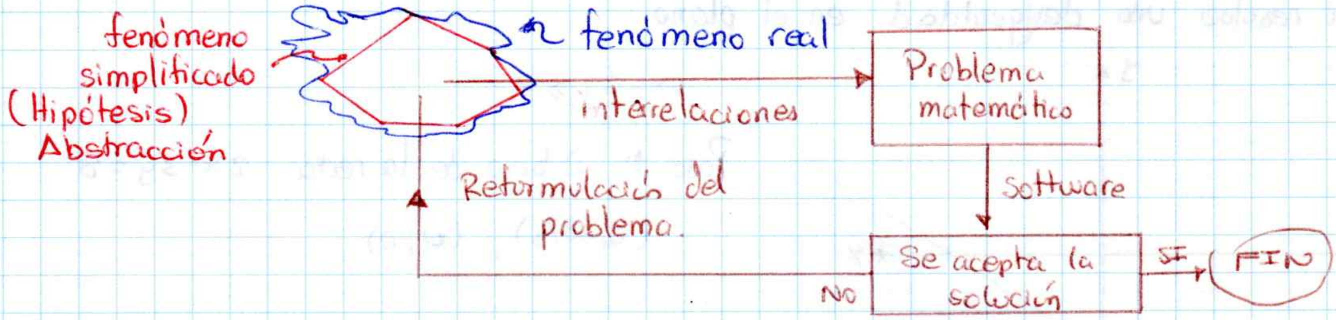
(n_1, n_2, n_3) $(0,0,8)$, $(0,0,4)$

Objetivo: Minimizar el costo total de transporte en el mes.

Clase viernes 12 de noviembre de 2021

Resumen

Esquema del formato de un modelo abstracto (matemático)



1.3 Modelos de programación lineal

Repaso de Álgebra Lineal y desigualdades (Trabajo sobre $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$

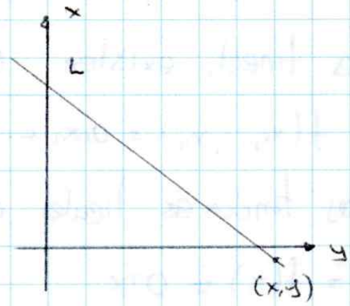
$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \qquad \langle x, y\rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

notación $(1\times n)(n\times 1) = (1\times 1)$ $\qquad (H_{1\times 1}) \approx \mathbb{R}$

$H_{1,1} \longleftrightarrow \mathbb{R}$ ← Isomorfismo.

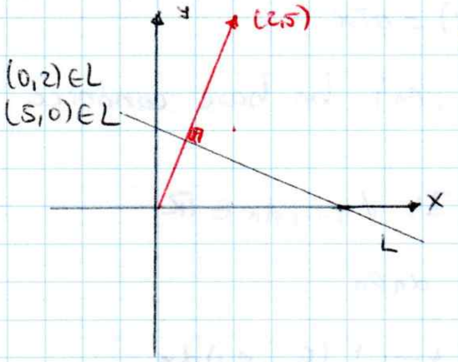
$$(\alpha) + (\beta) = \alpha + \beta$$
$$\alpha(\beta) = (\alpha\cdot\beta) = \alpha\beta$$

Hiperplano o recta en $\mathbb{R}^2$



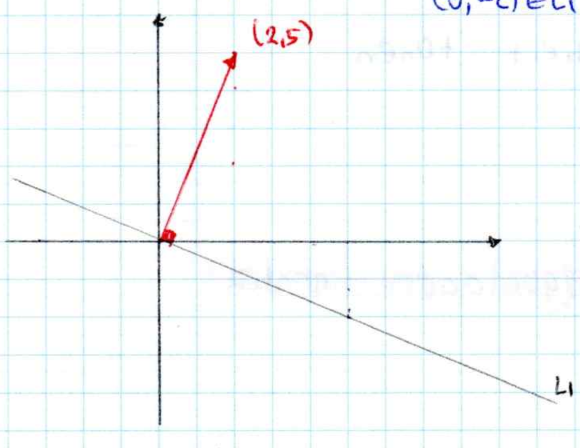
La ecuación general de la recta es
$$ax + by + c = 0$$
$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$$

- Si $2x + 5y = 10$



El vector normal a L es $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

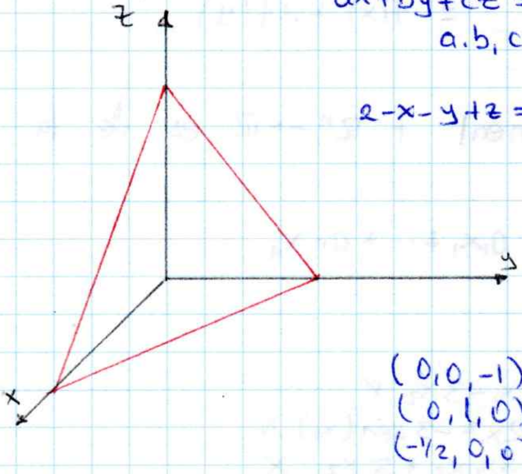
- Si $2x + 5y = 0$ $\qquad (0,0) \in L_1$, $(5,-2) \in L_1$



Un plano afín en $\mathbb{R}^3$

$$ax + by + cz = d$$
$$a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$2 - x - y + z = 1$$

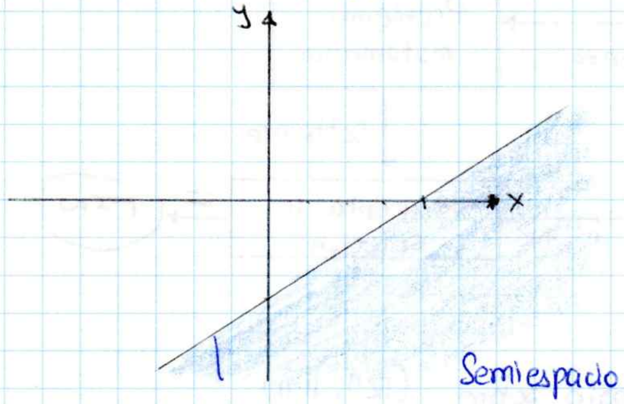


$(0,0,-1)$
$(0,1,0)$
$(-1/2,0,0)$

Desigualdad lineal

$ax+by\leq c$ $\qquad S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by\leq c,\ a,b,c\in\mathbb{R}\}$ $\qquad 2x-3y\leq 8$

Para resolver una desigualdad en el plano



$2x-3y\geq 8$

Paso 1: Dibujo de la recta $2x-3y=8$

$(0,-8/3),\ (4,0)$

Definición

La programación lineal es una disciplina de la investigación operativa, que estudia la optimización de una función lineal o afín de valores $x_1,\dots,x_n$ ("Variables de decisión") sujetas a restricciones que son sistemas de ecuaciones y/o desigualdades lineales

Observación

La función $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ se dice función objetivo o criterio

Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es lineal, existen $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x_1,\dots,x_n)=a_1x_1+\dots+a_nx_n$$

es decir, todas las funciones lieales de $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ son de esa forma

- Si $f(x_1,\dots,x_n)=f(x)=a^Tx$

Si $\alpha\in\mathbb{R}$ y $x,y\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x+\alpha y) &= a^T(x+\alpha y)\\ &= a^Tx+\alpha y\\ &= f(x)+\alpha f(y)\end{aligned}$$

Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ lineal como puede poner en la forma $f(x)=a^Tx$

Si $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$

Sea $u\in\mathbb{R}^n$, $\exists!\ \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$

$u=\alpha_1 e_1+\dots+\alpha_n e_n$

$u=(1,0,\dots,0)\alpha_1+\dots+(0,\dots,0,1)\alpha_n$

$f(u)=x_1f(e_1)+\dots+x_nf(e_n)$

$f(u)=a_1e_1+\dots+a_ne_n$

Corolario

Toda función lineal $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es de la forma

$$f(x)=a^Tx=a_1x_1+\dots+a_nx_n$$

Ejemplo

- $f(x_1,x_2)=2x_1-3x_2$ ✓
- $f(x_1,x_2)=2x_1^2-3\,\mathrm{sen}(x_2)$ X
- $f(x_1,x_2)=3x_1x_2+5x_2$ X

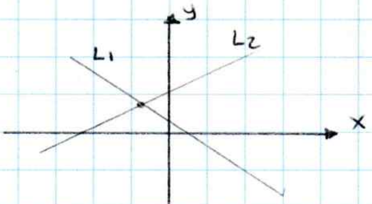
Sistemas de ecuaciones lineales y/o desigualdades lineales

① Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \to b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \to b_2$$

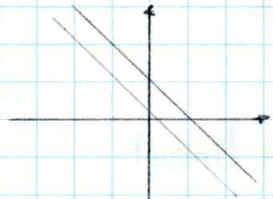
Hay tres posibilidades

Solución única

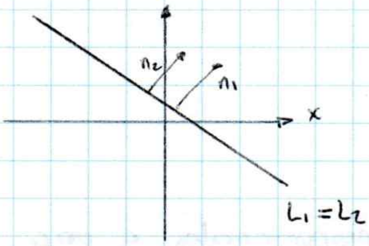


$\det(A) \neq 0$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$



Infinitas soluciones



$n_1 = \beta n_2$

$b_1 = \beta b_2$

Observación
Un sistema $Ax=b$

$x_1 a^1 + x_2 a^2 = b$ donde a^i es la i-ésima columna de la matriz A.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -4x - 6y = -10 \end{cases} \qquad \beta = -2$$

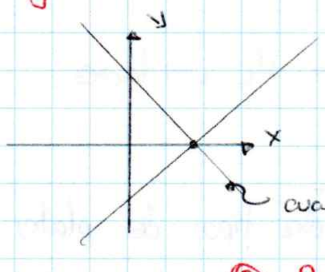
El sistema tiene solución única cuando a^1 y a^2 son l.i. y forman una base de $\mathbb{R}^2$

Si a^1 y a^2 son linealmente independientes hay infinitas soluciones o ninguna

Si $b \notin \text{span}(a^1, a^2) = \text{span}(a^1, \alpha a^1)$ el sistema no posee solución

Sistemas de ecuaciones y desigualdades

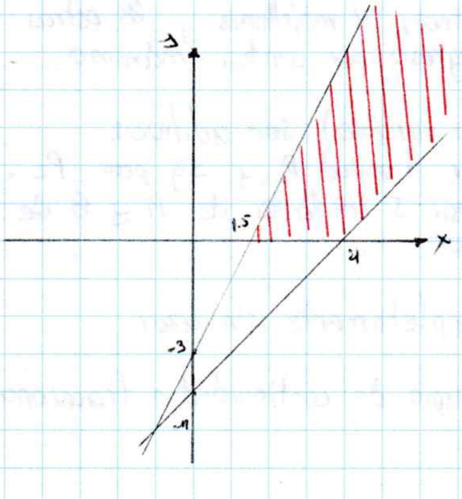
$$\begin{cases} 2x - 3y \leq 6 \\ x + y = 3 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$



$S = S_1 \cap H_2 \cap S_3 \cap S$

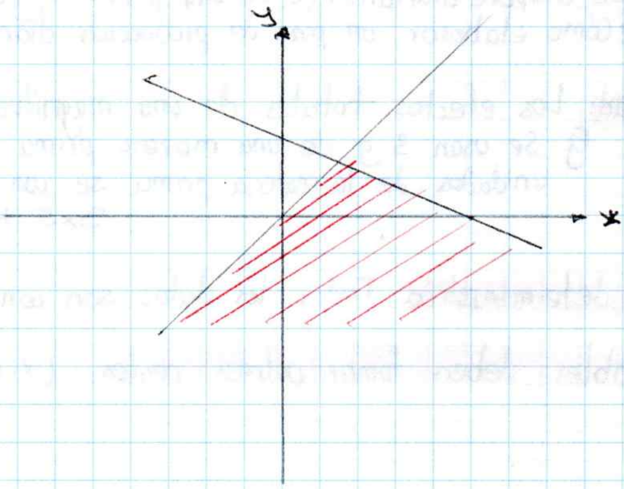
② Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x - y \geq 3 \\ x - y \leq 4 \\ x \geq 0,\ y \leq 0 \end{cases}$$ ← desigualdades de signo



③ Resolver

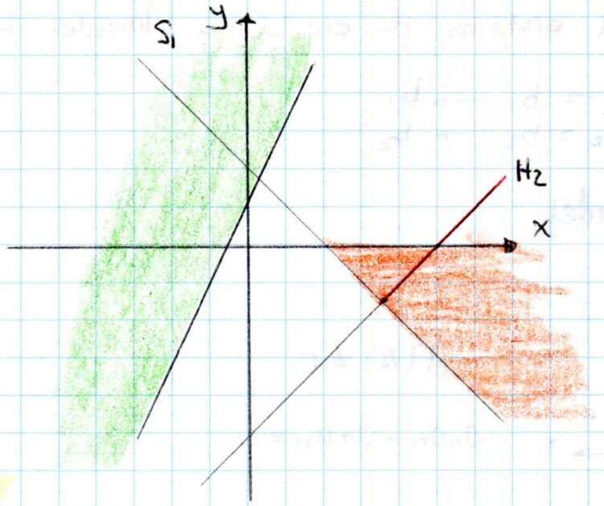
$$\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ x - y \geq 0 \\ x \in \mathbb{R}\ \ y \leq 0 \end{cases}$$
← variable libre



④ Resolve

$$\begin{cases} x+y \geq 2 \\ x-y=5 \\ 2x-y \leq -1 \\ x\geq 0 \quad y\leq 0 \end{cases}$$

$S=\emptyset$



Modelo de Programación lineal

Para plantear un modelo de programación lineal

i) De dar un significado en alguna magnitud a las variables

Ej: x_i : cantidad del objeto i a producirse en la semana.

Respetar 4 principios:

- **Proporcionalidad.** Los efectos totales de una magnitud son proporcionales a una cantidad fija. Ejm. Si para elaborar 1kg de una mezcla se usan 300g de un componente, para producir 5kg de la mezcla se usarán 1500g de componente.

$H_1 \sim H_2$ (H_1 es proporcional a H_2) si $\exists k>0$ constante tal que $H_1 = kH_2$

costo unitario

* H_2: Unidades a producirse en un día.
* K: Costo unitario
* H_1: Costo total de producción de H_2 unidades.

$k_1 = 10$ \$/caja
$H_2 = 100$ cajas
$H_1 = 10$ $\cancel{\$/cajas}$ $\cdot$ H_2 cajas
$H_1 = 1000$ \$

① Modelo 1. - Gestión de la producción -
El dueño de un restaurante elabora dos tipos de platos marineros

Plato 1: Precio de venta 8 u.m./1 u. plato 1 y contiene la siguiente fórmula: 5 langostinos 2 mejillones y una ostra.
Plato 2: Precio de venta 6 u.m/u. plato 1 y contiene 3 langostinos, 3 mejillones y 3 ostras.

Problema. Se dispone diariamente de una provisión de 30 langostinos, 24 mejillones y 18 ostras ¿Cómo elaborar un plan de producción diario con un ingreso por ventas máximo

- **Aditividad:** Los efectos totales de una magnitud (dos o más variables) son aditivos
  Ej. Se usan 3 g de una materia prima para producir 1 unidad P_1 y 5g para P_2. ¿Cuántas unidades de la materia prima se usa para producir 5 unidades de P_1 y 8 de P_2
  $3\times5 + 5\times8 = 55$

- **La P.L es determinística** Todos los datos son conocidos completamente sin azar

- **Las variables deben tomar valores reales** ($x_i \in \mathbb{R}$) [Principio de continuidad o fraccionalidad

Clase 4 - Lunes 15 de Noviembre de 2021

Horizonte de planificación (HP) : 1 día (planificación diaria / modelo operativo)

	Plato 1	Plato 2	Disponibilidad
langostinos	5	3	30
mesillones	2	3	24
ostras	1	3	18
P. U. P. (unitario por plato)	8	6	

Desición: ¿Cuántos platos de tipo i $(i=1,2)$ producir diariamente?

Variables de desición

x_1: ¿Cuántos platos de tipo 1 producir al día?
x_2: ¿Cuántos platos de tipo 2 producir al día?

Objetivo

Maximizar el ingreso diario por ventas. (Hip: Suponemos que toda la producción se va a vender)

Función objetivo unidad monetaria

$$z = f(x_1, x_2) = 8\left(\frac{u.m}{1\ PT1}\right) x_1\ (PT1) + 6\left(\frac{u.m}{1\ PT1}\right) x_2\ (PT1)$$

$$z = 8x_1\ (u.m.) + 6x_2\ (u.m.)$$

Restricciones requerimiento, obligaciones condiciones

Regla de oro: Una desigualdad o ecuación por cada restricción

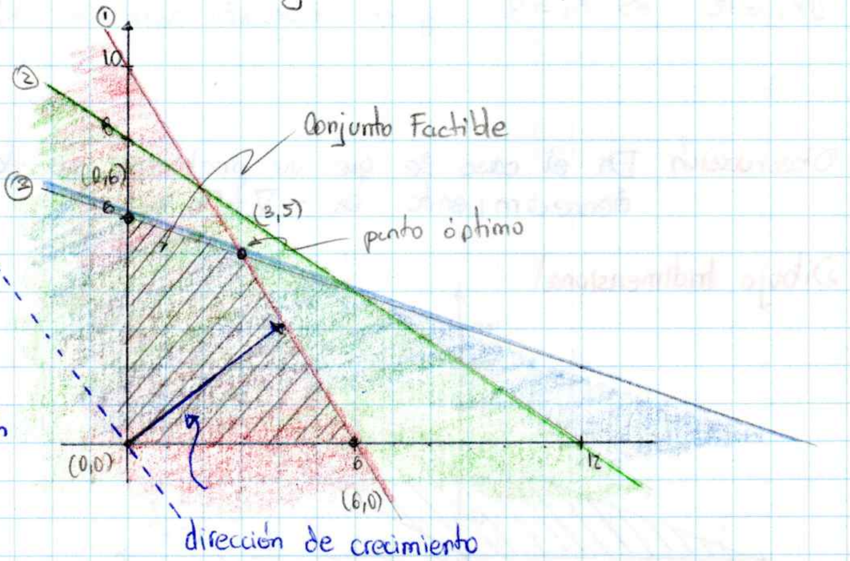
- $5x_1 + 3x_2 \leq 30$
- $2x_1 + 3x_2 \leq 24$ Restricciones
- $1x_1 + 3x_2 \leq 18$
- $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ Restricciones de positividad

En forma unificada, escribiremos el modelo

Máx $z = 8x_1 + 6x_2$
sujetas a las restricciones (sar)
1. $5x_1 + 3x_2 \leq 30$
$2x_1 + 3x_2 \leq 24$
$x_1 + 3x_2 \leq 18$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

CASO I = 30
CASO II = 36
CASO III = 54
CASO IV = 48

Resolución gráfica de este problema bivariado



F: me da todos los puntos de producción factibles para mi modelo (continuo)

z	x_1	x_2
0	0	0
48	6	0
36	0	6
	4	2

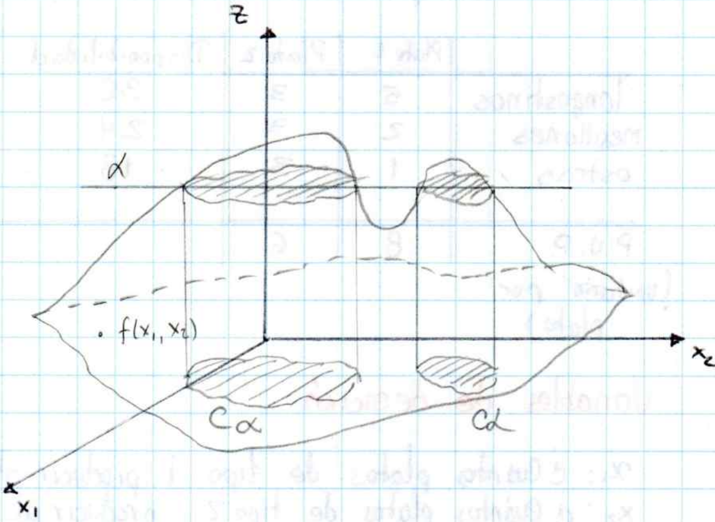
Usar

Paso 2: Usar las curvas de nivel de z y propiedades del ∇z

Se dice que el conjunto

$$C_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = \alpha\}$$

es la curva de nivel de valor α



Para el caso de nuestro problema

$$C_\alpha = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 8x_1 + 6x_2 = \alpha\}$$

($\alpha \geq 0$ por que z es el ingreso

en C_α son rectas perpendiculares de vector normal constante $\vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\nabla f(x_1,x_2) = \left(\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} \right)$$

El gradiente es el valor $\nabla f(x_1,x_2)$ que cumple que:

1) Es normal a las curvas de nivel
2) El gradiente $\nabla f(x_1,x_2)$ nos da localmente la dirección máximo de crecimiento $z = f(x_1,x_2)$

vértice = convexo 0
arista = convexo 1

En el caso del modelo $z = 8x_1 + 6x_2$ es

$$\nabla z = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

El punto óptimo de la curva.

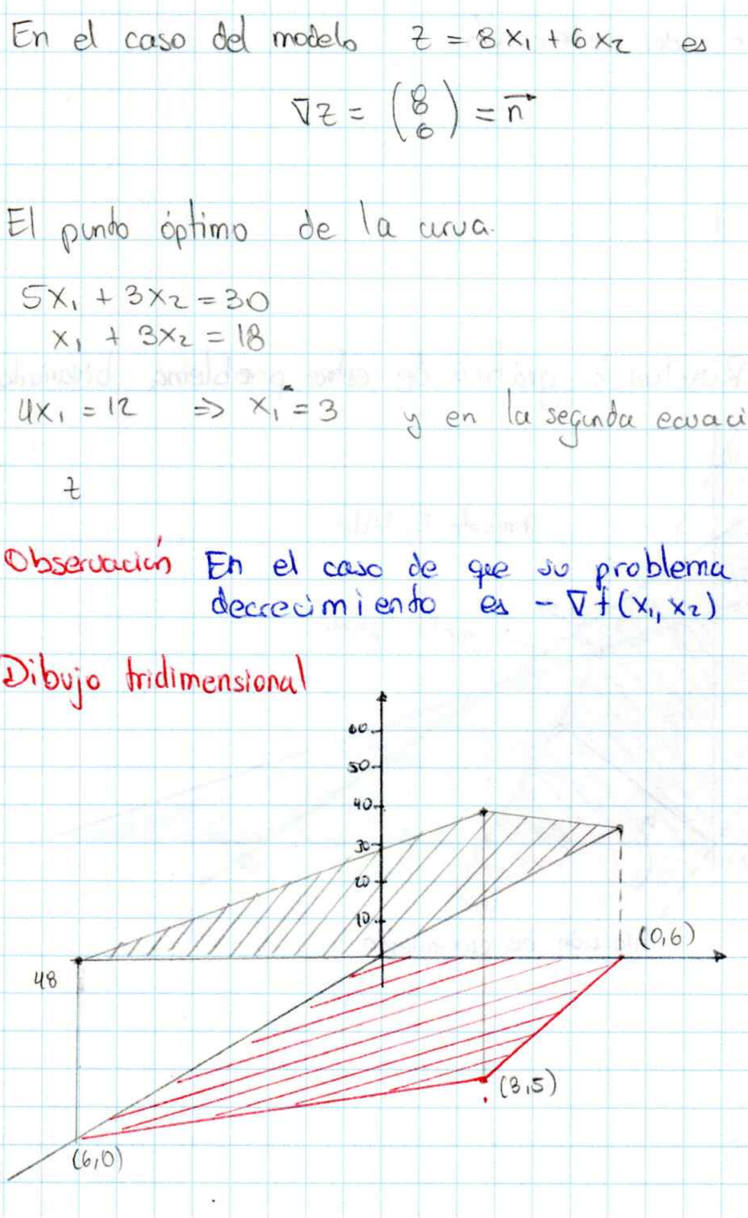
$$5x_1 + 3x_2 = 30$$
$$x_1 + 3x_2 = 18$$

$4x_1 = 12 \Rightarrow x_1^* = 3$ y en la segunda ecuación $x_2^* = 5$

z

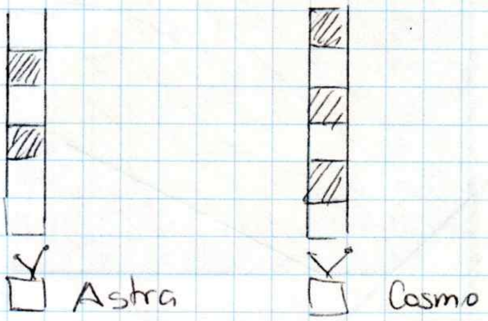
Observación En el caso de que su problema sea de minimización la dirección de máximo decrecimiento es $-\nabla f(x_1,x_2)$

Dibujo tridimensional



Modelo 1

La compañia ENGINOLA produce 2 modelos de televisores ASTRA y COSMO. Cada modelo se produce en una cadena de producción diferente



- La línea de producción de Astro tiene una capacidad diaria de 60 televisores y la de cosmo de 50 aparatos
  (Restricción de capacidad de producción)
- El aparato Astro requiere una hora de trabajo y uno de COSMO 2 horas de trabajo.

Se disponen diariamente de 120 horas de trabajo (recurso laboral) disponibles para ser asignadas a la producción de las dos cadenas

Un aparato Astro deja a la compañia una utilidad neta de 20 u.m. y de un COSMO es de 30 u.m.

Problema. ¿Cómo elaborar un plan de producción diario con una utilidad por venta máxima?

Desición: ¿Cuántos televisores de cada tipo (cosmo, Astro) se deben fabricar diariamente?

Variables de desición

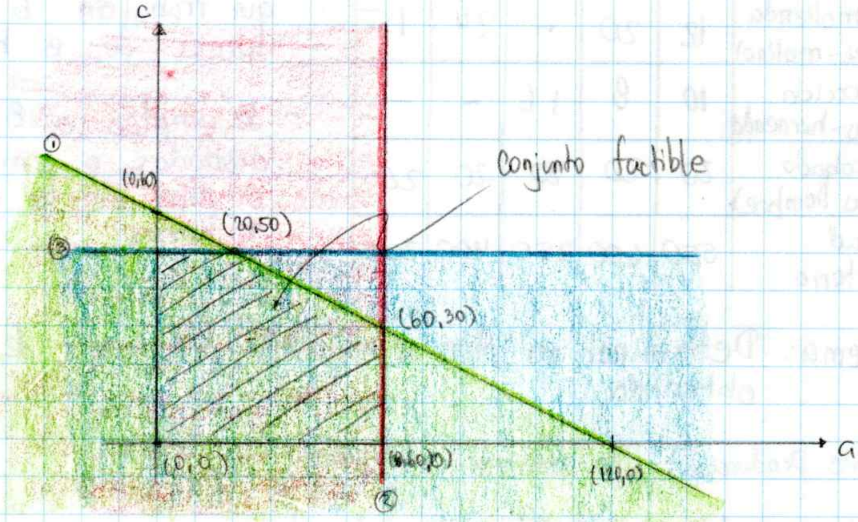
a : ¿Cuántos televisores ASTRA se debe producir al día?
c : ¿Cuántos televisores COSMO se debe producir al día?

Objetivo:
Maximizar la utilidad diaria por fabricación

Función objetivo

$$z = f(x_1, x_2) = 20\,(u.m./\cancel{\text{TA}})\, a\,(\cancel{\text{TA}}) + 30\,(u.m/\cancel{\text{TC}})\, c\,(\text{TC})$$
$$= 20a\,(u.m.) + 30c\,(u.m.)$$

$$\left.\begin{array}{ll} & z = 20a + 30c \\ ② & a \le 60 \\ ③ & c \le 50 \\ ① & a + 2c \le 120 \\ & a \ge 0,\ c \ge 0. \end{array}\right\}$$



z	a	c
0	0	0
1800	0	60
1200	60	0
2100	60	30
1900	20	50

Se maximiza con $a = 60$ y $c = 30$

Paso 2: Usando curvas de nivel

$$C_\alpha = \{ (a,c) \in \mathbb{R}^2 \mid 20a + 30c = \alpha \}$$

El vector perpendicular es

$$\nabla z = \vec{n} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Martes 16 de Noviembre de 2021

Ejercicio.

Minimizar $z = 2x - 3y$

s.o.r

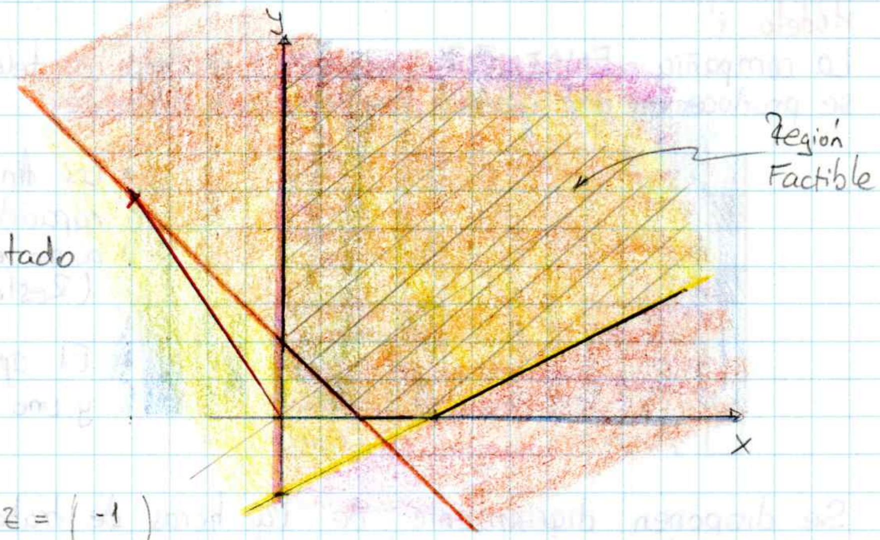
$x + y \geq 1$

$x - 2y \leq 2$

$x \geq 0,\ y \geq 0$

z_1 = problema no acotado

$z = -\infty$



$\nabla z = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $-\nabla z = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Consideremos Min $z_2 = x + 2y$ $-\nabla z = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

  solución optima $x^* = 1$

  $y^* = 0$

- $z_3 = x + y$

Min $z_3 = x + y$

s.o.r

$\nabla z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -\nabla z_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Hay un infinito número de soluciones, las que petenecen al segmento que une el punto $(1,0)$, con $(0,1)$

Modelo 2: Modelo de gestión de producción

Una fábrica puede producir 5 tipos de productos $(p_1, \dots, p_5)$ usandos 3 procesos de producción: moliendo, horneado o cocción y embalaje

- Luego de deducir los costos (materia prima, costos laborales, etc) se conoce la utilidad unitaria, así como los tiempos de utilización de los procesos para fabricar cada tipo de producto. Esta información viene en la siguiente tabla

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
molienda (horas-molino)	12	20	-	24	15
cocción (horas-horneado)	10	8	1.6	-	-
acabado (horas hombre)	20	20	20	20	20
Utilidad unitaria	550	600	350	400	200

- La fábrica dispone de 3 molinos y 2 hornos que trabajan 6 días a la semana en dos turnos de 8 horas
- Se emplea a 8 trabajadores para el proceso de acabados o embalaje. los que trabajan, los 6 días de la semana. durante un turno de 8 horas.

Problema: Determinar un plan semanal de producción de manera que se maximice la utilidad obtenida

Horizonte Producción: Una semana

Desición: ¿Cuántas unidades de cada tipo producir cada semana?

x_i = Cantidad del producto P_i a fabricar cada semana

$i = 1, \dots, 6$

Función objetivo Máx: $z = 550x_1 + 600x_2 + 350x_3 + 400x_4 + 200x_5$

Disponibilidad

Horas molino 288h, Horas horno: 192h Horas hombre: 384h

$$
P \begin{cases} \text{Máx } 550x_1 + 600x_2 + 350x_3 + 400x_4 + 200x_5 \\ \text{s.a.r} \\ 12x_1 + 20x_2 + 25x_4 + 15x_5 \leq 288 & \text{horas molino} \\ 10x_1 + 8x_2 + 16x_3 \leq 192 & \text{horas horno} \\ 20x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 20x_5 < 384 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}
$$

Luego de usar un paquete

$x_1^* = 12$, $x_2^* = 7.2$ $x_3^* = x_4^* = x_5^* = 0$ $z^* = 10\,920$ u.m

Modelo 3 : Modelo de una mezcla (Blending)

Se manofactura un aceite (producto final) mediante dos procesos. 1) refinamiento de aceites crudos y 2) su mezcla. Estos procesos se suponen CONSERVATIVOS (sin pérdida de masa)

Se utilizan 2 tipos de aceites : 2 aceites vegetales VEG1 y VEG2 y 3 aceites vegetales, OIL1, OIL2, OIL3.

Se supone además que el refinamiento se hace en 2 lineas distintas y que el costo de refinación puede ser despreciado

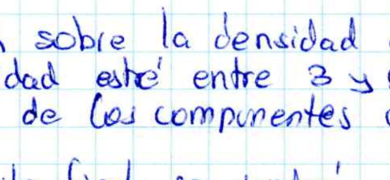
- En un mes se puede refinar hasta 200 toneladas de aceites vegetales y hasta 250 toneladas de aceites no vegetales.
- Existe una restricción sobre la densidad o dureza del producto final, pues se requiere que su densidad esté entre 3 y 6 (en las unidades respectivas) y supondremos que las densidades de los componentes de la mezcla, se mezclan linealmente.
- Una tonelada del aceite final se venderá a 150 u.m.

	VEG1	VEG2	OIL1	OIL2	OIL3
Costo	110	120	130	110	115
Dendidad	8.8	6.1	2.0	4.0	5.0.

Problema: Formulemos un problema de P.L. para decidir cómo elaborar el producto y cuántas unidades se debe producir para maximizar la utilidad semanal

Horizonte Planificación : 1 mes

Desición : ¿ Cuánta cantidad de cada aceite para la mezcla?



Variables de desición

VEG1 : Cantidad en toneladas del aceite VEG1 a utilizar

⋮

OIL3 : Cantidad en toneladas del aceite OIL3 a utilizar

Variables de estado

$$y = VEG1 + VEG2 + eIL1 + eIL2 + eIL3$$

Cantidad total del producto final a partir de las partes en la mezcla

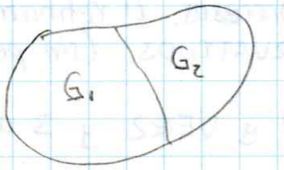
Viernes, 19 de noviembre de 2021

Obs. ¿Cómo plantear que una característica C de las componentes de una mezcla, se mezclen linealmente o proporcionalmente?

C → Octanaje, densidad, presión de vapor, reactividad, etc.

* * * * *

Ejemplo



	G_1	G_2
Octanaje	86	92
Cantidad (litros)	5	2

¿Cuál sería una aproximación lineal o proporcional del octanaje de la mezcla?

$$O_M = d_1 O_{G_1} + d_2 O_{G_2}$$

$$O_M = \frac{5}{5+2} O_{G_1} + \frac{2}{7} O_{G_2}$$

$$O_M = \frac{5}{7}(86) + \frac{2}{7}(92) = 87.71$$

Modelo

$$Z = 150y - 110 EG1 - 120 VEG2 - 130 eIL1 - 110 eIL2 - 115 eIL3$$

sor   Definir las variables de estado

$$y - VEG1 - VEG2 - eIL1 - eIL2 - eIL3 = 0$$

$$VEG1 + VEG2 \leq 200$$
$$eIL1 + eIL2 + eIL3 \leq 250$$
$$8.8\,VEG1 + 6.1\,VEG2 + 2.0\,eIL1 + 4.0\,eIL2 + 5.0\,eIL3 - 6y \leq 0$$
$$8.8\,VEG1 + 6.1\,VEG2 + 2.0\,eIL1 + 4.0\,eIL2 + 5.0\,eIL3 - 3y \geq 0$$
$$VEG1 \geq 0,\ VEG2 \geq 0,\ eIL1 \geq 0,\ eIL2 \geq 0,\ eIL3 \geq 0 \quad y \geq 0$$

← desigualdad redundante

Lunes 22 de noviembre de 2021

Modelo 4

Una metalúrgica produce dos tipos de acero A1 y A2 a partir de 3 metales M1, M2 y M3 usando la siguiente información

Aceros	Especificaciones técnicas	PUP
A_1	No menos del 60% de M_1 y no más del 30% de M_2	20
A_2	Exactamente el 10% de M_3 y no más de 40% de M_2	15

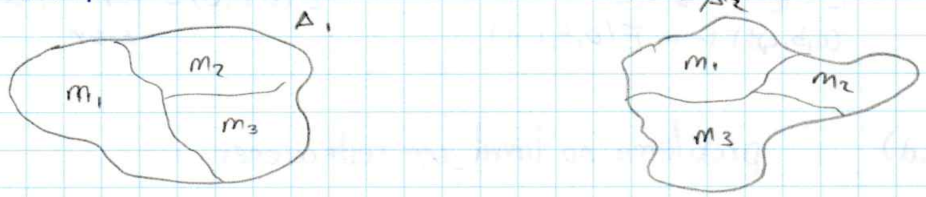
Materiales	Disponibilidad	Costo de adquisición
M_1	200	8
M_2	150	6

H_3	60	3

Problema. Formar un modelo de programación lineal para determinar un plan de producción semanal de utilidad máxima

Horizonte de planificación: Una semana.

Desición: Cantidad de metal m_i hay que poner en la aleación A_j $j=1,2$ de metales m_i, $i=1,2,3$.



Variables de desición

$$\begin{array}{c|cc} & A_1 & A_2 \\ \hline H_1 & & \\ H_2 & & \\ H_3 & & \end{array} = X \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

aceros

x_{ij}: cantidad del metal H_i en el acero A_j en toneladas

$i=1,2,3$, $j=1,2$.

Variables de estado

A_j: Cantidad de toneladas producidas del primer tipo de acero en la semana $j=1,2$.

$$\text{Máx } z = 20A_1 + 15A_2 - 8(x_{11}+x_{12}) - 6(x_{21}+x_{22}) - 3(x_{31}+x_{32})$$

sar.

$$A_1 = x_{11}+x_{21}+x_{31}$$
$$A_2 = x_{12}+x_{22}+x_{32}$$

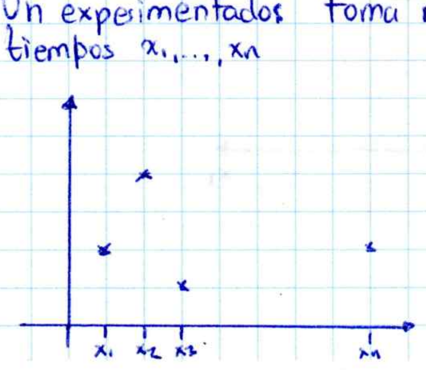
$$x_{12}+x_{11} \leq 200$$
$$x_{21}+x_{22} \leq 150$$
$$x_{31}+x_{32} \leq 60$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i=1,2,3 \quad j=1,2.$$

$$x_{11} \geq 0.6A_1$$
$$x_{21} \leq 0.3A_1$$
$$x_{31} = 0.1A_1$$
$$x_{32} \leq 0.4A_2$$

Modelo 5: Modelo de regresión

Un experimentador toma medidas $Q_1,\dots,Q_n$ de una magnitud desconocida $Q(x)$ en tiempos $x_1,\dots,x_n$



Él supone que una buena forma de $Q(x)$ es mediante funciones de la forma

$$\tilde{Q}(x) = a + bt + c\,\text{sen}(x) + d\cos(x)$$

Los escalares a,b,c,d se dicen parámetros

Observación: $\tilde{Q}(x) \in span\{1, x, sen(x), cos(x)\}$
Modelo de regresión lineal.

Problema: Buscar los mejores valores de los parámetros a, b, c y d de manera que

$$E(a,b,c,d) = \min_{1 \leq i \leq n} \{ |\tilde{Q}(x_i) - a + bx_i + c\,sen(x_i) + d\cos(x_i)| \}$$

Observemos que

$$E : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$
$$(a,b,c,d) \mapsto E(a,b,c,d)$$

Es no lineal

$$E(0,0,0) = \min_{1 \leq i \leq n} |\tilde{Q}(x_i)| \neq 0$$

$$\left\{ \min_{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4} E(a,b,c,d) \right.$$ problema no lineal con restricciones

Transformar este problema de optimización no lineal en uno que sea equivalente y de operadores lineales

$$\min z = E$$
sor

$$|Q_i - a - bx_i - c\,sen(x_i) - d\cos(x_i)| \leq E \quad i = 1, \dots, n$$
$$a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad E \geq 0$$

$$\left| \begin{array}{l} \min z = E \\ Q_i - a - bx_i - c\,sen(x_i) - d\cos(x_i) \leq E \\ Q_i - a - bx_i - c\,sen(x_i) - d\cos(x_i) \geq -E \\ i = 1, \dots, n \\ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad E \geq 0 \end{array} \right.$$

Observación: Si en el

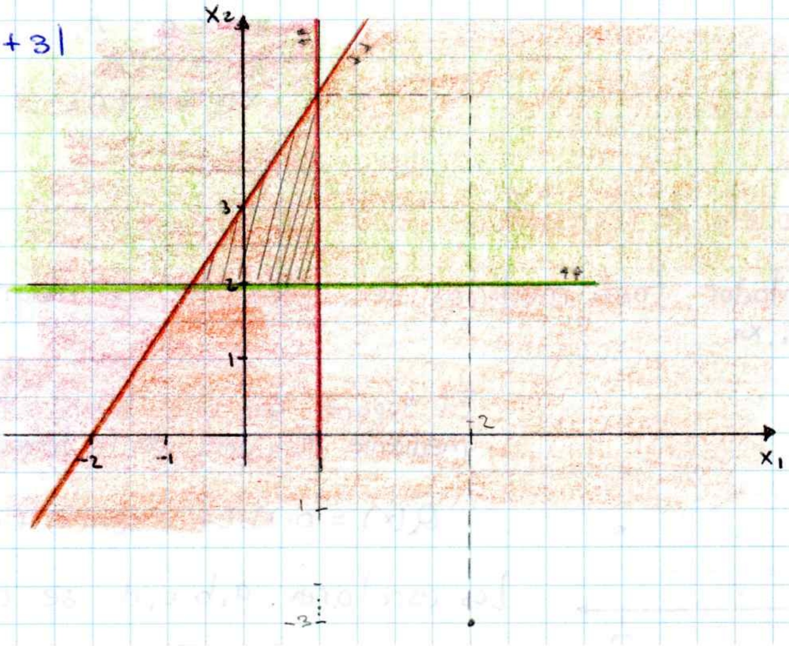
$$a + bx_{n+1} + c\,sen(x_{n+1}) + d\cos(x_{n+1}) \leq 10$$

Martes 23 de noviembre de 2021

Modelo 6: Modelo No Lineal

Consideremos el modelo de optimización no lineal con restricciones lineales.

$$\left| \begin{array}{l} \max z = |x_1 + 2| + |x_2 + 3| \\ \text{sor} \\ 2x_1 - x_2 \geq -3 \\ \quad x_1 \leq 1 \\ \quad\quad x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0 \end{array} \right.$$



$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

distancia de Manhatan o
distancia del taxi

Para linealizar este problema hay que definir una función lineal objetivo equivalente

Obs. $|x| = \text{Máx}\{0, x\} + \text{Máx}\{0, -x\}$

$|x| = x^+ + x^-$ con $\begin{cases} 0 \leq x^+ \\ x \leq x^+ \end{cases}$ y $\begin{cases} 0 \leq x^- \\ -x \leq x^- \end{cases}$

Si tomamos en cuenta esto:

$$\begin{aligned}
&\text{Máx } z = y_1^+ + y_1^- + y_2^+ + y_2^- \\
&\text{sor} \\
&-2 + x_1 \leq y_1^+ \\
&0 \leq y_1^+ \\
&2 - x_1 \leq y_1^- \\
&0 \leq y_1^- \\
&x_2 + x_3 \leq y_2^+ \\
&-x_2 - x_3 \leq y_2^- \\
&2x_1 - x_2 \geq -3 \\
&x_1 \leq 1 \\
&x_2 \geq 2 \\
&x_1 \geq 0,\ y_1^+ \geq 0,\ y_2^+ \geq 0,\ y_2^- \geq 0.
\end{aligned}$$

Modelo 7: Gestión de personal

El dueño de un almacén tiene el siguiente problema. Desea saber cuántos empleados debe contratar y qué días de la semana

- Minimizar los gastos de personal
- Satisfacer una demanda de personal diaria que debe laborar cada día de la semana

Las condiciones son:

i) El conoce la demanda diaria de personal que por lo menos debe estar en el almacen.

Día	L	Ma	M	J	V	S	D
Requerimiento de personal	20	13	10	12	16	18	20

ii) Cada empleado tiene que trabajar 5 días a la semana y tener 2 días libres consecutivos
Un emple
Si un empleado tiene el sábado como día laborable gana una compensación de 25 unidades monetarias y si trabaja el domingo 35 (um)

Problema: Cómo ayudar a decir a este dueño del almacén para los costos semanales de su nómina

Preprocesamiento

En este problema se requerirá saber como un empleado trabaja 5 días a la semana y descanza dos días consecutivos. Vamos a llamar a estos esquemas de trabajo (turnos)

Turno	L	Ma	M	J	V	S	D	Costo
1	1	1	1	1	1	0	0	300 $
2	0	1	1	1	1	1	0	325 $
3	0	0	1	1	1	1	1	360 $
4	1	0	0	1	1	1	1	360 $
5	1	1	0	0	1	1	1	360 $
6	1	1	1	0	0	1	1	360 $

7	1	1	1	1	0	0	1	335

Variables de desición

x_i: Cantidad de trabajadores que deben contratarse para que trabajen en el turno i
$i = 1, \ldots, 7$.

$$\begin{cases} \text{Min } z = 300x_1 + 325(x_2 + 360(x_3 + x_4 + x_5 + x_6) + 335x_7 \\ \text{sor} \\ x_1 \quad + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 20 \\ x_1 + x_2 \quad \cdots \quad + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 20 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 7 \end{cases}$$

Resolviendo el problema

$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 2,$
$x_4^* = 7, \quad x_5^* = 5, \quad x_6^* = 4$
$x_7^* = 2$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i = 22$$

Calidad de la solución

L	Ma	M	J	V	S	D
20	13	10	13	16	18	20

↑ trabajador en exceso.

$z^* = 7.750$ um.

$$\text{Min } z = c^T x \qquad x \geq 0 \begin{cases} x_i \geq 0 \\ i = 1, \ldots, n \end{cases}$$
sor
$Ax \geq d$
$x \geq 0$

$d \in \mathbb{Z}^m$

Problema multiobjetivos.

Min $\{f_1(x), f_2(x)\}$ (Biobjetivo)

f_1: distancia, f_2: tiempo

Orden lexicográfico

Si la matriz A es unimodular, la solución del problema es entera (problemas de transporte

Martes, 30 de noviembre de 2021

Modelo 8: Modelo de corte de material (optimo, cutting stock problem)

Problema unidimensional: varilla de acero
fibra óptica

Una industria de producción de electrodomesticos, usa láminas de acero de tamaño estándar. (Stock), las mismas que llegan en tamaños estandarizados de: 72, 46 y 36 pulgadas (in) de ancho, a un costo unitario de 28 um., 19 um, 15 um, respectivamente.
En el proceso de manofactura se requieren láminas de 8 anchos diferentes y en una cantidad dada en la siguiente tabla.

Ancho	60"	56"	42"	38"	34"	24"	15"	10"
Requerimiento	500	400	300	450	350	100	800	1.000

Se dispone de 1600 rollos de 72", 10.000 rollos de 48" y 10.000 rollos de 36" (H.P. dias)

(10) Problema. Formular un problema de PL que permita determinar la manera de satisfacer

la demanda de láminas pequeñas, cortando o usando el menor número de rollos del stock. Es decir, minimizar el costo de los rollos utilizados.

Hipótesis: El corte es conservativo

Preprocesamiento:

A: 72"

B: 48"

C

Definimos una matriz $P_{8\times m}$ donde m es el número total de patrones de corte posible y las filas están asociadas a las medidas solicitadas.

$$p^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{8j} \end{pmatrix}$$ donde a_{ij} = número de veces que se puede cortar la lámina i, en el patrón j.

	$A^1=p^1$	A^2	A^3	⋯	A_{27}	B_1	B_2	⋯	B_9	C_1	⋯	C_9
60"	1	0	0	⋯	0	0	0		0	0		0
56"	0	1	1		⋮	0	0		⋮	⋮		⋮
42"	0	0	0			1	0					
38"	0	0	0			0	1			0		
34"	0	0	0			⋮	0			1		
24"	0	0	0				⋮					⋮
15"	0	1	0						0			0
10"	1	0	1		7	0	1		4			3
	↓	↓	↓			↓	↓		↓	↓		↓
	$r_1=2$	$r_2=1$	$r_3=6$		$r_{27}=2$	$r_{B_1}=6$	$r_{B_2}=0$		$R_{B_9}=8$	2		6

Variables de desición: A_i, B_i, C_i, el número de veces que se corta el patrón i $(i=1,\dots,27 \mid i=1,\dots,9 \mid i=1,\dots,9)$

$$\text{Min } z = 28\sum_{i=1}^{27} A_i + 19\sum_{i=1}^{9} B_i + 15\sum_{i=1}^{9} C_i$$

sar

$$\sum_{i=1}^{27} A_i \leq 1\,600$$

$$\sum_{i=1}^{9} B_i \leq 10\,000$$

$$\sum_{i=1}^{9} C_i \leq 10\,000$$

$$P\begin{pmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 500 \\ 400 \\ \vdots \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$A_i \geq 0,\ i=1,\dots,27 \qquad B_i \geq 0,\ i=1,\dots,9 \qquad C_i \geq 0,\ i=1,\dots,9$$

Observación: Puede plantearse el problema con tres objetivos.

1)
2) Minimizar los residuos
3) Minimizar el número de rollos usados

Solución óptima

$$\sum_{i=1}^{27} A_i^* = 1600$$

$$\sum_{i=1}^{9} B_i^* \quad 96{,}428$$

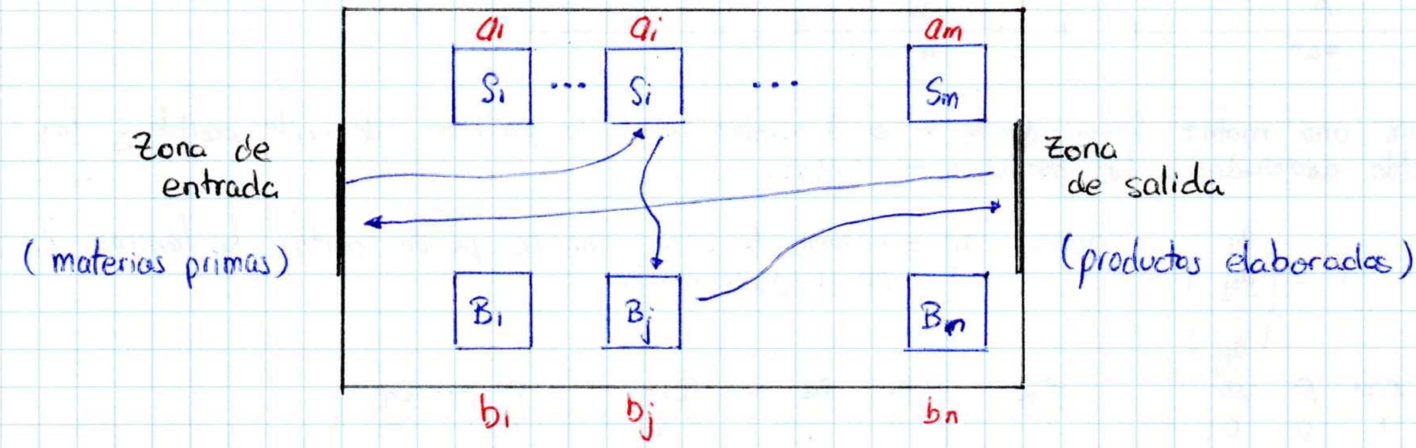
$$\sum_{i=1}^{9} C_i^* = 0$$

$$z = 46\ 633{,}15$$

Observación: Packing and cutting

Viernes 3 de diciembre de 2021

Modelo 9: Organización del transporte de un carguero en una bodega



En un gran depósito se usa un carguero eléctrico para transportar cajas desde una zona de entrada a m lugares de almacenamiento de materias primas $S_1, S_2, \dots, S_m$. Una vez que el carguero deja una caja de materias primas, se dirige a una de las bodegas $B_1, \dots, B_m$ que contienen cajas de productos elaborados, toma alguna caja de alguna de estas bodegas y la lleva a la zona de salida. Luego regresa a la zona de entrada y recomienza el proceso.

Datos:

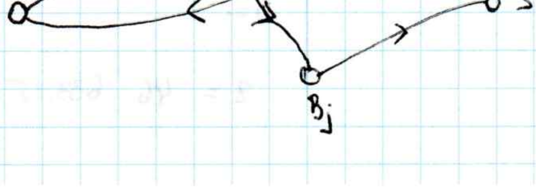
- a_i: número de cajas que el carguero debe ubicar en S_i $(i=1,\dots,m)$
- b_j: número de cajas con productos elaborados que el carguero deberá sacar de B_j a la zona de entrada. $(j=1,\dots,n)$
- t_{ij}: matriz de tiempos que toma el carguero para desplazarse de S_i a B_j $\forall i,j$.
- t_{se}: ~~matriz de~~ tiempos que le toma al cargero ir de la zona de salida a la entrada.
- t_{ei}: tiempo desde la entrada a S_i $i=1,\dots,m$
- t_{js}: tiempo de B_j a la salida.

Hipótesis

i) Supongamos que $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (tipo de hipótesis $\Rightarrow$ oferta = demanda)

ii) $\{S_i : i=1,\dots,m\} \cap \{B_j : j=1,\dots,n\} = \emptyset$

Problema: Determinar la forma en que se debe transportar las cajas dentro del depósito para minimizar el tiempo total de transporte.



Desición: cuántas veces repetir el circuito $\forall i \forall j$.

Variables de desición x_{ij}: cantidad de veces que el carguero va de S_i a B_j $\forall i,j$

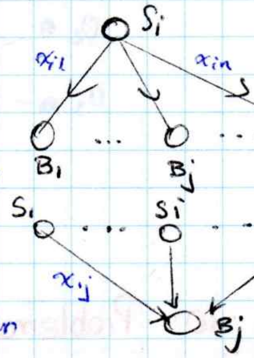
$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} B_1 \cdots & B_j \cdots & B_n \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ \vdots \\ S_i \\ \vdots \\ S_m \end{array} & \begin{pmatrix} x_{11} & x_{1j} & x_{1n} \\ & & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \end{array} \quad \begin{array}{l} \to a_1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$\downarrow b_1$

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^{m} t_{ei}\, a_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} t_{ij} + \sum_{j=1}^{n} t_{js}\, b_j + t_{se}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)$$

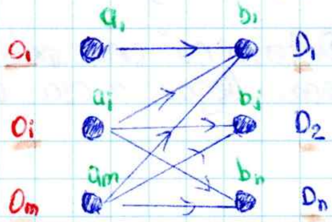
sa

- $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ $\quad i = 1,\dots, m$ (Ecuaciones de oferta)
  El cargero debe estar exactamente a_i veces en S_i
- $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ $\quad j = 1,\dots, n$ (Ecuaciones de oferta)
  El cargero debe estar b_j veces en B_j
- $x_{ij} \geq 0$



Problema general de transporte

Se consideran m orígenes (fábricas, depósitos, generadores eléctricos, reservorio de agua) $O_1, O_2, \dots, O_m$ con una oferta de un producto a_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ y por otro lado, m destinos o clientes $D_1, D_2, \dots, D_n$ con una demanda de producto $b_1, b_2, \dots, b_n$



Supondremos que c_{ij} es el costo unitario de transporte de un producto del O_i a D_j

$$C = (c_{ij})_{m\times n}$$

El problema de transporte consiste en determinar un plan de distribución del producto de los orígenes a los destinos de manera que se cumpla la demanda sin exceder la oferta

Hipótesis

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_m}_{\text{Oferta total}} \geq \underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_j}_{\text{Demanda total}}$$

Desiciones: ¿cuántas unidades de producto debo enviar de O_i a D_j

x_{ij}: cantidad de unidades de producto que se envían de O_i a D_j

$i = 1, \dots, m$,
$j = 1, \dots, n$.

$$\text{Min: } z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

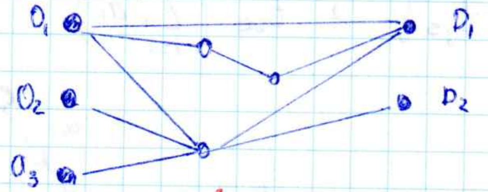
$c \odot x$
$\uparrow$
producto tensorial

sa

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i & i=1,\dots,m \quad \text{(lo que sale de un origen } O_i \text{, no debe sobrepasar su oferta)} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j & j=1,\dots,n \quad \text{(se debe satisfacer la demanda del cliente } b_j\text{)} \\ x_{ij} \geq 0 & \end{array}\right.$$

Observación: Se cumple que si dado $a_i, b_i \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x_{ij}^* \in \mathbb{Z}^+$

Ojo. Problema de trasbordo (transhipment)



puntos de paso. su oferta y demanda es cero.

Modelo 10: Problema que no cumple los supuestos de la programación lineal

Una empresa fabrica automóviles y vehículos 4x4 y considera que sus clientes son personas de ingresos medios o altos.
La empresa emprende en un programa de publicidad comprando spots en televisión de 20 segundos en programas de comedia o deportivos. La información sobre la audiencia femenina y masculina.

	Comedia	Deportivos
Audiencia Femenina	7 up	2 up
Audiencia Masculina	2 up	12 up
costo spot	5 um	10 um

Se desea que los spots permitan llegar a una audiencia de 28 up de mujeres y 24 up de hombres

Problema: Determinar una política de compra de spots para llegar a esa audiencia al costo mínimo

Variables de desición

x_c: número de spots en comedia a contratarse

x_d: número de spots en programas deportivos a comprarse

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Min } z = 5x_c + 10x_d \\ \text{sor} \\ 7x_c + 2x_d \geq 28 \\ 2x_c + 12x_d \geq 24 \\ x_c \geq 0, \quad x_d \geq 0 \\ x_c^* = 3.6 \quad \text{y} \quad x_d = 1.4 \end{array}\right.$$

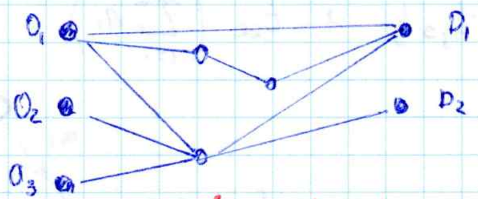
$z^* = 32$ um.

- La proporcionalidad de la audiencia no es un buen criterio de modelización
- La aditividad no es un buen criterio
- Las soluciones no son números enteros.
- En la práctica este problema no es determinístico

$$\left\{\begin{array}{lll} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i & i=1,\dots,m & \text{(lo que sale de un origen } O_i\text{, no debe sobrepasar su oferta)} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j & j=1,\dots,n & \text{(se debe satisfacer la demanda del cliente } D_j\text{)} \\ x_{ij} \geq 0 & & \end{array}\right.$$

Observación Se cumple que si dado $a_i, b_i \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x_{ij}^* \in \mathbb{Z}^+$

Ojo. Problema de trasbordo (transhipment)



puntos de paso, su oferta y demanda es cero.

Modelo 10: Problema que no cumple los supuestos de la programación lineal

Una empresa fabrica automóviles y vehículos 4x4 y considera que sus clientes son personas de ingresos medios o altos.

La empresa emprende en un programa de publicidad comprando spots en televisión de 20 segundos en programas de comedia o deportivos. La información sobre la audiencia femenina y masculina.

	Comedia	Deportivos
Audiencia Femenina	7 up	2 up
Audiencia Masculina	2 up	12 up
costo spot	5 um	10 um

Se desea que los spots permitan llegar a una audiencia de 28 up de mujeres y 24 up de hombres

Problema Determinar una política de compra de spots para llegar a esa audiencia al costo mínimo

Variables de desición

x_c: número de spots en comedia a contratarse

x_d: número de spots en programas deportivos a comprarse

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Min } z = 5x_c + 10x_d \\ \text{sar} \\ 7x_c + 2x_d \geq 28 \\ 2x_c + 12x_d \geq 24 \\ x_c \geq 0,\ x_d \geq 0 \\ x_c^* = 3.6 \quad \text{y} \quad x_d = 1.4 \end{array}\right.$$

$z^* = 32$ um.

- La proporcionalidad de la audiencia no es un buen criterio de modelización
- La aditividad no es un buen criterio
- Las soluciones no son números enteros.
- En la práctica este problema no es determinístico

Paradoja: Pese a todo, se usa la programación lineal en publicidad.

Martes 7 de diciembre de 2021

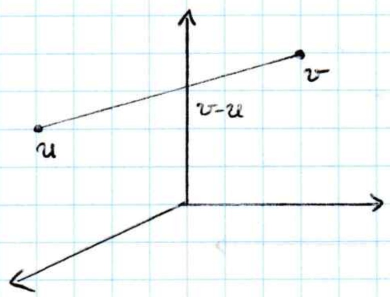
CAPITULO 2: GEOMETRIA DE LA P.L.

2.1 Conjuntos convexos.

Observación Trabajaremos con el espacio vectorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ y la norma $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Definición: Si u y $v \in \mathbb{R}^n$, se define el segmento cerrado que une u y v, al subconjunto de $\mathbb{R}^n$ definido por

$$[u,v] = \{ u + \lambda(v-u) : \lambda \in [0,1] \}$$



Análogamente, el segmento abierto que une u y v se define por

$$(u,v) = \{ u + \lambda(u-v) : \lambda \in]0,1[\}$$

es tal que $u, v \notin (u,v)$

Observación Es claro que $[u,v] = \{ (1-\lambda)u + \lambda v : 0 \leq \lambda \leq 1 \}$

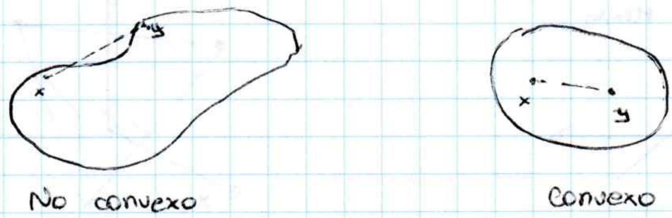
$$[u,v] = \{ \lambda_1 u + \lambda_2 v : \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \}$$

Definición: Un subconjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice convexo si

$$\forall\, x, y \in C \quad \forall \lambda \in [0,1] \text{ se cumple que } (1-\lambda)x + \lambda y \in C.$$

Dicho de otra forma:

$$\forall x, y \in C, \text{ se tiene que } [x,y] \subseteq C$$



No convexo Convexo

Ejemplos

1) $\emptyset$ es un conjunto convexo
2) $x \in \mathbb{R}^n$ es convexo pues en la definición, no se requiere $x \neq y$.

$$(1-\lambda)x + \lambda x = x \in \{x\} \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

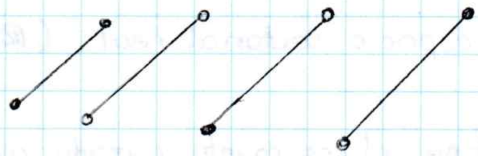
Definición Sea C un convexo de $\mathbb{R}^n$, se llama dimensión de C al número entero no negativo notado $\dim(C)$ y definido como la dimensión mínima de una variedad afín que contiene a C

variedad afín = subespacio vectorial + $\{x\}$ $\rightarrow$ es la traslación de un subespacio vectorial

Ejemplos

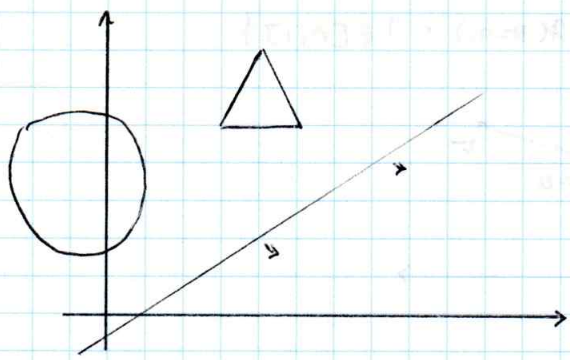
1) $C = \{x\}$ La variedad de dimensión mínima que contiene a $C = \{x\}$ es $\{\vec{0}\} + \{x\}$
$\dim(\{x\}) = 0$

2)

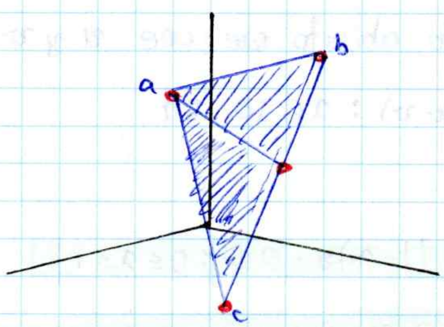


Una variedad de la recta será la misma recta desp

3)



4)



$C = \{a\} = \dim(C) = 0$

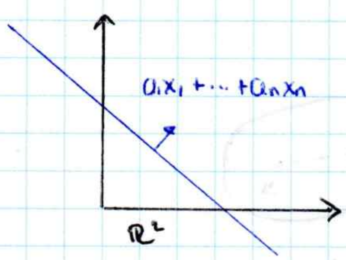
$C = [a, b] = \dim C = 1$

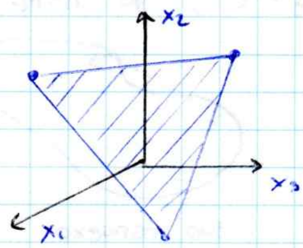
$C = \{$ cara o faceta de P
$\dim(C) = 2$

Definición Sea $a \in \mathbb{R}^n$ con $a \neq 0$, se llama hiperplano afín de vector normado a, al conjunto

$$H = \{ x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \alpha \} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$H = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = \alpha \}$$





Problema: Mostrar que H es convexo y $\dim(H) = n-1$

Sea $x, y \in H$ y $\lambda \in [0,1]$ P.D. $(1-\lambda)x + y\lambda \in H$

$$a^T[(1-\lambda)x + \lambda y] = (1-\lambda)a^T x + \lambda a^T y = \alpha \in H$$

Es claro que $a^T x = 0$ este es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n-1$

$$H_L = \{ x \in \mathbb{R}^n : x_1 a_1 + \dots + a_n x_n = 0 \}$$

con $a \neq 0$ es un espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ con dimensión $n-1$.
Luego $H_1 + \{\alpha\} = H$ y $\dim(H) = n-1$

Definición Si $a \in \mathbb{R}^n$ y $a \neq 0$ se llama semiespacio S de vector normal a al subconjunto de $\mathbb{R}^n$

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq \alpha \}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ dado.

Propiedad. Un semiespacio es un subconjunto convexo y $\dim(S) = n$

$S = \{ x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq \alpha \}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

P.D. $x, y \in S$ y $\forall \lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)x + \lambda y \in S$

$$a^T[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq \alpha = (1-\lambda)a^T x + \lambda a^T y \leq (1-\lambda)\alpha + \lambda\alpha \leq \alpha$$

Observación Las soluciones de desigualdades lineales son conjuntos convexos

Definición Sea $\{x_1, \dots, x_p\}$ un subconjunto finito de vectores de $\mathbb{R}^n$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$, y $\sum_{i=1} \alpha_i = 1$, entonces el vector

$$y = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$$

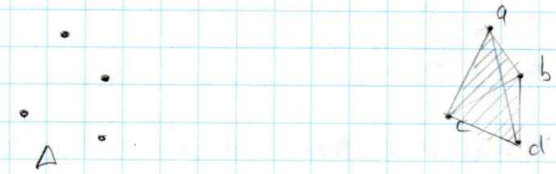
se dice una combinación lineal finita convexa de puntos de $\mathbb{R}^n$, o un baricentro de $x_1, \dots, x_p$

Definición Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ cualquiera se llama envolvente convexa de A al conjunto notado por $\mathrm{Emc}(A)$ y definido por

$$\mathrm{Emc}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^n : y \text{ es combinación lineal convexa finita de}$$

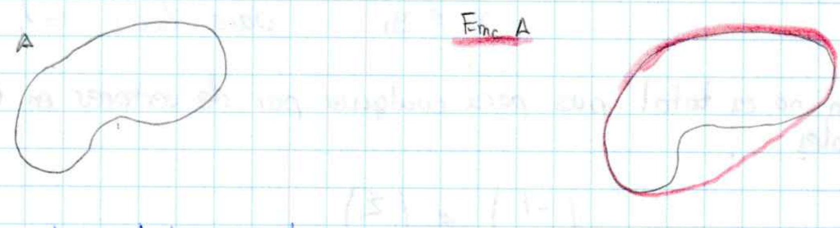
Observación $\mathrm{Emc}(A)$ es una convexización de A

Ejm 1



$x = 1\,x$
$\lambda_1 \geq 0$
$\lambda_1 = 1$

Ejm 2



Teorema: La intersección arbitraria de convexas es convexa

Demostración
Sea $\{ C_i \subseteq \mathbb{R}^n : i \in I \}$ una familia arbitraria de conjuntos convexos

$$I \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$
$$i \longmapsto C_i$$

Si $\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$, entonces es convexo por definición

Supongamos que $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$. P.D. $\bigcap C_i$ es convexa.

Sea $x, y \in C$ por definición de la intersección $x, y \in C_i$ $\forall i \in I$ pero C_i es convexo. Por lo tanto, $[x, y] \subseteq C_i$ para todo $i \in I$, es decir

$$[x, y] \subseteq \bigcap_{i\in I} C_i = C$$

Propiedad a) $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$, $Env(A)$ es un conjunto convexo

b) C es un conjunto convexo si y solo si $C = Env(C)$

c) La envolvente convexa de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A

$$Env(A) = \bigcap_{\substack{A \subseteq D \\ D \text{ es convexo}}} D$$

Lunes, 13 de diciembre de 2021

Ejemplos: sea $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i\}$ $i = 1, \ldots, m$ un sistema de m ecuaciones lineales (hiperplanos afines de $\mathbb{R}^2$) $(a_i \neq 0)$ $i = 1, \ldots, m$

Definamos

$$H = \bigcap_{i=1}^{m} H_i = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b\}$$

donde $A = (a_{ij})_{m\times n}$
Como los H_i son convexos, entonces H es convexo, el conjunto solución de un sistema lineal de ecuaciones es un conjunto convexo

② Sea $S_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \mid \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i \leq b_i\}$ con $i = 1, \ldots, m$ una familia de semiespacios afines, (es decir un sistema de desigualdades lineales
Como cada S_i es un semiespacio $(a_i \neq 0)$

$$S = \bigcap_{i=1}^{m} S_i$$

entonces el conjunto solución de cualquier sistema de desigualdades lineales es convexo.

Definición Se define el orden en $\mathbb{R}^n$ $x \leq y$ si y solo si

$$x_i \leq y_i \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n$$

Observación: Este orden no es total pues para cualquier par de vectores en $\mathbb{R}^n$, x, y no son comparables

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} \nleq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con esta definición

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

es convexo.

Observación Si $F = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b$ y $Cx \leq d\}$ con $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$

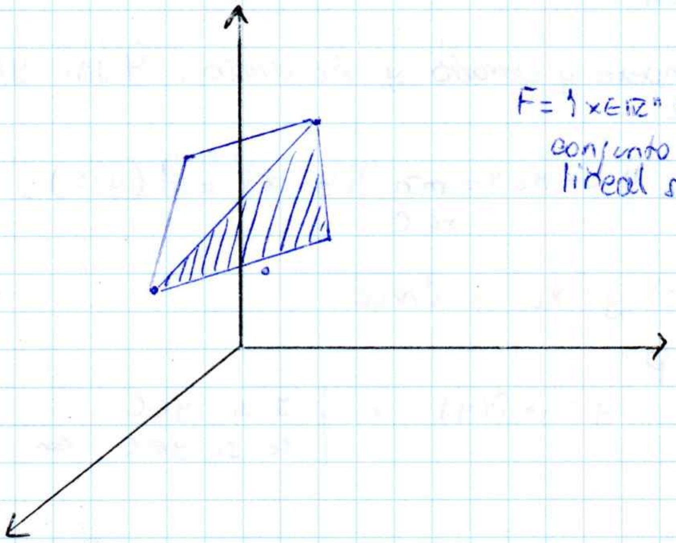
Por los ejemplos (1) y (2)

$$F = H \cap S \Rightarrow F \text{ es convexo}$$

Propiedad de la programación lineal

1) Todo conjunto factible de un problema de programación es un conjunto convexo

Definición La intersección de un número finito de semiespacios se dice poliedro

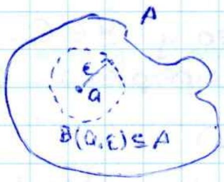


$F = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$
conjunto factible en la programación lineal siempre es un poliedro.

Definición Dado $A \subseteq \mathbb{R}^m$

- Se dice que $a \in A$ es un punto interior de A si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(a,\varepsilon) \triangleq B_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|a - x\| < \varepsilon\}$$



Notación: $\mathring{A} = \{x \in A : x \text{ es un punto interior de } A\}$

> Un punto $a \in \mathbb{R}^n$ se dice de frontera si $\forall \varepsilon > 0$ se cumple que

$$B(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad y \quad B(a,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$$

Notación: $a \in Fr(A)$

> A se dice un conjunto cerrado si $Fr(A) \subseteq A$, es decir A es cerrado si incluye todos sus puntos de frontera

> A se dice abierto si $\mathring{A} = A$

> A es abierto si y solo si A^c es cerrado
> La unión arbitraria de abiertos es abierta
> $\emptyset$ es abierto y cerrado.
> La intersección arbitraria de cerrados es cerrado
> A es acotado si existe $M > 0$ tal que

$$\forall x \in A \quad \|x\| \le M$$

> Un compacto en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y acotado

Observación: Todo poliedro es cerrado

Al modelar un problema de programación lineal se utilizan desigualdades no estrictas

Definición Un poliedro acotado se dice un politopo

Observación: Una condición necesaria para que un problema de PL sea no acotado es que su conjunto factible sea no acotado pero esta condición no es suficiente

Hiperplanos de aproximación

Teorema Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo y cerrado y no vacío. Y sea $y \notin C$, entonces existe $x_0 \in C$ tal que

$$\|y - x_0\| = \min_{x \in C} \|y - x\| = d(y, C)$$

Deber Mostrar que $x_0 \in Fr(C)$ y x_0 es único

$$P: \quad y \longmapsto P(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \in C \\ x_0 & \text{si } y \notin C \quad \text{con } x_0 \text{ tal que } \|y - x_0\| = d(y, C) \end{cases}$$

$P^2(y) = y \quad y \in \mathbb{R}^2$

Teoremas de separación

Sea C un conjunto convexo cerrado y no vacío y $y \notin C$, entonces existe $a \in \mathbb{R}^n$ $(a \neq 0)$ tal que

$$\langle a, y \rangle = a^T y < \inf_{x \in C} a^T x = \langle a^T, x \rangle$$

Viernes, 17 de diciembre de 2021

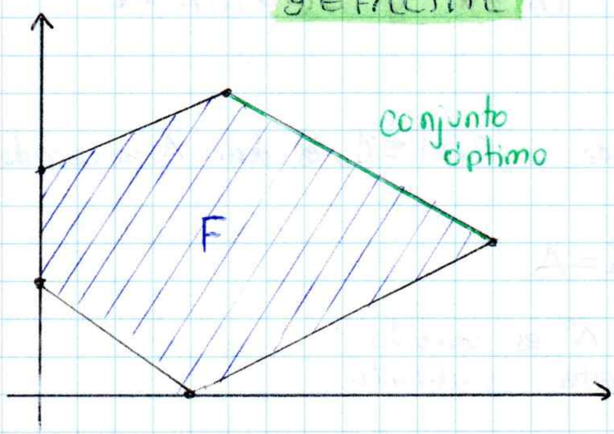
Definición Dado C un convexo no vacío y $y \in C$. Un hiperplano de apoyo del convexo C en y es todo hiperplano que:

i) «pasa por y» $(y \in H)$

ii) H deja a C estrictamente contenido en uno de los semiespacios S que define H

Observación Para que exista un hiperplano de apoyo de C convexo, en $y \in C$ necesitamos

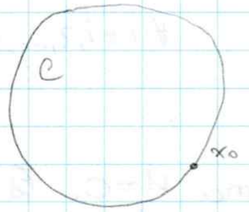
$$y \in Fr(C) \cap C$$



Teorema Sean C un conjunto cerrado, convexo y no vacío y $y \in Fr(C)$, entonces existe un hiperplano de separación de C en y

Demostración: Sea $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos que no pertenecen a C, es decir $y_k \notin C \quad \forall k \in \mathbb{N}$

tal que $\lim_{k\to+\infty} y_k = y$. Sean



$a_k = x_0^k - y_k \qquad a_k \neq 0 \qquad \|a_k\| = 1$

Sabemos por el teorema de separación que

$$a_k^T y < \inf_{x\in C} a^T x$$

Como $\{a_k\}$ es una sucesión acotada, se puede obtener una subsucesión convergente $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$

Notemos que $\forall x \in C$

$$a^T y = \lim_{k\to+\infty} a^T y_k \leq \lim_{k\in} a^T x \qquad (d_k \to 0)$$

es decir, $\forall x \in C \quad a^T y \leq a^T x$

Luego,

$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T(x-y) = 0\}$ es un hiperplano de apoyo de C en y,

- $y \in H$
- Como $a^T x \geq a^T y \quad \forall x \in C$, C está completamente contenido en uno de los semiespacios S que genera H

Sección: Puntos extremos en un convexo

Definición Se dice que $x \in C$ es un punto extremo del convexo C ($C \neq \emptyset$) si no existen $x_1, x_2 \in C$ ($x_1 \neq x_2$) tal que

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \qquad \text{con} \quad 0<\lambda<1$$

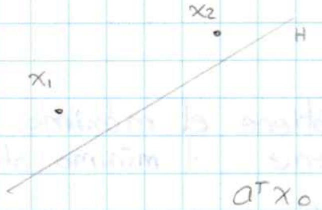
es decir, si no existen $x_1, x_2 \in C$ tal que $x \in\,]x_1, x_2[$

Teorema. Sea C un conjunto convexo no vacío y H un hiperplano de apoyo de C, entonces todo punto extremo del convexo $T = C\cap H$ es también un punto extremo de C.

Demostración
Sea x_0 un punto extremo de $T = H\cap C$ y supongamos que x_0 no es un punto extremo de C. Como x_0 supongo no es un extremo de C, existen $x_1, x_2 \in C$ con $x_1 \neq x_2$ tal que

$$x_0 = x_1\lambda + (1-\lambda)x_2 \qquad \text{con} \quad \lambda \in\,]0,1[$$

Y además supongamos que $a^T x_1 \geq c$ y $a^T x_2 \geq c$ (es decir ambos puntos, x_1 y x_2 están en uno de los semiespacios que define H).



Como $x_0 \in H\cap C = T$, entonces $a^T x_0 = c$ pero

$$a^T x_0 = \lambda \underbrace{a^T x_1}_{\geq c} + (1-\lambda) \underbrace{a^T x_2}_{\geq c} = c \qquad y \quad a^T x_2 = c$$

Definición Se dice que un subconjunto A no vacío de $\mathbb{R}^n$ es inferiormente acotado si existe $M>0$ tal que

$$x_i \geq M \qquad \forall i=1,2,\dots,n$$

para todo $x=(x_1,\dots,x_n)\in A$

Observación: En Programación lineal se toma $M=0$. Es decir, en PL un conjunto es acotado inferiormente está en el primer cuadrante.

Teorema: Sea $C\subseteq\mathbb{R}^n$ un convexo, cerrado y no vacío acotado inferiormente, entonces

Teorema más importante

i) C tiene al menos un punto extremo
ii) Todo hiperplano de apoyo de C, contiene al menos un punto extremo de C.

Demostración: Por inducción sobre la dimensión del convexo $C\subseteq\mathbb{R}^n$.

Lunes, 20 de diciembre de 2021

Sección: Optimización de funciones convexas

Definición: Sea $S\subseteq\mathbb{R}^n$ no vacío y $f:S\to\mathbb{R}$, se dice que $x^*\in S$:

i) Es un mínimo local de f si $\exists\varepsilon>0$ tal que $\forall x\in B_\varepsilon(x^*)\cap S$, se cumple que

$$f(x)\geq f(x^*)$$

ii) Es un mínimo global de f en S si

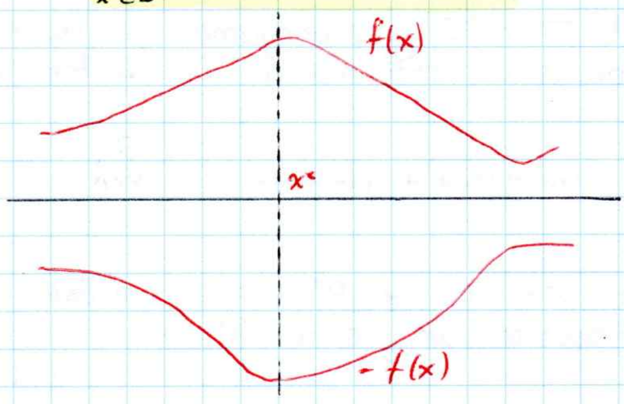
$$\forall x\in S \qquad f(x)\geq f(x^*)$$

Observación: Esta definición se aplica similarmente para máximo local de f sobre S y máximo global.

Observación Si $x^*\in S$ es un extremo global, entonces x^* es un extremo local de f

Observación. En general,

$$\max_{x\in S} f(x) = -\min\left[-f(x)\right]$$



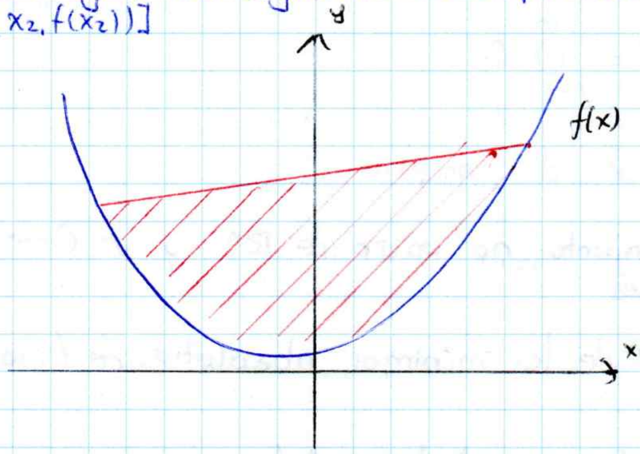
- Los puntos o vectores que están en S donde se obtiene el máximo absoluto de f sobre S son iguales a los puntos donde se obtiene el mínimo absoluto de $-f$
- Es indiferente minimizar o maximizar una función f sobre S

Definición Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convexo no vacío y f una función $f: C \to \mathbb{R}$, se dice que f es una **función convexa** sobre el convexo C si

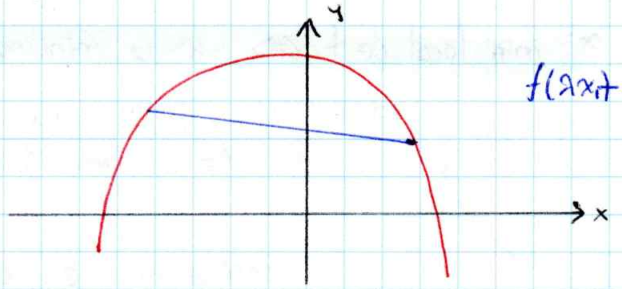
$\forall x_1, x_2 \in C \ \forall \lambda \in [0,1]$ se tiene que

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

es decir, si la imagen del segmento está por debajo del segmento $[(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))]$



Observación: Se dice que $f: S \to \mathbb{R}$ es cóncava si $-f$ es convexa en S.



$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Observación. Las funciones afines son cóncavas y convexas al mismo tiempo.

Teorema. Si $f: C \to \mathbb{R}$ con $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo y no vacío, entonces f es una función convexa sobre C si y solo si

$\forall x_1, \dots, x_p \in S \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ con $\lambda_i \geq 0 \ \forall i \in 1, \dots, p$ y $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$

se cumple que

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$$

Demostración

$(\Leftarrow)$ $p=2$ Definición

$(\Rightarrow)$ Por inducción sobre p

Teorema. Si $g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son m funciones convexas sobre $\mathbb{R}^n$, entonces

$$C' = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \}$$

es un conjunto convexo.

Demostración

Tomemos $i \in \{1, \dots, m\}$ y consideremos

$$C_i = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0 \}$$

Mostemos que C_i es un conjunto convexo

Si $x_1, x_2 \in C_i$ y $\lambda \in [0,1]$

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda_1 \underbrace{g(x_1)}_{\leq 0} + (1-\lambda)\underbrace{g(x_2)}_{\leq 0}$$

es decir, C_i es convexo. Finalmente

$$C' = \bigcap_{i=1}^{m} C_i$$

es convexo por intersección de convexos

Teorema. Si C es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $f: C \to \mathbb{R}$ es una función convexa sobre C, entonces

i) El conjunto H de los mínimos absolutos de f sobre C es un conjunto convexo.

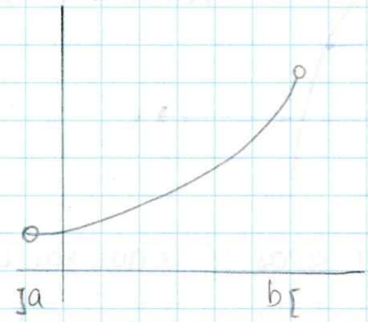
ii) Todo mínimo (o máximo) local de f es un mínimo (o máximo) global de f si f es convexa.

x^* min local de $f \iff x^*$ es mínimo global de f

Demostración

i) Si $H = \emptyset$

Se cumple pues $\emptyset$ es convexo.



Si $H = \emptyset$ sea $C_0 = \min\limits_{x \in C} f(x)$

consideremos el conjunto H como el conjunto

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) - C_0 \leq 0\}$$

H es el conjunto de los mínimos globales

Como la función $f - C_0$ es convexa, por el teorema anterior, H es convexo.

Obs. Si $f: C \to \mathbb{R}$ es convexa y $C_0 \in \mathbb{R}$, entonces $f - C_0$ es convexa

$\forall x_1, x_2 \in C$ y $\lambda \in [0,1]$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto C_0$ $\quad (f - C_0)(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2) - C_0 &\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - C_0 \\ &= \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - \lambda C_0 + (1-\lambda) C_0 \\ &= \lambda(f(x_1) - C_0) + (1-\lambda)(f(x_2) - C_0) \end{aligned}$$

ii) Sea x^* es un mínimo local de f en C $\Rightarrow$ x^* es mínimo global de f en C.

Supongamos que x^* es un mínimo y existe $y \in C$ tal que $f(y) < f(x^*)$.
Consideremos $z \in [y, x^*]$, es decir, existe $\lambda \in [0,1]$ tal que

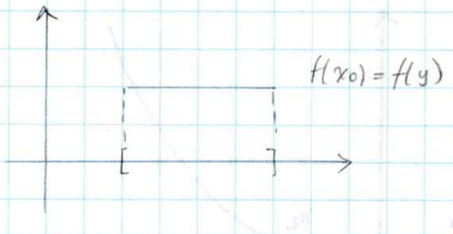
$$z = \lambda y + (1-\lambda)x^*$$

$$f(z) = f(\lambda y + (1-\lambda)x^*) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x^*) < \lambda f(x^*) + (1-\lambda) f(x^*) = f(x^*)$$

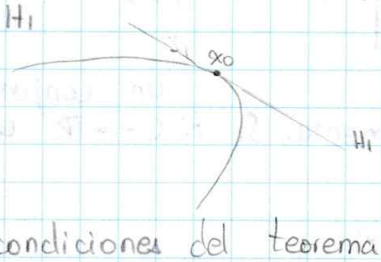
es decir, $f(z) < f(x^*)$, $\forall z \in [y, x^*]$, es decir x^* no sería un mínimo local de f.

Luego, f es constante en $\text{Int}(C)$ y existe y extremo de C tal que

$$f(x_0) = f(y)$$



b) Si $x_0 \in Fr(C)$ no necesariamente x_0 es un extremo de C.
Por un teorema anterior, existe un hiperplano de apoyo que pasa por x_0, H_1.
Así, tomando $T_1 = C \cap H_1$



Es claro que T_1 es cerrado, convexo no vacío y acotado inferiormente $x_0 \in T_1$ y $\dim(T_1) < \dim(C)$

Como T_1 cumple las condiciones del teorema, analizamos nuevamente dos casos.

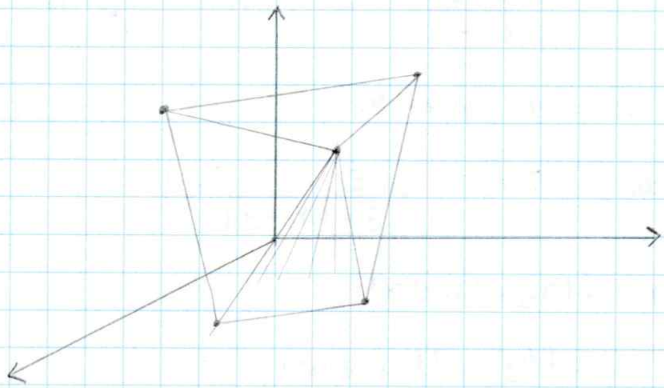
i) $x_0 \in \text{Int}(T_1) \Rightarrow$ f sería constante en T_1 y $f(x_0) = f(y_1)$ con y_1 un extremo de T_1 y por y_1 es un extremo de C

ii) $x_0 \in Fr(T_1) \Rightarrow$ Consideramos un hiperplano de apoyo de T_1, H_2, que pase por x_0 y consideramos $T_2 = T_1 \cap H_2$ y repetimos el proceso hasta que en un paso T_K, se reduzca a $T_K = \{0\}$ es decir $\dim(T_K) = 0$ y así, x_0 sería un extremo de C

$$\{x_0\} = T_K \subseteq T_{K-1} \subseteq \cdots \subseteq T_1 \subseteq C$$

La demostración se basa en el desenso de la dimensión.

Observación Si $F = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ es decir, F es un poliedro en el primer ortante positivo de $\mathbb{R}^n$



F es cerrado por ser la intersección de semiespacios cerrados. y acotado inferiormente

Si consideramos el problema de PL

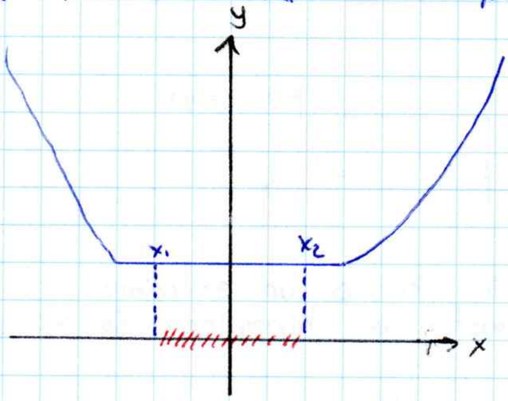
$$\begin{cases} \text{máx} \quad z = c^T x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{sa} \\ Ax \leq b \qquad A \in M_{m\times n} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

El teorema anterior nos dice que si este problema de PL tiene un óptimo global, entonces al menos uno de sus extremos es también un óptimo global.

Es decir, si el problema tiene solución, esta siempre es un extremo del conjunto factible

Observación: Los poliedros tienen un número finito de extremos. Luego, la programación lineal se resolvería buscando el mejor extremo. Así, la PL es un problema de optimización combinatoria.

Corolario. Si una función convexa $f: C \to \mathbb{R}$ tiene 2 mínimos locales diferentes, entonces tiene un número infinito de mínimos locales, por que el segmento que une los dos mínimos locales está compuesto de más mínimos locales.



Teorema. Supongamos un conjunto convexo, cerrado y no vacío y acotado inferiormente. Si $f: C \to \mathbb{R}$ es una

$$\begin{cases} \text{Máx } f(x) \\ x \in C \end{cases}$$

Entonces si f tiene un máximo global sobre C, el conjunto de máximos globales H de f sobre C siempre tiene al menos un punto extremo de C.

Martes 21 de diciembre de 2021

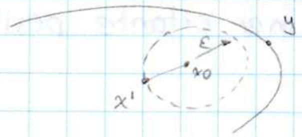
Demostración

a) Supongamos que existe un óptimo global $x_0 \in Int(C)$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que tal que $B(x_0, \varepsilon) \subseteq C$

Sea y un punto extremo de C (existe por el teorema de convexos)

Considere el punto

$$x' = x_0 + \varepsilon \frac{(x_0 - y)}{\| x_0 - y \|}$$



$e = \| x_0 - x' \|$

Despejemos de la definición x', el valor x_0

$$x_0 = \lambda y + (1-\lambda) x_1 \quad \text{con} \quad 0 < \lambda = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \| x_0 - y \|} < 1$$

Como f es convexa
$$f(x_0) = f(\lambda y + (1-\lambda) x')$$
$$\leq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x')$$

Si $\lambda' \to 1^+ \Rightarrow f(x_0) \leq f(y)$

Si $\lambda^+ \to 0^+ \Rightarrow f(x_0) \leq f(x')$

Pero como x_0 es un mínimo global se tiene que

$$\forall x \in C \quad f(x_0) \geq f(x)$$

$$f(x_0) \geq f(x') \quad y \quad f(x_0) \geq f(y)$$

es decir

$$f(x_0) = f(x') = f(y)$$

1.3 Formulaciones de un problema de PL.

Recordemos que la PL consiste en optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal o afín de n variables sujetas a un conjunto de restricciones expresadas mediante ecuaciones o desigualdades lineales.

Definición Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y dos vectores $c \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Diremos que un problema de programación lineal está escrito en la forma:

i) General: si se formula de la siguiente manera

$$(PG) \left| \begin{array}{l} \text{Máx} \quad z = c^T x \\ \text{sor} \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

ii) Canónica: si se formula

$$(PC) \left| \begin{array}{l} \text{Máx} \quad z = c^T x \\ \text{sor} \ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

iii) Estandar

$$\left| \begin{array}{l} \text{Máx} \quad z = c^T x \\ \text{sor} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \qquad (\text{Algoritmico})$$

Terminología.

- Se dice que $x \in \mathbb{R}^n$ es una solución factible o realizable si cumple las restricciones del problema
- Se dice que $x^* \in \mathbb{R}^n$ es una solución optima del problema si
  i) x^* es factible
  ii) x^* optimiza la función objetivo (si maximiza o minimiza)

$$c^T x^* \geq c^T x \qquad \forall x \in F$$

* $c^T x^*$ valor óptimo del problema
* $z = c^T x$ se dice la función objetivo o criterio

Proposición: Todo problema de programación lineal puede plantearse equivalentemente en cualquiera de las tres formas de la definición

Observación: Un problema de optimización (P1) en $\mathbb{R}^n$ es equivalente a otro problema de PL en $\mathbb{R}^{n'}$ si la solución optima de uno puede deducir la solución optima del problema en el otro.

Demostración:
La demostración de la proposición se realiza mediante las siguientes observaciones:

(i) $$\left| \begin{array}{l} \text{Min} \ z = c^T x \\ \text{sor} \\ x \in F \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} -\text{Min} \ z = -c^T x \\ \text{sor} \\ x \in F \end{array} \right.$$ Se puede elegir solo maximizar

ii) Si tenemos

$$a_i^T x \le b_i \iff \begin{cases} a_i^T x + s_i = b_i \\ s_i \ge 0 \end{cases}$$ variables de holgura o excedente

$$a_i^T \ge b_i \iff \begin{cases} a_i^T x - s_i = b_i \\ s_i \ge 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$-a_i^T x \le -b_i$$

iii)

$$a_i^T x = b_i \iff \begin{cases} a_i^T x \le b_i \\ -a_i^T x \le -b_i \end{cases}$$

iv) $x_i \in \mathbb{R}$ (variable libre) Se nota que

$$x_i = x_i' - x_i''$$

con $x_i' \ge 0$ y $x_i'' \ge 0$

Ejemplo: Transformar el programa de PL

$$\begin{cases} \text{Máx } z = x_1 - x_2 \\ \text{sor} \\ x_1 + x_2 \ge -3 \\ x_1 - 2x_2 = 5 \\ x_1 + 7x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le -3 \\ x_1 \in \mathbb{R} \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Encuentre su escritura equivalente en la forma estándar

Forma estandar

$$(PE)\begin{cases} \text{Máx } z = 2x_1' - 2x_1'' - x_2 \\ \text{sor} \\ x_1' - x_1'' - x_2 - s_1 = -3 & s_1 \ge 0 \\ x_1' - x_1'' - 2x_2 = 5 \\ x_1' - x_1'' + 7x_2 + s_2 = 4 & s_2 \ge 0 \\ x_1' - x_1'' - x_2 + s_3 = -3 & s_3 \ge 0 \\ x_1' \ge 0,\ x_1'' \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$x_1^* = 5 \quad x_2^* = 8$

$x_1^* = -3 \quad x_2 = 5$

$z = -11$

$$\text{Min } z = (1\ -1\ -1)\begin{pmatrix} x_1' \\ x_1'' \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ & & \vdots & & & \\ & & \vdots & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_1'' \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$n \to 2$

$n' \to 6$

$$x_1' \ge 0 \quad x_1'' \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad s_1 \ge 0 \quad s_2 \ge 0$$

Lunes, 3 de enero de 2022

Si consideramos el problema

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Máx} \quad z = c^T x \\ \text{sor} \\ x \in F \end{array}\right.$$

$F = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, \; x \geq 0 \}$ (conjunto factible)

Problema: Consiste en buscar un x^* tal que

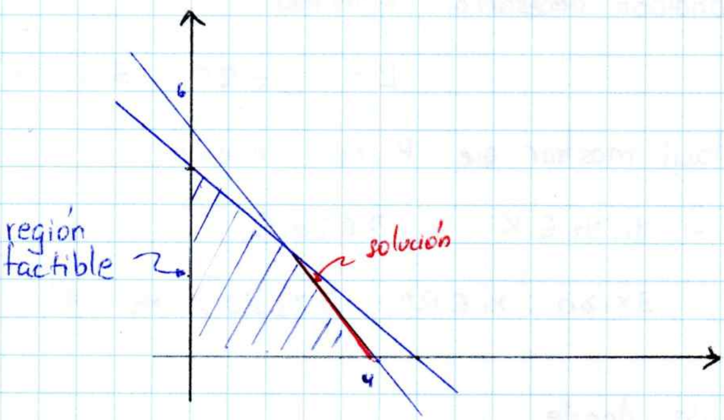
$$c^T x^* \geq c^T x \qquad \forall x \in F$$

Cuando se resuelve un problema de programación lineal se tienen 3 situaciones.

① El problema de programación lineal tiene una solución única o un infinito número de soluciones óptimas. (Problema con solución finita)

Ejemplo:

$$\left|\begin{array}{l} \text{Máx} \quad z = 30x_1 + 20x_2 \\ \text{sor} \\ x_1 + x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$



$\nabla z = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$x_1 + x_2 = 5$

$3x_1 + 2x_2 = 12$

$-x_2 = -3$

$z_{(2,3)} = 120 \qquad x_2^* = 3 \quad x_1^* = 2 \qquad x^* = 4 \quad x_2^* = 5 \qquad z^* = 120$

② Si $F = \emptyset$ (conjunto factible) esto quiere decir que hay muchas exigencias. Usando el ejemplo anterior, se tiene este caso si $x_1 \geq 5$ entonces sumado a las restricciones anteriores, entonces $F = \emptyset$

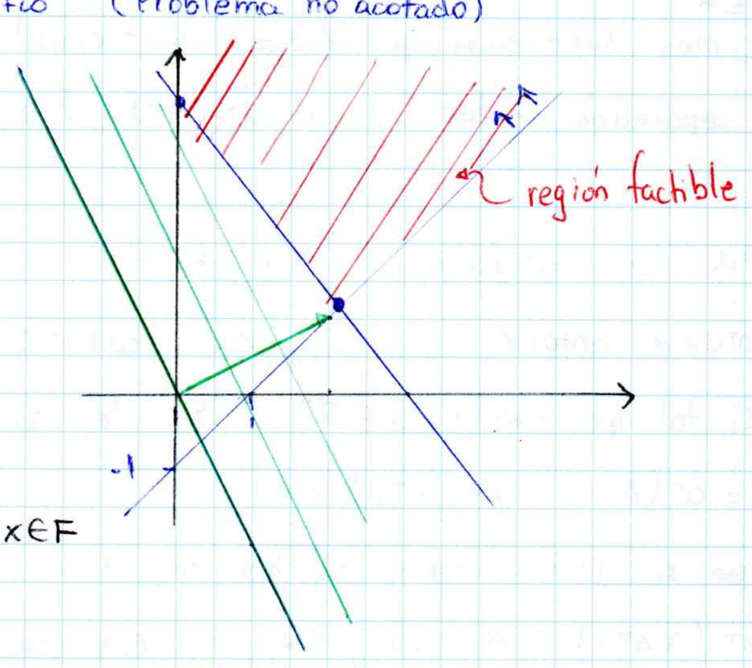
Notación: Máx $z = c^T x$ con $F = \emptyset$, por convención Máx $z = c^T x = -\infty$

Se denomina un problema infactible $F = \emptyset$ o irrealizable.

③ Cuando $F \neq \emptyset$ y $z \to +\infty$ (Problema no acotado)

Ejemplo.

$$\left|\begin{array}{l} \text{Máx} \quad z = 2x_1 + x_2 \\ \text{sor} \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ 2x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$



$\nabla z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Máx $z = c^T x = +\infty \qquad x \in F$

2.4 Desigualdades lineales y el lema de Farkas

Lema: Farkas. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$, entonces

$Ax = b \quad x \geq 0$ es compatible (tiene al menos una solución). Es decir, un problema de PL en la forma estándar es factible si y solo si

$$(\forall\, y \in \mathbb{R}^m)\ (A^T y \geq 0) \text{ se tiene que } y^T b \geq 0$$

Demostración

$\Rightarrow$ Supongamos que $Ax = b$ con $x \geq 0$ es compatible. y supongamos que $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^T y \geq 0$. P.D. $y^T b \geq 0$.

Si x_0 es la solución del sistema restringido, entonces $y^T b = y^T (Ax_0) = \underset{\geq 0}{x_0^T}\, \underset{\geq 0}{(A^T y)} \geq 0$

$\Leftarrow$ Supongamos que el sistema $Ax = b$ con $x \geq 0$ no es compatible y que se cumple la condición necesaria. Definamos

$$K = \{\, y \in \mathbb{R}^m \mid \exists\, x \in \mathbb{R}^n \quad x \geq 0 \text{ tal que } Ax = y \,\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

Es fácil mostrar que K es convexo.

- Si $y_1, y_2 \in K$ y $\lambda \in [0,1]$,

$\exists x_1 \geq 0$, $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $\exists x_2 \geq 0$, $x_2 \in \mathbb{R}^2$, así $\quad Ax_1 = y_1$, $Ax_2 = y_2$

de donde

$$A\,\underbrace{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)}_{\geq 0} = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

es decir, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in K$.

K es cerrado.
Si $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces (y_k) converge en K.

- K es no vacío, $0 \in K$.
Además, $b \notin K$, pues suponemos que $Ax = b$ es incompatible.

Por el teorema de separación entre b y K (en $\mathbb{R}^n$), $\exists\, a \in \mathbb{R}^m$ $(a \neq 0)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$a^T b < \alpha \quad \text{y} \quad a^T y \geq \alpha \quad \forall\, y \in K.$$

Como $0 \in K$ y $a^T 0 \geq \alpha$ entonces $\alpha \leq 0$, luego $a^T b < 0$. P.D. $A^T a \geq 0$, $a \in \mathbb{R}^m$

Tomemos $y \in K$, tal que existe $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$ tal que $Ax = y$

$$a^T y = a^T (Ax) = x^T (A^T a) \geq \alpha$$

Notemos además que si $y \in K$, entonces $y' = \lambda y$ con $\lambda \geq 0$ $(A(\lambda x) = \lambda y)$, es decir

$a^T(\lambda y) = x^T(\lambda A^T a) \geq \alpha$ si $\lambda \to +\infty$, esto solo puede darse si $A^T a \geq 0$. Caso contrario, $a^i \in K$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, pues $Ae^i = a^i$ con $i = 1, \dots, n$. Si suponemos que existe i tal que $(A^T a)_i < 0$. Como $(A^T a)_i = a^{i^T} \cdot a < 0$, $\forall \lambda > 0$ $\lambda a^{i^T} a < 0 \to -\infty$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$ $a^T a \geq \alpha$

Corolario: Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, entonces el sistema de desigualdades $Ax \le b$ con $x \in \mathbb{R}^n$ es compatible, es decir, un problema de programación lineal en la forma general es compatible si y solo si

$$(\forall y \in \mathbb{R}^m)\ (y \geq 0)\ (A^T y = 0 \Rightarrow b^T y \geq 0)$$

Demostración.

Sea $A^* = (I_m \mid A \mid -A)_{m\times(m+2n)}$

i) Se cumple que $\begin{cases} A^* x^* = b \\ x^* \geq 0 \end{cases}$ es compatible ssi $\begin{cases} Ax \le b \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$ es compatible

Supongamos que $x^* = \begin{pmatrix} z \\ x' \\ x'' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+2n}$ Es claro que $\begin{cases} A^* x^* = b \\ x^* \geq 0 \end{cases}$ es compatible si y so

si $(I_m \mid A \mid -A)\begin{pmatrix} z \\ x' \\ x'' \end{pmatrix} = b \quad \underset{\in \mathbb{R}^m}{z \geq 0}, \quad \underset{\in \mathbb{R}^n}{x' \geq 0,\ x'' \geq 0}$

tomando z una variable de holgura

$\Leftrightarrow\ z + A\underbrace{(x' - x'')}_{x} = b$

$\Leftrightarrow\ \begin{matrix} Ax \le b \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}$

ii) Aplicando el lema de Farkas al sistema $A^* x^* = b$

$\forall y \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^{*T} y \geq 0 \Rightarrow b^T y \geq 0$

es decir

$\forall y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y \geq 0$ $A^T y \geq 0$, $-A^T y \geq 0 \Rightarrow b^T y \geq 0$,

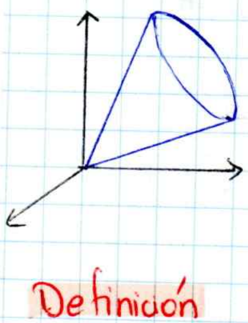
$\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}^m$, $y \geq 0$ $A^T y = 0 \Rightarrow b^T y \geq 0$

(Algoritmo de Fourier - Motzkin)

Interpretación geométrica de lema de Farkas

Definición Un conjunto no vacío $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice cono si

$$\forall u, v \in C \text{ y } \forall \lambda, \beta \geq 0 \Rightarrow \lambda u + \beta v \in C$$



Observación: Si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cono entonces evidentemente

- C es convexo
- $0 \in K$ (Se dice cono punteado en el origen)

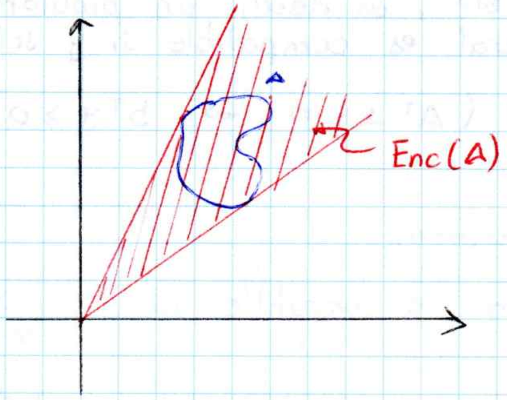
Definición Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y $a_1, a_2, \ldots, a_p \in C$, se dice que

$$y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \quad \text{con} \quad \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, p$$

es una combinación finita cónica de puntos de C

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío. Se llama envolvente cónica de A al conjunto de $\mathbb{R}^n$ notado $\mathrm{Enc}(A)$ y definido por

$\text{Enc}(\Delta) = \{ y \in \mathbb{R}^n : y$ es una combinación cónica finita de puntos de $\Delta \}$



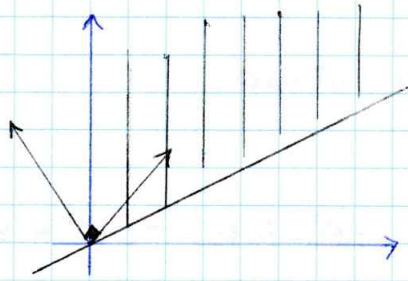
Propiedad: Si $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\Delta \neq \emptyset$, entonces

- $\text{Enc}(\Delta)$ es un cono
- $\text{Enc}(\Delta) = \Delta$ si y solo si Δ es un cono
- $\text{Enc}(\Delta) = \bigcap_{\substack{\Delta \subseteq C \\ C \text{ es un cono}}} C$

Martes, 3 de enero de 2022.

Definición: Sea $y \in \mathbb{R}^m$, $y \neq 0$. Se llama semiespacio lineal generado por y al conjunto

$$D_y := \{ x \in \mathbb{R}^m : y^T x \geq 0 \}$$ y es el vector normal del plano asociado



La interpretación geométrica del lema de Farkas se hace considerando $\Delta = \{a^1, \dots, a^m\}$ de columnas de la matriz $A_{m \times n}$ con $a^i \in \mathbb{R}^m$ con $i = 1, \dots, n$

i) Por un lado

$$\{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \text{ con } x \geq 0 \} = \text{Enc}(\Delta)$$
$$= \{ x_1 a^1 + \dots + x_n a^n \} \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n.$$

ii) Por otro lado, si consideramos el conjunto

$$\bigcap_{\substack{\Delta \subseteq D_y \\ D_y \text{ semiespacio}}} D_y.$$

Si $\Delta \subseteq D_y$, entonces $a^{i^T} y \geq 0$ para $i = 1, \dots, n$ para todo $y \in \mathbb{R}^m$, es decir $A^T y \geq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^m$. Podemos afirmar que el lema de Farkas dice que:

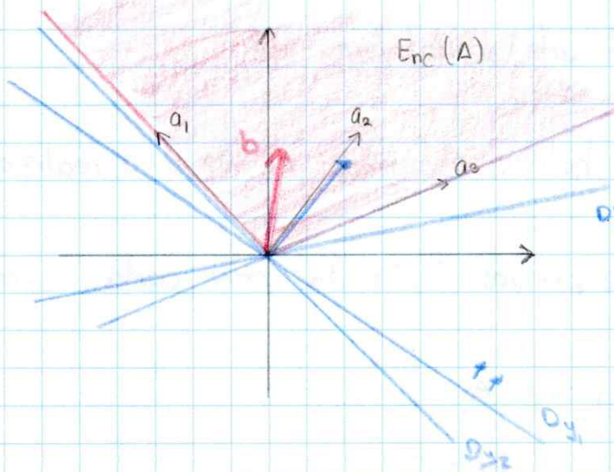
$$\text{Enc}(\Delta) = \bigcap_{\substack{\Delta \subseteq D_y \\ D_y \text{ semiespacio lineal de vector normal } y}} D_y$$

$b \in \text{Enc}(\Delta) \Leftrightarrow \underset{x \geq 0}{Ax = b}$ tiene solución

$b \in \bigcap_{\substack{\Delta \subseteq D_y \\ D_y \text{ semiespacio lineal de vector normal } y}} D_y \Leftrightarrow A^T y \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \Rightarrow b^T y \geq 0$

Ejemplo:

$x_1 a^1 + x_2 a^2 + x_3 a^3 = b \qquad A = (a^1, a^2, a^3)_{2\times 3} \qquad m=2,\ n=3$



$\bigcap D_y \quad = \quad Enc(A)$

$A \subseteq D_y$

D_y Semiespacio con vector normal y

$\forall y \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^T y \geq 0$

$\Rightarrow b^T y \geq 0$

Observación: En algunos libros el lema de Farkas se expresa de la siguiente manera

(1) $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ y (2) $\begin{cases} A^T y \geq 0 \\ y^T b < 0 \end{cases}$ $y \in \mathbb{R}^m$.

El lema de Farkas es equivalente a decir que los sistemas (1) y (2) no son compatibles simultaneamente.

Capítulo 3: La Dualidad en Programación Lineal

Problema. (PL) (Primal) $\Rightarrow$ Construye otro problema de programación lineal con los datos (A, b, c) que á sobre el primal (Dual)

Ejemplo (Interpretación económica de la PL)

Una empresa llamada ECUACAFÉ produce 4 mezclas de cafés diferentes: B_1, B_2, B_3 y B_4 (B: Blending) y cada una de las cuales contienen cafés: brasileño, colombiano o ecuatoriano en distintas proporciones de 10 libras

Mezclas	Br	Cl	Ec	Utilidad
B_1	2	4	4	8
B_2	4	5	1	6
B_3	3	3	4	4
B_4	7	2	1	5
Disponibilidad	8000	6400	6000	

* Disponibilidades diarias

Problema: Formular un modelo de programación lineal para determinar un plan de producción óptimo

Variables de desición

x_i : cantidad de paquetes diarios a producir de la mezcla B_i $i=1,\dots,4$

$$\begin{cases} \text{Máx } z = 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 \\ \text{sar} \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 8000 & \text{(libras de café brasileño)} \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 6400 & \text{(libras de café colombiano)} \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + 1x_4 \leq 6000 & \text{(libras de café ecuatoriano)} \\ x_i \geq 0 \quad i=1,\dots,4 \end{cases}$$

Solución óptima: $x_1^* = 1200$ $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 800$ $z^* = 13\,600$

Notemos que las variables de holgura.

$s_1^* = 0$, $s_2^* = 0$, $s_3^* = 400$

Problema dual: Sin conocer la solución óptima de (P) otra empresa desea compar toda la existencia de las materias primas de Ecuacafé

Se debe fijar precios para cada libra de los 3 tipos de café de tal forma que

- Esta empresa paga lo menos posible
- Ecuacafé desea recuperar al menos la ultilidad que hubiese obtenido si llegase a realizar un plan de producción óptimo.

El problema dual consiste en encontrar un sistema de precios: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ para cada libra de café, respecto de

$$\begin{cases} \min\ \omega = 8000\lambda_1 + 6400\lambda_2 + 6000\lambda_3 \\ \text{sar} \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 \geq 8 \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 \geq 6 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 \geq 4 \\ 7\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \geq 5 \\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_3 \geq 0. \end{cases}$$

La solución óptima es

$\lambda_1^* = 1/6$, $\lambda_2^* = 23/12$, $\lambda_3^* = 0.$

y $\omega^* = 13\,600$

Observación $\lambda_i^* S_i^* = 0$ $i = 1,2,3$ (Teorema de holgura complementaria)

Primal	Máx	$z = c^T x$	$A x \leq b$	m restricciones	$\mathbb{R}^m$
Dual	Mín	$\omega = \lambda^T b$	$A^T \lambda \geq c$	n restricciones	$\mathbb{R}^n$

Obs: En economía, las variables duales se dicen precios sombra.

- En aplicaciones prácticas los valores de los productos: precios, peajes, etc.
- λ (unidades de z / unidades de la i-ésima restricción)

Lunes, 10 de enero de 2022

Definición de la dualidad: Definimos en la forma canónica, consideremos $A_{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$; consideremos el problema de programación lineal en la forma canónica

$$(P) \begin{cases} \text{Máx}\ z = c^T x \\ \text{sa.r} \\ Ax \leq b \\ x \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Se define el problema dual de (P) como el problema de PL:

$$(D) \begin{cases} \text{Mín}\ \omega = b^T \lambda \\ \text{sar} \\ A^T \lambda \geq c \\ \lambda \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Observación:
- (P) se dice programa primal (original, primigeno
- Las variables del dual se dicen variables duales (dual prices)
- Notemos que hay 1 variable dual por cada restricción del problema primal, es decir, tenemos m variables

Observación: El dual de (D) es el primal

$$(D) \begin{cases} \text{Mín}\ \omega = b^T \lambda \\ \text{sar} \\ A^T \lambda \geq c \\ \lambda \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{R}^m \end{cases} \iff \begin{array}{l} -\text{Máx}\ \tilde{\omega} = (-b^T)\lambda \\ (-A^T)\lambda \leq -c \\ \lambda \geq 0 \\ (\text{CANÓNICA}) \end{array}$$

Si calculamos el dual de (D) y llamamos x a las variables duales, entonces del dual de D

Tomando el dual del dual, llegamos al primal.

$$\underbrace{\begin{cases} -\text{Mín } \tilde{\tilde{z}} = (-c)^T x \\ \text{s.a.r} \\ (-A^T)^T x \geq -b^T \\ x \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}}_{(D)} \iff \underbrace{\begin{cases} \text{Máx } z = c^T x \\ \text{s.a.r} \\ Ax \leq b \\ x \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}}_{(P)}$$

Terminología: Se dice que (P) y (D) están en dualidad.

Proposición: Con las mismas notaciones, mostrar que si

$$(P) \begin{cases} \text{Máx } z = c^T x \\ \text{sar} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ entonces } (D) \begin{cases} \text{mín } \omega = b^T \lambda \\ \text{s.a.r} \\ A^T \lambda \geq c \\ \lambda \in \mathbb{R}^m \text{ (variables libres)} \end{cases}$$

pueden tomar valores positivos o negativos

Demostración:

$$(P) \iff \begin{cases} \text{Máx } z = c^T x \\ \text{s.a.r} \\ Ax \leq b \\ -Ax \leq -b \\ x \geq 0 \quad \text{(¡CANÓNICA!)} \end{cases} \iff \begin{cases} \text{Máx } z = c^T x \\ \text{s.a.r} \\ \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}_{2m \times n} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}_{2m} \begin{matrix} u \in \mathbb{R}^m \\ v \in \mathbb{R}^m \end{matrix} \\ x \geq 0 \quad \text{(¡CANÓNICA!)} \end{cases}$$

Usamos matrices definidas por bloques.

Por la definición de la dualidad, el dual de (P) será

$$(D) \begin{cases} \text{Mín } \omega = (b^T \mid -b^T) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ \text{s.a.r.} \\ (A^T \mid -A^T) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq c \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \text{Mín } \omega = b^T (u - v) \\ \text{s.a.r.} \\ A^T (u - v) \geq c \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases}$$

tomando $\lambda = u - v \in \mathbb{R}^m$ (Notemos que deja de ser positivo)

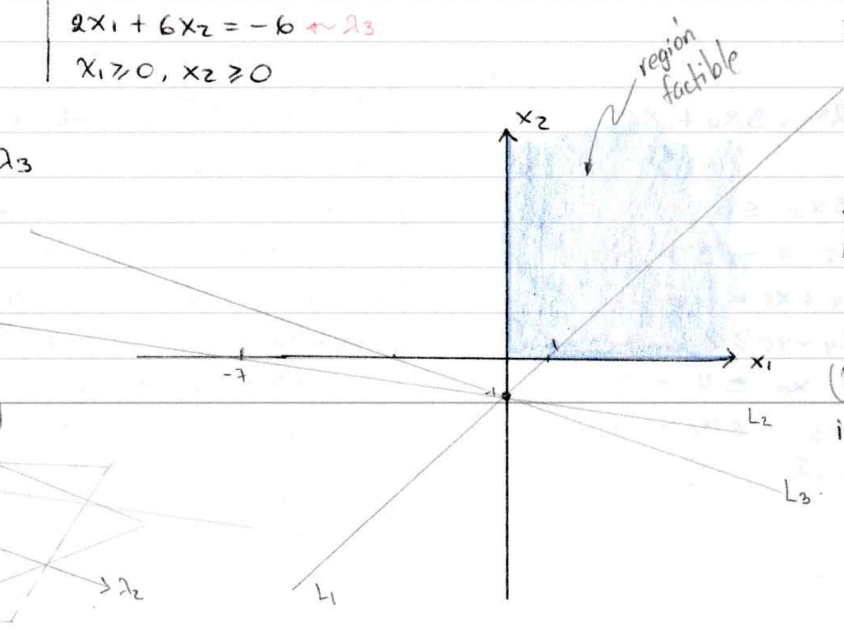
$$(D) \begin{cases} \text{Mín } \omega = b^T \lambda \\ \text{s.a.r. } A^T \lambda \geq c \\ \lambda \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Ejemplo: Consideremos el problema (P)

$$(P) \begin{cases} \text{Máx } z = x_1 - x_2 \\ \text{s.a.r} \\ x_1 - x_2 = 1 \quad \leftarrow \lambda_1 \\ x_1 + 7x_2 = -7 \quad \leftarrow \lambda_2 \\ 2x_1 + 6x_2 = -6 \quad \leftarrow \lambda_3 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} n = 2 \\ m = 3 \end{matrix}$$

entonces el problema dual será

$$(P) \begin{cases} \text{min } \omega = \lambda_1 - 7\lambda_2 - 6\lambda_3 \\ \text{s.a.r} \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \geq 1 \\ -\lambda_1 + 7\lambda_2 + 6\lambda_3 \geq -1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$



$x_1 - x_2 = 1$

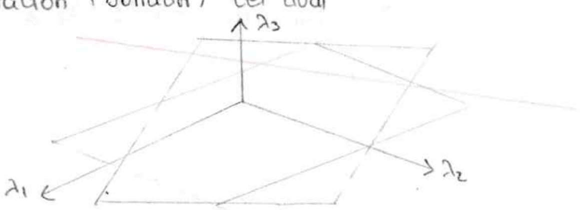
$x_1 + 7x_2 = -7$

$2x_1 + 6x_2 = -6$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases} \quad (P)$$

(P) es un problema infactible

Interpretación (borrador) del dual



Observación: Si se tiene el problema $(P)\begin{cases} \text{Máx } z = c^T x \\ \text{sar. } Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (D)\begin{cases} \text{Mín } \omega = b^T\lambda \\ \text{sar. } A^T\lambda \geq c \\ \lambda \leq 0 \end{cases}$

Proposición: Si consideramos un problema de programación lineal en su forma general

$$(P) = \begin{cases} \text{Máx } z = c^T x \\ \text{sar } Ax \leq b \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}, \text{ su dual será } (D) = \begin{cases} \text{Mín } \omega = b^T\lambda \\ \text{sar } A^T\lambda = c \\ \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Forma estándar

Demostración: Si $x \in \mathbb{R}^n$, lo expresamos como $x = x' - x''$ con $x' > 0$ y $x'' > 0$

$$(P) \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Máx } z = (c^T \vdots -c^T)\begin{pmatrix} x' \vdots x'' \end{pmatrix} \\ \text{s.a.r.} \\ (A^T \vdots -A^T)\begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} \leq b \\ \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases}$$

(Forma canónica)

Calculamos el problema dual, tenemos

$$(D)\begin{cases} \text{Mín } \omega = b^T\lambda \\ \begin{pmatrix} A^T \\ -A^T \end{pmatrix}\lambda \geq \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix} \\ \lambda \geq 0 \end{cases}, \text{ de donde } (D) = \begin{cases} \text{Mín } \omega = b^T\lambda \\ \text{sar } A^T\lambda = c \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Corolario

$$(P)\begin{cases} \text{Máx } z = c^T x \\ \text{sar } Ax = b \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad \text{su dual es} \quad \begin{cases} \text{Mín } \omega = b^T\lambda \\ \text{sar } A^T\lambda = c \\ \lambda \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Cálculo de cualquier problema de PL con restricciones de positividad.

Si $A_i \in \mathbb{R}_{n_i \times m_i}$, $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ $i = 1,2,3$ y $c \in \mathbb{R}^n$ $(m = m_1 + m_2 + m_3)$. Si el problema primal es

$$(P) = \begin{cases} \text{Máx } z = c^T x \\ \text{sar.} \\ A_1 x \leq b_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}^{m_1} \\ A_2 x = b_2 \mid \mu \in \mathbb{R}^{m_2} \\ A_3 x \geq b_3 \mid \delta \in \mathbb{R}^{m_3} \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ entonces el dual de } (P) \text{ será } \begin{cases} \text{Mín } \omega = b_1^T\lambda + b_2^T\mu + b_3^T\delta \\ \text{sar.} \\ A_1^T\lambda + A_2^T\mu + A_3^T\delta \geq c \\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda = 0,\ \lambda \leq 0 \end{cases}$$

Observación: Si en un problema primal (P) de PL con restricciones de positividad $x \geq 0$, se tiene que

- restricciones $\leq$ ⇒ la variable dual ≥ 0
- restricciones $=$ ⇒ la variable dual $\in \mathbb{R}$
- restricciones $\geq$ ⇒ la variable dual ≥ 0

Ejercicio

$$(P)\begin{cases} \text{Máx } z = 2x_1 - 3x_4 + x_5 \\ \text{sar.} \\ 2x_1 - x_3 + 3x_5 \leq 6 \sim \lambda_1 \\ x_1 + x_5 \leq -3 \sim \lambda_2 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \sim \lambda_3 \\ x_2 + x_4 - x_5 \geq 8 \sim \lambda_4 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 4 \sim \lambda_5 \\ x_2 + x_3 \leq 10 \sim \lambda_6 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,\dots,5 \end{cases} \xrightarrow{\text{dual}} \begin{cases} \text{Mín } \omega = 6\lambda_1 - 3\lambda_2 + 6\lambda_3 + 8\lambda_4 + 4\lambda_5 + 10\lambda_6 \\ \text{sar.} \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_5 \geq 2 \\ \lambda_4 - \lambda_5 + \lambda_6 \geq 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_6 \geq 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 \geq -3 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_5 \geq 1 \\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_3 \in \mathbb{R},\ \lambda_4 \leq 0,\ \lambda_5 \in \mathbb{R},\ \lambda_6 \geq 0 \end{cases}$$

Lunes, 17 de enero de 2022.

Teorema de dualidad débil Supongamos que

$$(P) = \begin{cases} \max\ z = c^T x \\ \text{sar} \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad y \quad (D) = \begin{cases} \min\ \omega = b^T \lambda \\ \text{sar.} \\ A^T \lambda \geq c \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

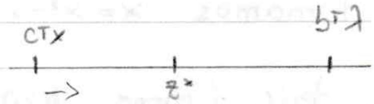
están en dualidad. Entonces, si x es factible para (P) $(x \in \mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{R}^m$ es factible para el dual, entonces se tiene que

$$c^T x \leq b^T \lambda$$

es decir el valor de z en cualquier punto factible x es inferior al valor de ω en cualquier punto factible λ.

Demostración

Notemos que $c^T x \leq (A^T \lambda)^T x$ pues $c \leq A^T \lambda$ y $x \geq 0$; así



$$c^T x \leq \lambda^T A x$$
$$\leq \lambda^T b, \quad \text{pues } (Ax \leq b \text{ y } \lambda \geq 0)$$

Teorema (certificado de optimalidad)

Si existe un punto factible de (P), $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ tal que

$c^T \bar{x} = b^T \bar{\lambda} \Rightarrow \bar{x}$ es óptimo para (P) y $\bar{\lambda}$ es óptimo para (D).

Demostración

Supongamos que $\bar{x}$ no es óptimo para (P), entonces existe $\tilde{x}$ factible para (P), tal que

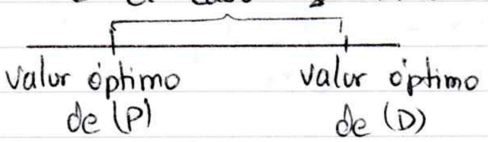
$$c^T \tilde{x} > c^T \bar{x} = b^T \bar{\lambda},$$

es decir $\bar{x}$ es tal que

$$c^T \tilde{x} > b^T \bar{\lambda} \Rightarrow \Leftarrow$$

Observación: En la PL no existe lo que se conoce como brecha de dualidad

En PNL, puede darse el caso ← Brecha de dualidad.



Teorema (Teoría de la dualidad fuerte)

Vamos a trabajar ahora, en el contexto de un Problema de PL

$$(PG) = \begin{cases} \max\ z = c^T x \\ \text{sar} \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}, \quad \text{cos su dual} \quad (D) = \begin{cases} \min\ \omega = b^T \lambda \\ \text{sar} \\ A^T \lambda = c \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Teorema. Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ el poliedro no vacío del problema (P) y supongamos que existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in P$, se tenga que

$$c^T x \leq d.$$

es decir z está acotada superiormente sobre (P), entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$A^T \lambda = c, \quad \lambda \geq 0$$

y para el cual se

$$b^T \lambda \leq d,$$

es decir, existe λ factible para (D) tal que

$$b^T \lambda \leq d$$

Demostración

Para mostrar el teorema es suficiente mostrar que

$$\begin{array}{c} m \\ n \times m \\ n \times m \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} -I_m \\ A^T \\ -A^T \\ b^T \end{pmatrix}_{(m+2n+1) \times m} \lambda \leq \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -c \\ d \end{pmatrix} \quad \text{es compatible}$$

Por el contrario del Lema de Farkas, se tiene que para todo

$$y = \begin{pmatrix} \mu \\ x' \\ x'' \\ z \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{tal que} \quad (-I_m \mid A \mid -A \mid b)\, y = 0$$

se cumple que

$$(0 \mid c^T \mid -c^T \mid d)\, y \geq 0$$

$\mu \geq 0$ $(\mu \in \mathbb{R}^m)$ $\forall x' \geq 0,\ x'' \geq 0$ $(x', x'' \in \mathbb{R}^n)$ y $\forall z \geq 0$ tal que

$$-\mu + Ax' - Ax'' + z\, b = 0$$

se cumple que

$$c^T x' - c^T x'' + dz \geq 0$$

Si tomamos $x = x'' - x'$, si $-\mu - Ax + zb = 0 \Rightarrow -c^T x + dz \geq 0 \Rightarrow dz \geq c^T x$, es decir

$$Ax + \mu = zb \Rightarrow c^T x \leq dz,$$

es decir, (como $\mu \geq 0$)

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ x \geq 0 \ y \ \forall z \geq 0 \quad Ax \leq zb \Rightarrow c^T x \leq dz$$

- CASO I si $z > 0$: $Ax \leq zd \iff A(1/z)x \leq d$, es decir

$$1/z\, x \in P,$$

entonces $1/z\, c^T x \leq d$, es decir $c^T x \leq zd$

- Caso II: si $z = 0$, P.D. Si $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax \leq 0 \Rightarrow c^T x \leq 0$

Por contradicción, supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Ax_0 \leq \quad \text{pero} \quad c^T x_0 > 0$$

Sea $x' \in P$ y consideremos $\forall \alpha \geq 0$ los puntos de la forma

$$x' + \alpha x_0.$$

Notemos que
$$\begin{aligned} A(x' + \alpha x_0) &= Ax' + \alpha A x_0, \\ &\leq b + \alpha 0 \\ &= b, \end{aligned}$$

es decir, $x' + \alpha x_0 \in P \quad \forall \alpha \geq 0$

$$\Rightarrow c^T(x' + \alpha x_0) \leq d \qquad \forall \alpha \geq 0$$

$$c^T x' + \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha \geq 0}}{\alpha}\, \underbrace{c^T x_0}_{> 0} \leq d$$

si $\alpha \to +\infty$ esta es una contradicción.

Teorema fundamental de la dualidad fuerte (o Teorema fundamental de la PL

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$, se cumple que

$$\text{Máx}\{ c^T x : Ax \leq b,\ x \in \mathbb{R}^n \} = \text{Mín}\{ b^T \lambda \mid A^T \lambda = c,\ \lambda \geq 0 \}$$

si y solo si (P) y (D) son ambos factibles

Martes, 18 de enero de 2022.

Demostración:

$\Rightarrow$ Es claro que si (P) y (D), entonces deben tener conjuntos factibles no vacíos.

$\Leftarrow$ Supongamos que (P) y (D) son factibles. Se sabe por el teorema de dualidad débil, para todo x factible para (P) y para todo λ factible para (D) se cumple que

$$c^T x \leq b^T \lambda$$

entonces

$$d := \sup\{ c^T \lambda : Ax \leq b \ x \in \mathbb{R}^n \} \quad \text{Inf}\{ b^T \lambda : A^T \lambda = c \ \lambda \geq 0 \}$$

Notemos que, d debe ser un número real, porque suponemos que existe λ factible para el dual y $d \leq b^T \lambda$.

Como d es una cota superior de z, entonces

$$P = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \} \neq \emptyset$$

Por el teorema anterior, existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tal que

(46)

$$A^T \lambda = c \ y \ \lambda \geq 0$$

tal que

$b^T\lambda \leq d$ es decir, el ínfimo es un mínimo

Es decir, se debe cumplir además que

$$d = \sup\{c^Tx : Ax \leq b : x \in \mathbb{R}^n\} = \text{Mín}\{b^T\lambda : A^T\lambda, \lambda \geq 0\}.$$

Supongamos que d no es un máximo; es decir, que el sistema lineal

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ -c^Tx \leq -d \end{cases}$$ es incompatible.

Por el corolario del lema de Farkas,

existe $\left(\frac{y}{\mu}\right)$ con $y \in \mathbb{R}^n$ y $\mu \in \mathbb{R}$

tales que $\begin{pmatrix} A^T \\ -c \end{pmatrix}\left(\frac{y}{a}\right) = 0$, pero $(b^T \vdots -d)\left(\frac{y}{a}\right) < 0$

es decir, existe $y \in \mathbb{R}^n$ y $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$A^Ty - \mu c = 0 \Rightarrow b^Ty - d\mu < 0$ (Negación del corolario del lema de Farkas)

- Notemos que $\mu > 0$. Porque si $\mu = 0$, entonces $A^Ty = 0 \Rightarrow b^Ty < 0$ y esto, por el lema de Farkas implica que $Ax \leq b$ con $x \in \mathbb{R}^n$ es incompatible. Pero esto no es posible pues contradic nuestra suposición de que (P) es factible.

Así, $\mu > 0$ si tomamos $\tilde{y} = 1/\mu\, y$

$$A^T\tilde{y} = c \Rightarrow b^T\tilde{y} < d$$

Pero esto no es posible pues $\tilde{y}$ es factible para (D) y por lo tanto,

$$b^T\tilde{y} < d = \text{mín}\{b^T\lambda : A^T\lambda = c, \lambda \geq 0\}$$

Observación: Cuando solo uno de los problemas (P) o (D) es vacío, se cumple que

$$\sup\{c^Tx \mid Ax \leq b,\ x \in \mathbb{R}^n\} = \text{Inf}\{b^T\lambda : A^T\lambda = c\ \lambda \geq 0\}$$

Demostración:

Supongamos que (P) es factible, i.e. $P \neq 0$ y $F(D) = \emptyset$.

Si $F(D) = \emptyset$ $\quad \text{Inf } b^T\lambda = +\infty \quad \lambda \in F(D) = \emptyset$

$c^Tx \qquad b^T\lambda$

Por el teorema que vimos, z no puede estar acotado sobre P, es decir,

$\nexists\, d \in \mathbb{R}$ tal que $c^Tx \leq d \quad \forall x \in P$

Pues si esto fuera posible, existiría $\lambda \in F(D)$ tal que

$$b^T\lambda \leq d,$$

pero $F(D) = \emptyset$. Luego

$$\sup\{c^Tx : Ax \leq b\} = +\infty$$

Esquema de dualidad

El teorema fundamental de la programación lineal y la observación anterior, nos permiten determinar en que estados pueden estar dos problemas simultáneamente dos problemas (P) y (D) que están en dualidad.

(P) \ (D)	Óptimo finito	No acotado	No factible
Óptimo finito	$c^Tx^* = b^T\lambda^*$ teorema dualidad	X	X
No acotado	X	X	Por la observación anterior ← SEGUNDO CASO
No factible	X	Por la observación anterior	TERCER CASO

PRIMER CASO

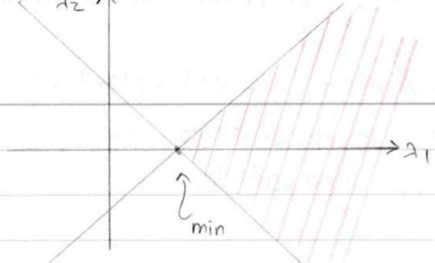
Ejemplos:

1) $\begin{cases} \text{Min } z = x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

$z^* = 1$ (P) PRIMER CASO.

$x_1^* = 1,\ x_2^* = 1$

$$(D)\left\{\begin{array}{l} \min \ \omega = \lambda_1 \\ \text{s.a.r.} \\ \lambda_1 + \lambda_2 \geq 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \geq 1 \\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

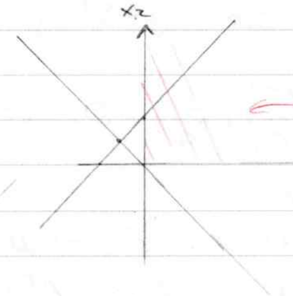


$\omega^* = 1$
$\lambda^*_1 = 1$
$\lambda^*_2 = 0$

Estamos en el caso 1 por que se cumple el teorema de la dualidad fuerte.

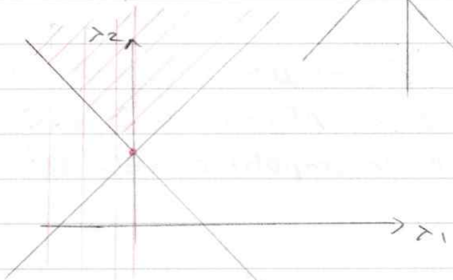
② $$\left|\begin{array}{l} \max \ z = x_1 + x_2 \\ \text{s.a.r} \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

Notemos que
$x_2 = 1/2$
$x_1 = -1/2 \not\geq 0$



← región factible

$$(D)\left|\begin{array}{l} \min \ \omega = \lambda_1 \\ \text{sar} \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \geq 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \geq 1 \\ \lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$



③ $$(P)\left\{\begin{array}{l} \max \ z = x_1 + x_2 \\ \text{sar} \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

En este caso, (P) y (D) no son factibles.

Teorema de holguras complementarias (Condición necesaria y suficiente de optimalidad)

Consideremos dos problemas (P) y (D) en dualidad canónica, es decir

$$(P) = \left\{\begin{array}{l} \max \ z = c^T x \\ \text{sar} \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad (D) = \left\{\begin{array}{l} \min \ \omega = b^T \lambda \\ \text{s.a.r} \\ A^T \lambda \geq c \\ \lambda \geq 0 \end{array}\right.$$

Las soluciones realizables o admisibles son óptimas para (P) y (D) respectivamente si y solo si

i) $\lambda^{*T}(b - Ax^*) = 0$ es decir $\sum_{i=1}^m \lambda_i \underbrace{\left(b_i - \sum_{j=1}^n a_i x_j^*\right)}_{\geq 0}$,

es decir, para todo $i = 1, \ldots, m$

$$\lambda_i^* \underbrace{\left(b_i - \sum_{j=1}^n a_j x_j^*\right)}_{s_i^*} = 0$$

ii) $x^{*T}(A^T\lambda - c) = 0$

Observación

Si $$(P) = \left|\begin{array}{l} \max \ z = c^T x \\ \text{sar} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}\right. \quad \text{y su dual} \quad (D) = \left|\begin{array}{l} \min \ \omega = b^T \lambda \\ \text{sar} \\ A^T \lambda \geq c \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Este x^* factible de (P) y λ^* factible de (D)

Demostración

Sea x y λ factibles para (P) y (D)

$$f = \lambda^T(b - Ax) \geq 0 \qquad g = x^T(A^T\lambda - c) \geq 0$$

Notemos que

$$f + g = (\lambda^T b - \underbrace{\lambda^T A x}_{\in \mathbb{R}}) + (x^T A^T \lambda - x^T c) = \lambda^T b - c^T x \geq 0$$

↑ teorema de dualidad débil

Podemos decir que x^* y λ^* son óptimos para (P) y (D) si y solo si

$$c^T x^* = b^T \lambda^* \iff f+g=0$$

Pero como $f \geq 0$ y $g \geq 0$, entonces el resultado se tiene si y solo si $f=0, g=0$, si y solo si

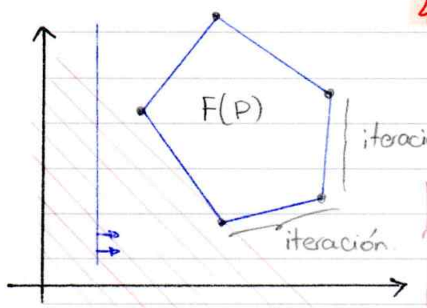
$$\lambda^T (b - Ax) = 0 \quad y \quad x^T (A^T\lambda - c) = 0$$

Lunes, 24 de enero de 2021.

Capítulo 4: Método del simplex

Idea.

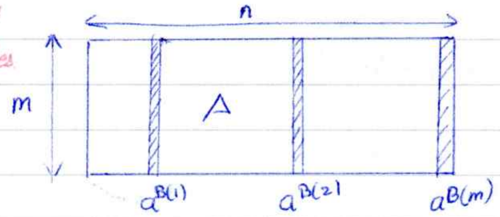
4.1 Definiciones básicas de la PL.



características del algoritmo
- solución finita
- no acotado
- no factible

casos posibles

Definición 4.1. Dado un sistema lineal de ecuaciones subdeterminado $Ax=b$ con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m \leq n$. Toda submatriz B con $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ obtenido de la matriz A, que sea inversible, se dice una base de A.



$$B\left(a^{B(1)} \quad a^{B(2)} \cdots a^{B(m)}\right)$$

Observación. Existe una base de A si y solo si $\{a^{B(i)}\}_{i=1,\dots,n}$ es un conjunto l.i. de columnas de A. (i.e. $\operatorname{rang}(A) = m$)

Ejemplo

$m=2,\ n=4$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{\text{inversible}}{B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{a^2\ a^3} \qquad \underset{\text{inversible}}{B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{a^4\ a^1}$$

Observación: Sea B una base de A $(m \leq n)$

$$Ax=b \iff (B \mid N)\begin{pmatrix} x_B \\ \hline x_N \end{pmatrix} = b$$

donde $x_B = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \end{pmatrix}$ $x_N = \begin{pmatrix} x_{N(1)} \\ \vdots \\ x_{N(n-m)} \end{pmatrix}$

x_B: se dice el vector de variables de la base B.
x_N: se dice el vector de las variables fuera de la base B.

Con esta notación

$$Ax = b \iff Bx_B + Nx_N = b.$$

Como B es invertible, existe B^{-1} y así

$$\iff I_m x_B + B^{-1}N x_N = B^{-1} b$$

$$\iff x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N \qquad (1)$$

Esta igualdad permite expresar las variables de base x_B en función de las variables fuera de la base x_B en x_N.

Definición De la expresión general (1), que da todas las soluciones $Ax=b$ en función de vectores de x_n, podemos fijar en la solución particular cuando $x_N = 0$ entonces

$$\begin{cases} x_B = B^{-1}b \\ x_N = 0 \end{cases}$$

Esta solución, se dice solución de base (o solución asociada a la base B del sistema (1).

Ejemplo. Consideremos el sistema lineal de ecuaciones subdeterminado

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 3 \end{cases} \qquad m=2,\ n=4$$

$B = (a^3\ a^4) = (a^{B(1)}\ a^{B(2)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ es una base de A.

Así,

$$\begin{cases} x_3 = 2 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 3 - 2x_1 - x_2 \end{cases} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \qquad x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

→ Con $B = (a^1\ a^3)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{l} x_1 = 3/2 - \frac{1}{2}x_2 - 1/2\, x_4 \\ x_3 = 1/2 - 1/2\, x_2 + 1/2\, x_4 \end{array}$$

Solución de base

$$x_B = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow x_2 \\ \leftarrow x_4 \end{array}$$

Una solución de base

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Encuentre la solución con $B = (a^4\ a^1)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{cases} x_4 = -1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 = 2 - x_2 - x_3 \end{cases}$$

La solución de base asociada a $B = (a^4\ a^1)$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Definición: Consideremos un sistema lineal de ecuaciones restringido

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{con } A \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Si B es una base de A, la solución de base asociada es

$$\begin{cases} x_B = B^{-1}b \\ x_N = 0 \end{cases}$$

Cuano $x_B \geq 0$, la solución se dice, solución factible de base

Observación: En el ejemplo anterior las dos primeras soluciones x_0 y x_1 son soluciones factibles de base pero x^2 no lo es.

Observación: Si $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix}$ es solución factible de

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

entonces tendrá a lo más m valores estrictamente positivos si

$$x_B = B^{-1}b > 0$$

o lo que es lo mismo $n-m$ variables nulas ($x_N = 0$.)

Definición: Una solución de base factible se dice degenerada si el número de variables que se anulan es estrictamente mayor a $n-m$ (es decir si al menos una variable de la base es nula)

Lunes, 31 de enero de 2022

Propiedades fundamentales de la P.L.

Supongamos que todas las restricciones de un problema de PL en la forma canónica, se puede poner en la forma

$$Ax \leq b \quad \text{(incluidas las restricciones de positividad)}$$

$$(-x \leq 0 \iff -I_n x \leq 0_n)$$

Notemos que $A_{m\times n}$ con $m \geq n$

$$A = \begin{pmatrix} ---- \\ -I_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{restricciones} \\ \leftarrow \text{restricciones de positividad} \end{matrix}$$

Notación $a_i^T x \leq b_i$ se notará a la i-ésima desigualdad del sistema $Ax \leq b$ $(i=1,\dots,m)$

Notemos

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

Sabemos que K es cerrado, convexo y acotado inferiormente.

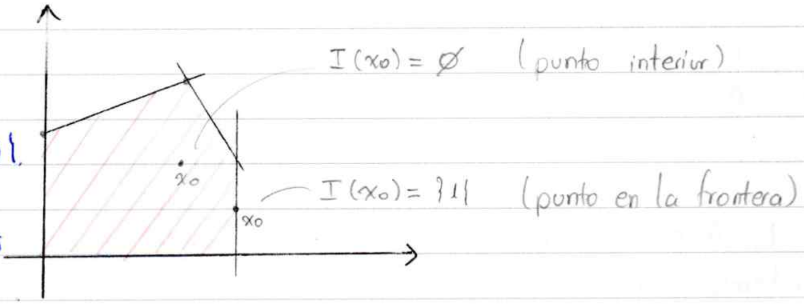
Supongamos además que $K \neq \emptyset$ y tomemos $x_0 \in K$ $\quad (K \subseteq \mathbb{R}^m_+)$

Definamos $I(x_0) = \{i \in \{1,\dots,m\} : a_i^T x_0 = b_i\}$ se dice que $I(x_0)$ es el conjunto de índices, donde x_0, las desigualdades $a_i^T x_0 \leq b_i$ son activas (i.e. x_0 se cumple como igualdad)

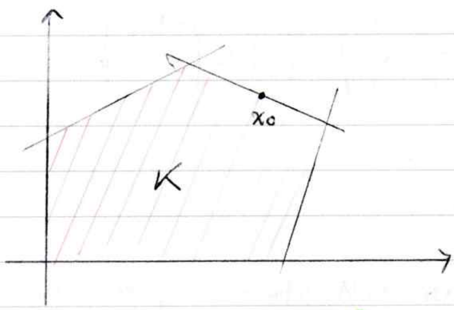
Llamaremos

$L(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x = b_i,\ i \in I(x_0)\}$

(la intersección de los hiperplanos activos para $x_0 \in K$)



Propiedad 1. x_0 es un punto extremo de K si y solo si $\dim(L(x_0)) = 0$ (Es solo un punto)



Propiedad 2. Si K es no vacío, entonces K tiene al menos un punto extremo

Tomando el último teorema de conjuntos convexos

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

se nota que K es convexo, no vacío y acotado inferiormente $(x \geq 0)$

Propiedad 3. Si una función lineal $z = c^T x$ alcanza su máximo en K, ella también lo alcanza en un punto extremo de K.

(Último teorema de optimización de funciones convexas.)

Propiedad 4. Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m \geq n$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Una condición necesaria y suficiente para

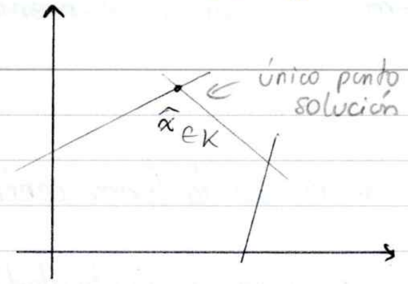
$$\hat{x} \in K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

es que $\hat{x} \in K$, sea la solución única de un subsistema

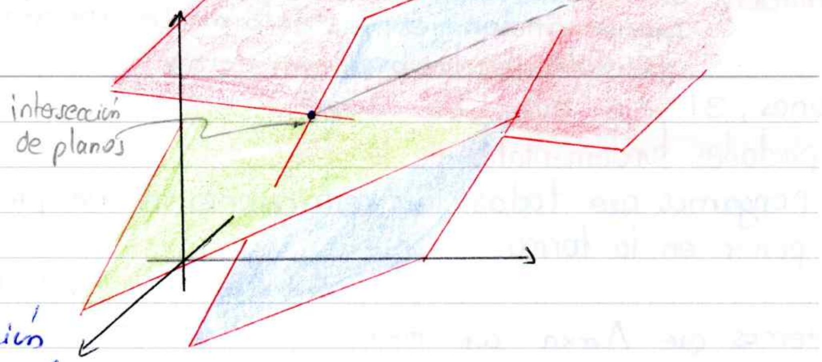
$$\bar{A}x = \bar{b} \quad \text{con } \bar{A} \in \mathbb{R}_{n\times n} \text{ invertible}$$

obtenida de A y b el vector de

en $\mathbb{R}^2$

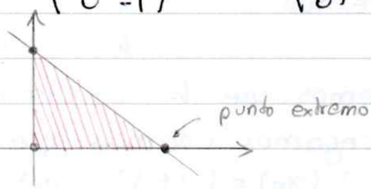


En $\mathbb{R}^3$



es decir $\hat{x} \in K$ debe ser la intersección de n hiperplanos con vectores normales l.i.

Ejemplo: Sea $K = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{matrix} \right\}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 1 \end{cases}$

  ↑ punto extremo encontrado

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_2 = 0 \\ z_1 = 1 \end{cases}$

- $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases}$

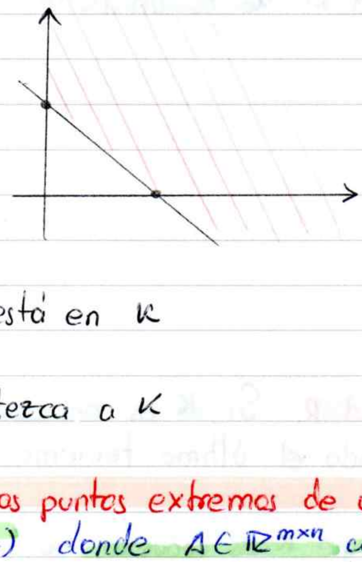
Demostración

Por la propiedad 1, $\hat{x}$ es un extremo de K si $\dim(L(x_0))$ si y solo si $\hat{x} \in K$ sea la solución única de un subsistema extraido de $Ax = b$ de la forma

$$\bar{A}x = \bar{b} \qquad \text{con } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ inversible}$$

Observación: Note que esta propiedad es verdadera si $\hat{x} \in K$

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$



Si tomamos

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases}$$

es decir, $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ es solución de este subsistema pero no está en K

Observación: La propiedad 4 requiere que la solución $\hat{x}$ pertezca a K

Propiedad 5. (Algoritmica o algebraica de caracterización de los puntos extremos de un poliedro)

Sea $K = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0 \}$ (forma estándar de PL) donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \leq n$ tal que $\text{rango}(A) = m$, entonces $\hat{x}$ es un punto extremo de K si y solo si $\hat{x}$ es una solución factible de base, del sistema

$$Ax = b \quad \text{con } x \geq 0$$

Demostración

Es claro que

$$K = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0 \}$$

$$K = \{ x \in \mathbb{R}^n : A'x \leq b' : \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I_n \end{pmatrix}_{2m+n,n} \quad b' = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ -0_n \end{pmatrix}_{2m+n,1}$$

$A \in \mathbb{R}^{(2m+n) \times n}$ tiene más filas que columnas

Por la propiedad 4,

$\hat{x} \in K$ es punto extremo si y solo si $\left\{ \begin{array}{l} \hat{x} \text{ es solución única del subsistema } \bar{A}x = \bar{b} \\ \text{con } \bar{A} \in M_{n \times n} \text{ (obtenida de } A'\text{) y } \hat{x} \in K \end{array} \right.$

Como por hipótesis $m \leq n$, entonces $\bar{A}_{n\times n}$ contendrá a lo más m filas de la submatriz $\left[\frac{A}{-A}\right]$ y al menos $n-m$ de I_n, (pues rango$(A) = m$) es decir existen al menos $n-m$ ecuaciones de la forma $-x_{i_j} = 0$ $j = 1, \dots, n-m$, es decir, al menos $n-m$ variables de la solución son nulas (propiedad de las soluciones de base)

Luego de permutar las columnas de $\bar{A}$ (si es necesario) $\bar{A}$ podría ponerse en la forma

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & \underbrace{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}}_{I_{n-p}} \end{pmatrix} \quad \text{con } p \leq m$$

$$\overset{\longleftrightarrow}{p} \qquad \overset{\longleftrightarrow}{n-p}$$

- $\bar{A}$ es inversible si y solo si A_1 es inversible
- Podemos suponer que las filas que se toman son solo de A (porque si se toman de $-A$ se obtiene la misma ecuación) $\begin{cases} a_i^T x \leq b_i \\ -a_i^T x = -b_i \end{cases}$ No se pueden tomar ambas a la vez

→ Si $p = m$

$$\begin{array}{cc} m & n-m \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & -I_{n-m} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

la solución de A es

$$\begin{cases} A_1 x_B = b \\ -I_N = 0 \end{cases} \quad \text{luego si } B$$

la solución es factible de base y $\hat{x} = (x_B \,\vdots\, x_N)^T \in K$

- si $p < n$ como rango$(A) = m$, se pueden escoger $m-p$ filas de A y formar un sistema equivalente al anterior de la forma ← submatriz de A

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$$

con la misma solución que $\bar{A}x = \bar{b}$ lo que nos da una solución degenerada pues habrían $n-p > n-m$ variables de base nulas

Ejemplo:

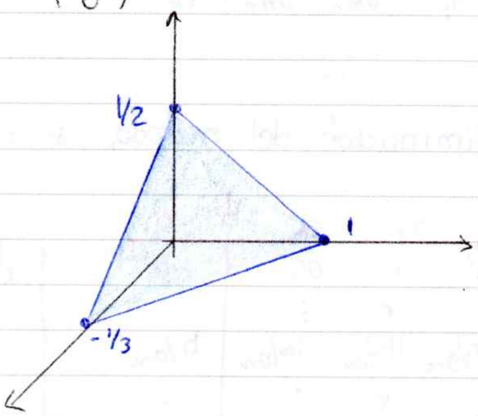
$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 3 \end{array} \right\} \qquad A = (3 \;\; 1 \;\; 2) \qquad b = (1)$$

$$B_1 = (a^1) = 3$$

$$x_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3$$

La solución de base

$$\hat{x}_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in K \quad \text{es por lo tanto, un extremo de } K$$



- Si $B_2 = (a^2) = 1$

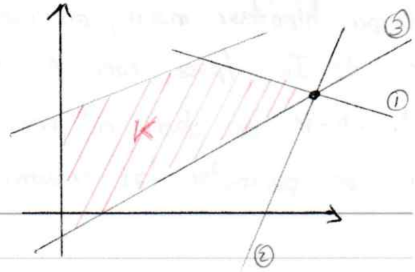
$$x_2 = 1 - 3x_1 - 2x_3 \qquad \hat{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in K \text{ por lo tanto, es extremo de } K$$

- Si $B_3 = (a_3) = 2$ $\quad \hat{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Observación: Un mismo punto extremo de K

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}$$

Puede corresponder a diferentes bases.



Ejemplo. Consideremos el sistema
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

- Si $B_1 = (a^2\ a^4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (a^2\ a^4) \to \hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

son el mismo punto

Observación: Bases diferentes pueden conducir a un mismo punto extremo

Observación Un problema
$K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b;\ x \geq 0\}$ y $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \leq n$ tiene un conjunto finito de puntos extremos.

$\to$ # máximo de extremos $\leq C^n_m$ (combinación de n tomado m).

se basa en las bases que se construyen

Por ejemplo, si $n = 400$ y $m = 100$ $\quad C^{400}_{100} \approx 10^{10}$ (muy grande)

La programación lineal se dice un problema de Optimización combinatoria

Lunes, 1 de febrero de 2022

Método de Gauss-Jordan

Idea: Dado un sistema lineal $Ax = b$ con $m \leq n$ y $\text{rango}(A) = m$. Si conocemos una base B de A, entonces quisiéramos construir un sistema equivalente
$$I_m x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b$$
para calcular soluciones de base factibles.

Al sistema lineal $Ax = b$, se lo representa con la matriz ampliada

x_1	x_j	x_k	x_n	b
a_{11}	a_{1j}	a_{1k}	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{i1}	a_{ij}	a_{ik} pivote	a_{in}	b_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{r1}	a_{rj}	a_{rk}	a_{rn}	b_r
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{mj}	a_{mk}	a_{mn}	b_m

El objetivo es hacer uno en el pivote, cero en el resto.

fila del pivote $\to$ (fila r)

columna del pivote (columna k)

Sea $a_{rk} \neq 0$ un término que denominaremos pivote, y la idea del método de Gauss-Jordan es construir un sistema equivalente con la k-ésima columna e^r de I_m.

Luego, de una iteración de eliminación del método, se obtiene un sistema equivalente de la siguiente manera.

$x_1 \cdots$	$x_j \cdots$	$x_k \cdots$	x_n	b
a'_{11}	a'_{1j}	0	a'_{1n}	b'_1
$\vdots$	$\vdots$	0	$\vdots$	$\vdots$
a_{r1}/a_{rk}	a_{rj}/a_{rk}	a_{rk}/a_{rk}	a_{rn}/a_{rk}	b/a_{rk}
$\vdots$	$\vdots$	0	$\vdots$	$\vdots$
a'_{m1}	a'_{mj}	0	a'_{mn}	b'_m

Para escritura se omitieron $\to$ las filas intermedias respecto a la matriz anterior.

donde
$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ik}\left(\frac{a_{rj}}{a_{rk}}\right)$$
$i = 1, \dots, r-1, r+1, \dots, m$
$j = 1$

Para $i = r$ (fila del pivote)
$$a'_{rj} = a_{rj}/a_{rk}$$

$$b'_i = b_i - a_{ik}\left(\frac{b_r}{a_{rk}}\right) \quad i = 1, \dots, r-1, r+1, \dots, n$$
$$b'_r = \frac{b_r}{a_{rk}}$$

Regla del rectángulo

$$\begin{array}{ccc} a_{ij} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \times & \vdots \\ a_{rj} & \cdots & a_{rk} \end{array} \qquad a_{ij}' = a_{ij} - a_{ik}\left(\frac{a_{rj}}{a_{rk}}\right)$$

Ejemplo: Consideremos

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + \quad + x_4 = 2 \end{cases}$$

Notemos que este sistema pone en evidencia, una solución de base factible asociada a la base $B = (a^3\ a^4) = Id_2$

$$\begin{array}{l} r=1 \\ \text{pivote} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \overset{k=2}{2} & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & \vdots & 1/2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & \vdots & 1/2 \\ 5/2 & 0 & 1/2 & 1 & \vdots & 5/2 \end{pmatrix}$$

Obtenemos luego de una eliminación Gaussiana un sistema equivalente que pone en evidencia una solución de base asociada a la base $B' = (a^2\ a^4)$ factible con $\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 5/2 \end{pmatrix}$ extremo

Definición Dadas dos bases B y B' de un sistema $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \leq n)$ y rango $(A) = m$. Se dice que B y B' son bases vecinas si se diferencian exactamente en una sola columna $|B' \setminus B| = |B \setminus B'| = 1$

¿Qué llamaremos un pivotaje en el método del simplex?

Un pivotaje es un paso iterativo que permite construir a partir de un sistema equivalente al inicial

$$I_n x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b$$

que pone en evidencia una solución de base asociada a B, construir otro sistema equivalente

$$I_m x_{B'} + B'^{-1} N x_{N'} = B'^{-1} b'$$

donde B' es una base vecina de B.

Tabla condensada.

Para un sistema de la forma

$$I_m x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b$$

podríamos usar una escritura condensada

$$x_B = B^{-1} b + B^{-1} N (-x_N)$$

y construimos una tabla condensada

		$-x_N$
x_B	$B^{-1}b$	$B^{-1}N$

Idea: Despejar x_B en función de $-x_N$ para aplicar la regla del rectángulo a la matriz condensada

lado derecho

$$(I_m \,\vdots\, \underbrace{B^{-1}N}_{\text{pivote}} \,\vdots\, B^{-1}b) \sim (x_B \,\vdots\, B^{-1}b \,\vdots\, \underbrace{\overset{-x_N}{B^{-1}N}}_{\text{pivote}})$$

Ejemplo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + \quad x_4 = 2 \end{cases}$$

Este sistema pone en evidencia una solución de base $B = (a^3\ a^4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\hat{x} = (0\ 0\ 1\ 2)^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$ GJ

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & \vdots & 1/2 \\ 5/2 & 0 & 1/2 & 1 & \vdots & 5/2 \end{pmatrix}$$

		$-x_1$	$-x_2$
x_3	1	1	2
x_4	2	2	-1

		$-x_1$	$-x_3$
x_2	1/2	1/2	1/2
x_4	5/2	5/2	1/2

Reglas de pivotaje en la tabla condensada.

① Escoger un pivote $a_{rk} \neq 0$ con $1 \leq r \leq m$. Sea $x_p = x_{B(r)}$ y $x_q = N(k)$

$x_{B(1)}$	
$B(r)$	
$B(m)$	

Se intercambia x_p con x_q.

② Dividir la fila del pivote para el pivote. (salvo en la posición del pivote)

③ Dividir la columna del pivote para el pivote. (salvo la posición del pivote) y cambiar de signo.

④ Los términos restantes, calcular usando la regla del rectángulo.

Ejemplo:

		$-x_4$	$-x_3$	$-x_6$	$-x_7$
x_2	1	1	-1	0	-1
x_5	2	0	0	0	0
x_1	0	1	1	2	1

↑ pivote

$B = (a_2\ a_5\ a_1)$ $m = 3$, $n = 7$.

$$\hat{x}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{solución degenerada.}$$

		$-x_1$	$-x_3$	$-x_6$	$-x_7$
x_2	1	-1	-2	-2	
x_5	2	0	0	0	0
x_4	0	1	1	2	1

$B' = (a^2\ a^5\ a^4)$

$$\hat{x}_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a_{rk} = a_{11} = 1$

		$-x_2$	$-x_3$	$-x_6$	$-x_7$
x_4	1	1	-1	0	-1
x_5	2	0	0	0	0
x_1	-1	-1	2	0	2

Lunes, 7 de febrero de 2022.

$Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}_{m \times n}$, $m \leq n$ ← el sistema es subdeterminado, $\text{rango}(A) = m$. Si B es base de A, entonces
$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

Tabla condensada.

		$-x_N$
x_B	$B^{-1}b$	$B^{-1}N$

← aplicamos un pivotaje con las reglas de Gauss-Jordan

↑ solución de base

Reglas de pivotaje del simplex

Regla 2: Permite pasar de un punto extremo del poliedro a otro punto extremo (punto extremo $\Leftrightarrow$ solución de base factible)

Supongamos que tenemos una tabla que pone en evidencia una solución de base B factible.

Para esta regla necesitamos que se haya cumplido la primera.

Supongamos que el pivote está en la columna k, $1 \leq k \leq n - m$.

		$-x_{N(k)}$
$x_{B(1)} =$	y_{10}	y_{1k}
$\vdots$	$\vdots$	
$x_{B(i)} =$	y_{i0}	y_{ik}
$\vdots$	$\vdots$	
$x_{B(r)} =$	y_{r0}	y_{rk} ← pivote
$\vdots$	$\vdots$	
$x_{B(m)} =$	y_{m0}	y_{mk}
	vector $y \geq 0$ si está asociado a una solución de base	columna del pivote

La regla 2 determina la fila del pivote de tal forma que pasemos de un punto extremo a otro del poliedro

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, \ x \geq 0\}$$

→ Supongamos que r es la fila del pivote. Según las reglas de pivotaje

$$\alpha := y'_{0r} = \frac{y_{r0}}{y_{rk}} > 0$$

- Se debe cumplir que $y_{rk} > 0$. ← condición del pivote
- Por otro lado, por la regla del rectángulo, si $i \neq r$

$$y'_{i0} = y_{i0} - \underbrace{\frac{y_{r0}\, y_{ik}}{y_{rk}}}_{\alpha \geq 0}$$

Queremos que $y'_{i0} \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, m$, es decir

$$y_{i0} - \alpha y_{ik} \geq 0 \qquad \forall i \text{ con } i \neq r$$

- Si $y_{ik} \leq 0$, no hay inconvenientes.

El problema es cuando $y_{ik} > 0$, entonces vemos que

$$y_{i0} - \alpha y_{ik} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_{i0}}{y_{ik}} - \alpha \geq 0$$

es decir

$$\alpha \leq y_{i0}/y_{ik}$$

$\forall i = 1, \ldots, m$ con $i \neq r$.
Así, $y_{r0}/y_{rk} \leq y_{i0}/y_{ik}$, $y_{ik} > 0$.

Entonces la fila del pivote debe ser tal que

$$\frac{y_{r0}}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{y_{i0}}{y_{ik}} \;\middle|\; y_{ik} > 0\right\}$$

Observación Si $B = (a^{B(1)}, \ldots, a^{B(m)})$ es una base de $Ax = b$, entonces todo vector $a^{N(j)} \in N$ (fuera de la base) es una c.l (combinación lineal) única de las columnas de B

$$a^{N(j)} = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\, a = B\, y_{\cdot j}$$

es decir $y_{\cdot j} = B^{-1} a^{N(j)}$

$$B^{-1} N = B^{-1}\left(a^{N(1)} \ldots a^{N(j)} \ldots a^{N(n-m)}\right)$$

$$= \left(B^{-1} a^{N(1)} \ldots \underbrace{B^{-1} a^{N(j)}}_{y_{\cdot j}} \ldots B^{-1} a^{N(n-m)}\right)$$

Observación Se puede notar que $a^{B(r)} \in B$ puede ser reemplazado por $a^{N(k)} \in N$ para obtener una base vecina

$$B' = (B \setminus a^{B(r)}) \cup a^{N(k)}$$

si y solo si $y_{rk} \neq 0$

Regla 1.: Permite el paso de un extremo a uno mejor (e.d. la función crezca)

Consideremos el problema de PL subdeterminado

$$\begin{cases} \max \ z = c^T x \\ \text{s.a.r} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m < n$, $\operatorname{rang}(A) = m$.

Sea $z = c^T x$ la función objetivo, lo que puede fácilmente representarse en la forma

$$z = c_B^T x_B + c_N^T x_N.$$

B una base factible de A.

$$z = c_B^T(B^{-1}b - B^{-1}N x_N) + c_N^T x_N$$
$$= \underbrace{c_B^T B^{-1} b}_{(1\times m)\,(m\times m)\,(m\times 1)} - (c_B^T B^{-1}N - c_N^T) x_N$$

z está expresada en función de las variables fuera de base

Hacemos las siguientes notaciones

$$z_0 = c_B^T \underbrace{B^{-1}b}_{x_B}$$: el valor de z en el punto extremo asociado a B (solución de base factible)

Poniendo como notación general

$$z_j = c_B^T B^{-1} a^{N(j)} \qquad 1 \leq j \leq n-m$$

Luego

$$z = z_0 - \sum_{j=1}^{n-m}{}' (z_j - c_j) x_j.$$

Se pone que

$$\boxed{z = z_0 - \sum_{j:\, a^{N(j)} \notin B}{}' (z_j - c_j) x_j}$$

- $z_j = c_B^T B^{-1} a^{N(j)}$
- $c_B^T B^{-1} N = c_B^T B^{-1}(a^{N(1)} \ldots a^{N(j)} \ldots a^{(n-m)})$
$$= (c_B^T B^{-1} a^{N(1)} \ldots c_B^T B^{-1} a^{N(j)} \quad c_B^T B^{-1} a^{(n-m)})$$

$$(c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N = \sum_{j:\, a^{N(j)} \notin B}{}' (c_B^T B^{-1} a^{N(j)} - c_j) x_j$$

En qué columna $a^{N(j)}$ tomo el pivote para que el valor $z_0' \geq z_0$ (luego del pivotaje)

$(z = z_0 - x_1 + 16x_2 - 18x_5)$ ← ejemplo.

Es claro que por el pivotaje

$$z_k - c_k < 0$$

donde $a^{N(k)}$ es la columna de A que entra a la nueva base

Observación El método del SIMPLEX clásico, si hay varios valores negativos de $z_j - c_j$, se toma el «más negativo»

$$k = \arg\min \{ z_j - c_j < 0 \; ; \; j\, a^{N(j)} \in N \}$$ ← índice del más negativo

Tabla del simplex

		$-x_j$	
$z =$	z_0	$\cdots \quad z_j - c_j$	← fila 0
$x_B =$	$B^{-1}b$	$\cdots \quad B^{-1}a^{N(j)}$	← zona de pivotaje
	↑ columna 0.	$B^{-1}N_{m\times(n-m)}$	

Algoritmo del SIMPLEX simplificado.

Paso 0: Poner al problema de PL en una forma estándar subdeterminada

$$\begin{cases} \max \; z = c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad m \leq n$$

Paso 1: Si se conoce una solución de base factible asociada a una base B, construir la tabla del simplex asociada.

z	z_0	$c_B B^{-1}N - c_N$
x_B	$B^{-1}b$	$B^{-1}N$

es difícil si B es cualquiera (cálculo de B^{-1})

Paso 2: Paso iterativo.

Averiguar si hay una solución de base factible aplicando las reglas 1 y 2 en ese orden.

> si encontramos un pivote, actualizamos la tabla del simplex y regresamos a ②

a) si no se pueden aplicar las reglas. I

$\forall j : a^{N(j)}, \quad z_j - c_j \geq 0$

↳ FIN (la solución es óptima)

b) Pasa la regla (I) pero no se puede aplicar (II)

$\exists j \text{ tq } \quad z_j - c_j < 0$

pero

$y_{ij} \leq 0 \qquad \forall i = 1, \dots, m$

$z_j - c_j$
//
y_{ij}

↳ FIN (El problema es no acotado)

Observación 1) En el paso 2 suponemos que el problema es factible y rango $(A) = m$

2) Nosotros podemos actualizar la tabla del SIMPLEX, con las mismas reglas de actualización del sistema por que podemos suponer que la fila cero corresponde a otra ecuación

$$\begin{cases} z = z_0 - \sum\limits_{j: a^{N(j)} \notin N} (z_j - c_j) x_j \\ x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N \end{cases}$$

Ejemplo. Aplicar el SIMPLEX simplificado para resolver el siguiente problema.

$$(P) \begin{cases} \text{máx} \quad z = 5x_1 + 8x_2 \\ \text{s.a.r.} \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

PASO 0:

$$\begin{cases} \text{Máx} \quad z = 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 + s_1 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + s_2 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + s_3 = 1 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \quad s_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 5} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

$C_3^5 = 5 \times 4 = 20$

A lo máximo hay 20 bases

Paso 1. Tomemos evidentemente como $I_3 = B^1 = (a^3\ a^4\ a^5)$

		$-x_1$	$-x_2$
$z=$	0	-5	-8
$S_1=$	2	1	1
$S_2=$	0	1	-2
$S_3=$	1	-1	4

← pivote

y el punto extremo

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{solución degenerada.}$$

Paso 2:

Regla 1 → $k=2$ (la columna del pivote $a^{N(2)} = a^2$)

Regla 2

$$\text{Min}\left\{ \frac{2}{1}, \frac{1}{4} \right\} = \frac{1}{4}$$

$x_{B(3)} = S_3 \qquad r = 3.$

Actualizamos la tabla $\qquad B^2 = (a^3\ a^4\ a^2)$

		$-x_1$	$-S_3$
z	2	-7	2
S_1	7/4	5/4	-1/4
S_2	1/2	1/2	1/2
x_2	1/4	-1/4	1/4

$$\hat{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 7/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z = 2 + 7x_1 - 2S_3 \\ z = 5x_1 + 8x_2 \end{cases}$$

Regla 1 → $k=1$

$$\text{Min}\left\{ \frac{7/4}{5/4}, \frac{1/2}{1/2} \right\} = 1 \qquad r = 2$$

		$-S_2$	$-S_3$
z	9	14	9
S_1	1/2	-5/2	-7/2
x_1	1	2	1
x_2	1/2	1/2	1/2

$B^3 = (a^3\ a^1\ a^2)$

$$\hat{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

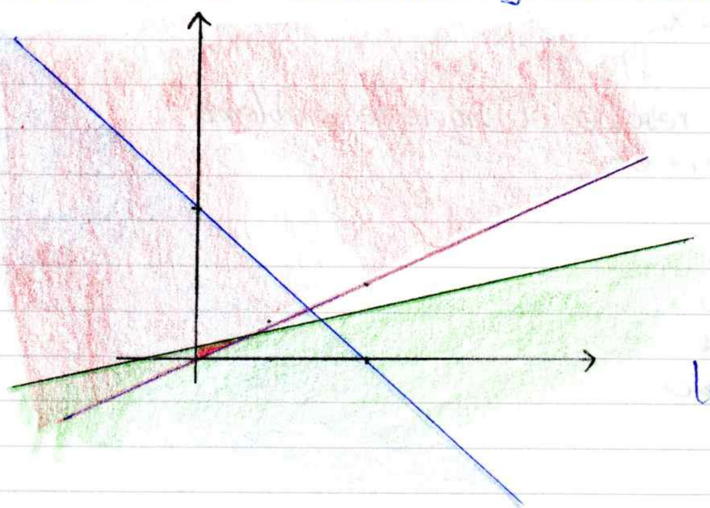
Como todos los valores son positivos $z_j - c_j \geq 0 \quad \forall j : a^{N(j)} \in N$

El extremo obtenido es óptimo.

$x_1^* = 1,\ x_2^* = 1/2$ y $z^* = 9$.

Clase, martes 8 de febrero de 2022

El problema (P) es bivariado y se resuelve gráficamente en $\mathbb{R}^2$



En $\mathbb{R}^5$ partimos del punto

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

proyectando en $\mathbb{R}^2$

$$\tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego en la primera iteración

$$\hat{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 7/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

- En la segunda iteración

$$\hat{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

El test de optimalidad es adecuado pues si $\forall j \quad a^{N(j)} \in N$ se tiene que $z_j - c_j \geq 0$, entonces como

$$z = z_0 - \sum_{j : a^{N(j)} \in N} \overbrace{(z_j - c_j)}^{\geq 0} x_j$$

entonces cualquier pivotaje hace que sus vecinos tengan un valor de z_0 menor que z_0, es decir es un máximo local y como z es cóncava y por un teorema de convexidad, este máximo es global

Ejemplo. Un problema no acotado.

Aplicar el método simplificado del simplex al siguiente problema

$$\begin{cases} \max \quad z = x_1 + 2x_2 \\ s.a.r. \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ \quad x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

PASO 0:

Poner (P) equivalentemente en la forma estándar

$$\begin{cases} \max \quad z = x_1 + 2x_2 \\ s.a.r \\ -x_1 + x_2 + S_1 \qquad = 2 \\ \qquad x_2 \qquad + S_2 = 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Paso 1: Si $B' = (a^3\ a^4)$ $\quad x_{B_L} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}$ $\quad x_{N_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

		$-x_1$	$-x_2$
z	0	-1	-2
S_1	2	-1	1 ← pivote
S_2	3	0	1

Paso 2

$R_1 \to -2$ $\quad k = 2$ (segunda columna)

$R_2 \to \min\left\{\frac{2}{1}, \frac{3}{1}\right\} \to r = 1$

iteración 1

		$-x_1$	$-S_2$
z	4	-3	2
x_2	2	-1	1
S_2	1	1	-1

pivote

iteración 2. $R_1 \to k = 1$

$R_2 \to r_2$

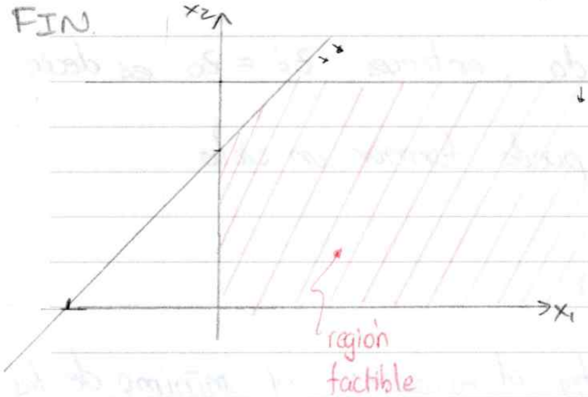
		$-S_1$	$-S_2$
z	7	3	-1
x_2	3	1	0
x_1	1	1	-1

iteración 3

$R_1 \to k = 2$

$R_2 \to$ no se puede aplicar pues $y_{\cdot 2} \leq 0$. Así, el problema no es acotado

FIN.



Observación

Si en la tabla inicial no aplicáramos la regla I clásica y tomamos $k=1$, notamos que el vector $y_{\cdot 1} < 0$ y por lo tanto, el problema es no acotado.

Demostración del criterio de problema no acotado

Supongamos que

Supongamos que existe j : $a^{N(j)} \in N$ y $z_j - c_j < 0$ pero $y_{ij} = B^{-1} a^{N(j)} \leq 0$

Es decir, $a^{N(j)} = B\, y_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}\, a^{B(i)}$

Sabemos que $B x_B = b$. Sea $d < 0$

$$B x_B = \sum_{i=1}^{m} x_{B(i)}\, a^{B(i)} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_{B(i)} + d y_i)}_{\geq 0} a^{B(i)} - d \overbrace{\sum y_{ij}\, a^{B(i)}}^{a^{N(j)}} = b$$

es decir, $\forall d < 0$,

se obtienen soluciones factibles del sistema $Ax = b$

$$\left\{ \begin{aligned} x_{B(i)} &= x_{B(i)} + d\, y_{ij} \geq 0 \qquad j = 1, \dots, m \\ x_{N(j)} &= -b \geq 0 \end{aligned} \right.$$

Si evaluamos z sobre estos puntos factibles, entonces

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^{n} c_{B(i)} \cdot (x_{B(i)} + d\, y_{ij}) - d c_{N(j)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_{B(i)} x_{B(i)} + c_{B(i)} d\, y_{ij} - d c_{N(j)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_{B(i)} x_{B(i)} + d\,(c_{B(i)}^T y_{\cdot j} - c_{N(j)}) \\ &= c_B^T x_B + d\,(c_B^T B^{-1} a^{N(j)} - c_{N(j)}) \\ &= c_B^T x_B + d\,\underbrace{(z_j - c_j)}_{<0} \qquad \forall d < 0 \end{aligned}$$

Si $d \to -\infty$, entonces $z \to +\infty$

Aparición de la degeneración
Cuando hacemos un pivotaje

z	z_0	$z_k - c_k < 0$
$x_{B(r)}$		y_{rk}

Calculamos z_0'

$$z_0' = z_0 - \underbrace{\frac{y_{r0}}{y_{rk}}}_{>0} \underbrace{(z_k - c_k)}_{\leq 0}$$

Notemos que si
- $y_{r0} > 0$
  $z_0' > z_0$

- Propiedad de deformación del simplex
  Si el algoritmo del SIMPLEX no construye soluciones degeneradas, el simplex encuentra la solución en un número finito de pasos.

Nota: Estadísticamente, el método simplex resuelve el problema de PL en aproximadamente $3m$ iteraciones

- Si $y_{r0} = 0$, es decir, si la solución es degenerada, entonces $z_0' = z_0$ es decir, nos quedamos en la misma curva de nivel.

Se mostró que para ejemplos específicos el simplex puede formar un ciclo.
(CICLO DE BEALE)

Algoritmo del simplex lexicográfico. (regla de Bland)

Las soluciones degeneradas aparecen cuando hay empates al escogerse el mínimo de las reglas 1 y 2

		$-x_2$	$-x_1$	$-x_4$
z	10	2	-1	-2
x_3	5	1	0	10
x_5	3	0	-1	6

pivote

$R_1 \to k=3$
$r \to \min\{5/10, 3/6\} = 1/2$ empate
$r = 2$

		$-x_2$	$-x_1$	$-x_5$
$z =$	11			1/3
$x_3 =$	0			-5/3
$x_4 =$	1/2	0	-1/6	1/6

Viernes, 11 de febrero de 2022.

Orden lexicográfico.

		$-x_3$	$-x_2$	$-x_6$	$-x_1$
$z=$	20	2	-3	5	-3
$x_5=$	6	3	1	-1	3
$x_4=$	4	2	1	0	0
$x_7=$	8	0	-1	2	4

← Regla 1.
$x_1 \leq x_2$ por orden lexicográfico

Regla 2:
$\min\left\{\frac{6}{3}, \frac{8}{4}\right\} = 2$, Como $x_5 = x_7$, $r=1$
Se elige x_5

Observación: Aplicando la regla de Bland no hay ciclos en la aplicación del simplex.

- En la práctica no se han encontrado ciclos en la aplicación del simplex clásico.
- La aplicación de la regla de Bland conduce a obtener el óptimo de un problema de PL en un número de iteraciones superior al de la aplicación del método clásico.

Ejemplo: Un problema con infinito número de soluciones (caso usual en la práctica)

$$(P)\begin{cases} \text{Máx } z: x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.r.} \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ \quad\quad x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

it 1

		$-x_1$	$-x_2$
$z=$	0	-1	-2
$s_1=$	4	1	2
$s_2=$	1	0	1

$r_1 = k = 2$
$\min\left\{\frac{4}{2}, \frac{1}{1}\right\} = 1 \quad r=2.$

it 2

		$-x_1$	$-s_2$
$z=$	2	-1	2
$s_1=$	2	1	-2
$x_2=$	1	0	1

$R_1 \Rightarrow k=1$
$R_2 \Rightarrow r=1$
$z^* = 4.$

it 3

		$-s_1$	$-s_2$
$z=$	4	1	0
$x_1=$	2	1	-2
$x_2=$	1	0	1

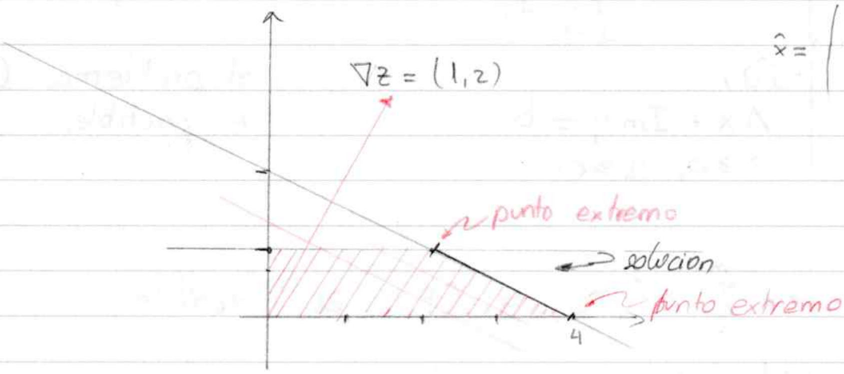
FIN

Solución óptima $x_1 = 2$, $x_2 = 1$
Como $z_2 - c_2 = 0$ si se hiciera un pivotaje aplicando la regla 2 en dicha tabla.

		$-s_1$	$-x_2$
z	4	1	0
x_1	4	1	-2
s_2	1	0	1

$x_1^* = 4$, $x_2^* = 0$ $\quad z^* = 4$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hdashline 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \hdashline 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Observación: Un problema de PL tiene varias soluciones extremales diferentes o infinito número de soluciones si en la tabla óptima se tiene que para algún j tal que $a^{N(j)} \in N$

$$z_j - c_j = 0. \quad \leftarrow \text{valores marginales}$$

Método del simplex de las dos fases.

Este método permite resolver cualquier problema de PL escrito en una forma estándar equivalente

$$(P) = \begin{cases} \text{Máx } z: c^T x \\ \text{s.a.r} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad A \in M^{m \times n} \text{ con } n, m \text{ cualesquiera.} \quad b \geq 0$$

Ejemplo
$$\begin{cases} \text{Máx } z = -x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.r} \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 - x_2 \quad 5 \\ x_1 + 3x_2 \leq -7 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Vamos a ponerlo en la forma estándar

$$\text{Máx } z = -x_1 + 2x_2$$
s.a.r.
$$x_1 - x_2 - x_3 = 3$$
$$x_1 - x_2 = 5 \qquad b \geq 0$$
$$-x_1 - 3x_2 - x_4 = 7$$

$$B_{j_i} = (a^2\ a^3\ a^4) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad ¿\, x_B = B^{-1} b \geq 0?$$

$m = 3,\ n = 4$ $\qquad C_3^4 = 4$

Para probar que B es una base factible habría que combrobar que:

i) Que B es invertible

ii) $\begin{cases} x_B = B^{-1} b \geq 0 \\ x_N = 0 \end{cases} \rightarrow B x_B = b.$

El método de las dos fases consiste en aplicar

PRIMERA FASE: Determina si el problema (P) es factible o no, y calcula una base factible inicial.

SEGUNDA FASE: Aplicar el método simplificado a partir de esa base factible inicial, cuya tabla del simplex se construye en la primera etapa.

Primera fase.

Supongamos que tenemos a resolver un problema de PL en la forma estándar

$$(P) = \begin{cases} \text{Máx } z = c^T x \\ \text{s.a.r.} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ cualquiera con } b \geq 0$$

1) Definamos el problema auxiliar

$$(PA) \begin{cases} \text{Min } \omega = \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \text{s.a.r.} \\ Ax + I_m y = b \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

problema auxiliar.

(*) Si al óptimo $\omega^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* > 0$ el problema (P) no es factible.

Demostración. (*)

Supongamos que $\omega^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* > 0$ y (P) es factible.

Sea $\bar{x}$ una solución factible de (P) es decir

$$A\bar{x} = b \quad y \quad \bar{x} \geq 0$$

problema auxiliar

Notemos que el vector $(\bar{x}, 0)$ es factible para (PA), pero en este punto como $\bar{y} = 0$ se tiene que ω toma el valor de 0, lo cual no es posible pues por hipótesis tenemos que $\omega > 0$

> ¿Cómo calcular una base inicial para resolver el problema (P) o uno equivalente?

- Resuelve el problema auxiliar
- Si $\omega^* > 0$ el problema (P) es no factible y fin.
- Si en alguna iteración de solución del problema (PA) se

obtiene $w^* = 0$ con $w = \sum_{i=1}^{m} y_i = 0$ con $i = 1, \dots, m$, $y_i = 0$.

Se presentan 3 casos.

1) Si en la base óptima se tiene solo variables originales x_i FIN. Fin de la primera fase.

2) Si en la base óptima hay alguna variable auxiliar ($w = 0 \Rightarrow y_i \geq 0$ $i = 1, \dots m$) que esté en la base, la solución de base es degenerada

w	0	$x_{N(j)}$	$y_{N(k)}$
x_{20}		↑	↑
⋮		variables	variables
y_5	0	originales	artificiales
⋮			
y_7	0		

Hago pivotajes que permitan sacar a variables auxiliares de la base y permitan intercambiarlas con variables originales fuera de la base.

Puedo hacer pivotajes (con puntos (pivotes) no nulos positivos o negativos) hasta que no quede ninguna variable artificial en la base.

3) Existe una variable artificial y_i que no puede ser intercambiado con ninguna variable x_j fuera de base

		x_i	x_k
$w =$	0		
		⋮	⋮
$y_i =$	0	0	0

Por un razonamiento de álgebra lineal, la i-ésima ecuación del sistema $Ax = b$ es redundante

FASE DOS.

Se resuelve el problema (P) a partir de la base B inicial obtenida en la fase 1.

Observación. ¿Cómo se resuelve un problema de minimización con el SIMPLEX simplificado.

$$z = z_0 - \sum_{j : a^{N(j)} \in N} (z_j - c_j) x_j$$

si se quiere minimizar, con la regla I del simplex

R1'] Escogemos $j : a^{N(j)} \in N$ y $z_j - c_j > 0$

z	z_0	$x_{N(j)}$ $z_j - c_j > 0$
$x_{B(r)}$	y_{r0}	

$$z_0 = z_0 - \frac{y_{r0}}{y_{rj}} (z_j - c_j)$$

Test de parada

Si no se puede aplicar la regla, es decir $z_j - c_j \leq 0 \rightarrow$ (FIN)

$R_2' = R_2$

Ejemplo

$$(P)\begin{cases} \text{Max } z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.r.} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 3 \end{cases}$$

PRIMERA FASE

$$(PA) = \begin{cases} \text{Min } w = y_1 + y_2 \\ \text{s.a.r} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + y_1 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + y_2 = 2 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 3 \quad y_j \geq 0 \quad j = 1,2 \end{cases}$$

despejando

$$w = y_1 + y_2 = (5 - x_1 - 2x_2 - x_3) + (2 - 3x_1 + 2x_2 - 3x_3) = 7 - 4x_1 + 0x_2 - 4x_3$$

			$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
Min	$w =$		4	0	4
	$z =$	0	-2	-1	0
	$y_1 =$	5	1	2	1
	$y_2 =$	2	3	-2	3

$R_1 \Rightarrow k = 1 \qquad \text{Min}\left\{\frac{5}{1}, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow r = 2$

		$-y_2$	$-x_2$	$-x_3$
$w =$	$13/3$	$-4/3$	$8/3$	0
$z =$	$4/5$	$+2/3$	$-7/3$	2
$y_1 =$	$13/3$	$-1/3$	$8/3$	0
$x_1 =$	$\frac{2}{3}$	$1/3$	$-2/3$	1

$R_1' \Rightarrow k = 2$

$R_2' \Rightarrow r = 1$

		$-y_2$	$-y_1$	$-x_3$
$w =$	0			
$z =$	$41/8$			2
$x_2 =$	$13/8$			0
$x_1 =$	$7/4$			1

Base factible para el problema original

SEGUNDA FASE

			$-x_3$
Máx	z	$41/8$	2
	$x_{23} =$	$13/8$	0
	$x_1 =$	$7/8$	1

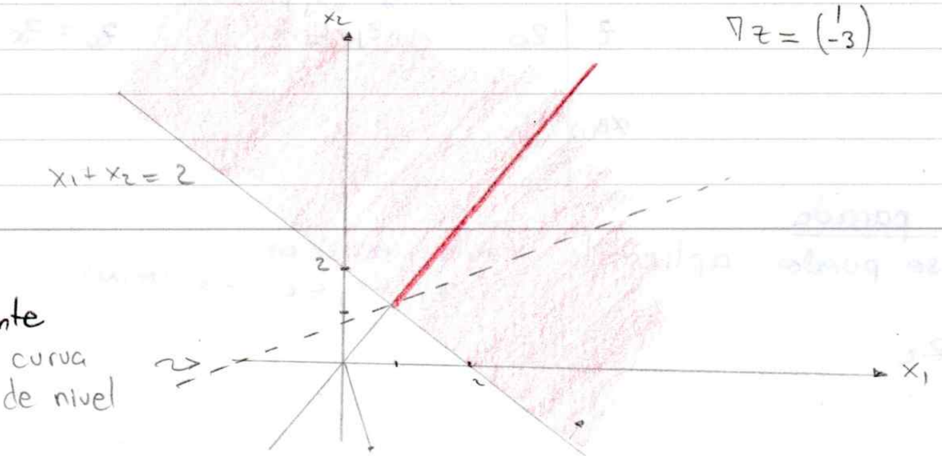
la solución es óptima

Ejemplo.

$$\begin{cases} \text{Máx } z: x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a.r.} \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\nabla z = \binom{1}{-3}$

a) Resuelva gráficamente



$$(P)\left|\begin{array}{l} \text{Máx } z = x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a.r.} \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array}\right.
\qquad
(PA) = \left|\begin{array}{l} \text{Mín } w = y_1 + y_2 \\ \text{s.a.r.} \\ x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = 2 \\ x_1 - x_2 + y_2 = 0 \\ x_i \geq 0 \ i=1,\dots,3 \quad y_j \geq 0 \ j=1,2. \end{array}\right.$$

Mín

		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
w	2	2	0	1
z	0	-1	3	0
$y_1 =$	2	1	1	-1
$y_2 =$	0	1	-1	0

$\longrightarrow$

		$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$
w	2	-2	2	1
z	0	1	2	0
y_1	2	-1	2	-1
x_1	0	1	-1	0

		$-y_1$	$-y_2$	$-x_3$
w	0			
z	-2			2
$x_2 =$	1			$1/2$
$x_1 =$	1			$1/2$

SEGUNDA FASE.

		$-x_3$
$z =$	-2	2
x_2	1	$1/2$
x_1	1	$1/2$

Entonces la solución es óptima.

Lunes, 14 de febrero de 2022

Interpretación de las variables duales y costos reducidos

Proposición: Si B es una base óptima de un problema de PL en la forma estándar

$$(P)\left|\begin{array}{l} \text{Máx } z = c^T x \\ \text{s.a.r.} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}\right. \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad m \leq n \qquad \text{rang}(A) = m$$

Entonces las variables duales óptimas del problema dual son

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}$$

Se calcula resolviendo el sistema lineal

$$(B^T)^{-1} \lambda = c_B.$$

Demostración:

a) Notemos que $\lambda^T b = (c_B^T B^{-1}) b = c_B^T (B^{-1} b) = c_B^T x_B = c_B^T x$ donde x es el extremo asociado a B, $x = \binom{x_B}{0}$.

b) Hay que demostrar que λ es factible para el dual (D) (es claro que x es factible para (P))

Sabemos que el dual de (P) es

$$(D)\left|\begin{array}{l} \text{Mín } w = b^T \lambda \\ \text{s.a.r.} \\ A^T \lambda \geq c \\ \lambda \geq 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}^m) \end{array}\right.$$

$$\lambda^T A - c^T = (c_B^T B^{-1}(B \mid N) - (c_B^T \mid c_N^T)$$
$$= (c_B^T I_m \mid c_B^T B^{-1} N) - (c_B^T \mid c_N^T) = (0 \mid c_B^T B^{-1} N - c_N)$$

Como B es óptima, entonces $\forall j : a^{N(j)} \in N \quad z_j - c_j \geq 0 \qquad z_j - c_j = c_B^T B^{-1} a^{N(j)} - c_j \quad \forall j : a^{N(j)} \in N$
es decir, si y solo si $c_B^T B^{-1} N - c_N \geq 0$, es decir
$$\lambda^T A \geq c$$
es decir $\lambda = c_B^T B^{-1}$ es factible. Por el certificado de optimalidad (dualidad débil))
$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}$$
es óptimo para el problema (D)

Observación: Para calcular B^{-1} se toma en cuenta que
$$y_{\cdot j} = B^{-1} a^{N(j)}$$
si la variable $x_{N(j)}$ es una variable de holgura y está fuera de la base
$$\underset{(\geq)}{a_{N(j)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad \text{o} \qquad \underset{(\leq)}{a_{N(j)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

es decir $\quad y_{\cdot j} = \pm (B^{-1})^j$

Definición: Supongamos que B es una base factible para el problema (P), entonces
$$z = z_0 - \sum_{j: a^{N(j)} \in N} (z_j - c_j) x_j$$
es decir
$$z = z_0 + \sum_{j: a^{N(j)} \notin B} (c_j - z_j) x_j$$
luego
$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = \begin{cases} c_k - z_k & \text{si } x_k \text{ está fuera de base} \\ 0 & \text{si } x_k \text{ está en la base} \end{cases}$$
Los términos $c_k - z_k$ para x_k fuera de base se dicen COSTOS REDUCIDOS o COSTOS MARGINALES, es decir modela la variación de z cuando x_k cambia en una unidad

Luego, si $c_k - z_k > 0$, z crecerá y si $c_k - z_k < 0$, z decrecerá.

Ejemplo.
$$z = 105 - 3x_1 + 6x_5 - 4x_4 + 0x_2 + 0x_3 \qquad A \in \mathbb{R}^{2\times 5}$$

$\frac{\partial z}{\partial x_5} = 6 \longrightarrow$ z crece cuando x_5 crece en una unidad $\qquad \frac{\partial z}{\partial x_4} = -4 \longrightarrow$ z decrece cuando x_4 decrece en una unidad.

Interpretación de las variables duales.
Supongamos que B es una base óptima del problema (P)
$$(P) \begin{cases} \max\ z = c^T x \\ \text{s.a.r.} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ m \leq n \\ \text{rango}(A) = m. \\ \quad \text{del sistema lineal} \end{array}$$

Supongamos que la base B no cambia si el lado derecho cambia de b a $b + \Delta b$. La solución de las x_B pasó a $x_B + \Delta x$, es decir
$$\begin{cases} B(x_B + \Delta x) = b + \Delta b \\ x_N = 0 \end{cases}$$

Luego, $BX_B + B\Delta x = b + \Delta b$ y como $X_B = B^{-1}b$, es decir $BX_B = b$, entonces

$$B\Delta x = \Delta b$$

es decir, el cambio en la solución es $\Delta x = B^{-1}\Delta b$. (*)

El cambio en z será

$$\cancel{z_0} + \Delta z = C_B^T x_B + C_B^T \Delta x + \underbrace{\cancel{C_N^T x_N}}_{=0}$$
$$= \cancel{z_0} + C_B^T \Delta x$$

Es decir, el cambio en z es

$$\Delta z = C_B^T B^{-1} \Delta b$$

por (*), luego por una proposición anterior (de esta clase)

$$\Delta z = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\Delta b_i)_i$$

Observación. Si la base B no cambia, ~~(entonces)~~ y si tomamos $\Delta b = (0 0 0 \underset{i\text{-ésima}}{1} 0 0 0 \cdot)^T$

$$\Delta z = \lambda_i$$

Es decir, λ_i mide el cambio de z cuando el lado derecho de la i-ésima ecuación cambia de b_i a $b_i + 1$

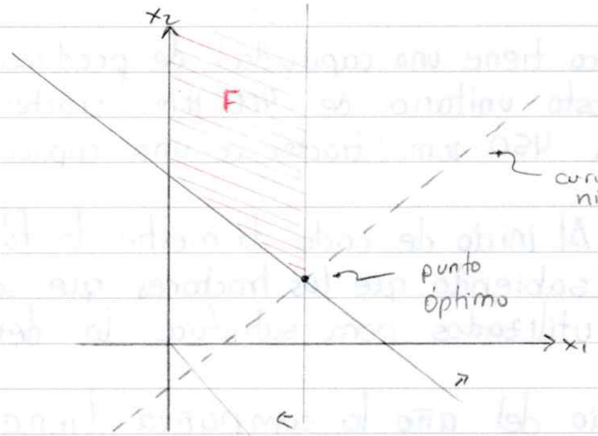
Análisis de sensibilidad

En los códigos se muestra el análisis de sensibilidad del lado derecho del sistema y de la función objetivo c^T del problema de PL en la forma estándar.

Este análisis nos da los rangos en los que pueden variar el lado derecho b y C sin que la base óptima cambie, es decir cuando puedo usar la interpretación de las variables duales.

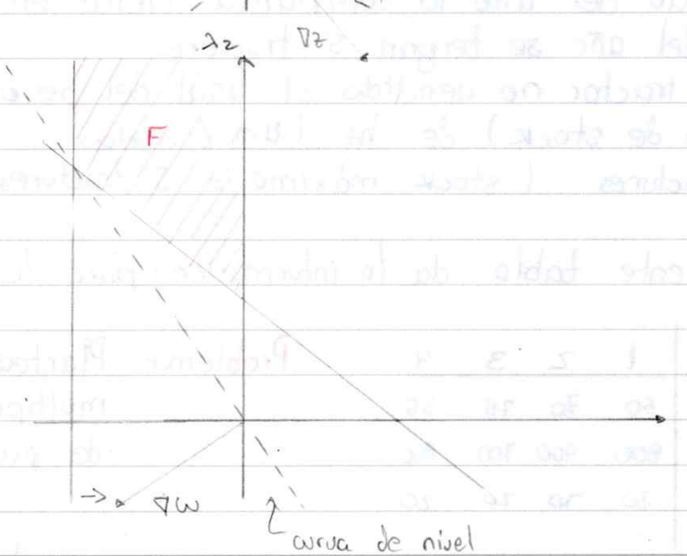
Ejemplo.

$$(P)\begin{cases} \text{Máx } z = x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.r.} \\ x_1 + x_2 \geq 3 \quad \leftarrow \lambda_1 \\ x_1 \geq 2 \quad \leftarrow \lambda_2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \text{Mín } \omega = 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \text{s.a.r.} \\ \lambda_1 + \lambda_2 \geq 1 \\ \lambda_1 \geq -2 \\ \lambda_1 \leq 0,\ \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$b_1 \in [1, +\infty[$$



Un solver entrega

	Dual Price	Variable de holgura
Restricción 1	λ_i	0
variables (valores óptimos)		
z	$= 120$	
x_1	$= a$	
$\vdots$	$\vdots$	
x_n	$= b$	

Análisis de sensibilidad (lado derecho RHS: right hand side)

	mín	v. dual	máximo
línea 1	1	3	infinito
línea 2	0	2	3

$z \in [1, +\infty[$

$\begin{cases} c_1 \to -2\ (1) & \infty \\ c_2 \to -4\ (-2) & \infty \end{cases}$

Modelos de PL: Multiperiódicos

Hasta el momento hemos formulado modelos estáticos, en los que construimos una solución óptima al inicio de un HP.
En la práctica se trabajan modelos dinámicos (evolutivos) en los que el HP es dividido en periodos uniformes o no

- Se deben tomar desiciones al inicio de cada periodo
- Se deben establecer ecuaciones interperiódicas (variables de estado)
- El objetivo será optimizar algún criterio en todo el HP.

Martes 15 de febrero de 2022

Política → sucesión de desiciones.

Modelo de producción multiperiódico
(modelo dinámico de inventarios)

Una compañía fabrica tractores y quiere determinar una política óptima de producción para un año a venir, conociendo la siguiente información:

- La fábrica tiene una capacidad de producción trimestral de 40 tractores en horas normales a un costo unitario de 400 u.m. / tractor y si se trabaja en horas extra el costo sube a 450 u.m. / tractor a una capacidad suficientemente grande

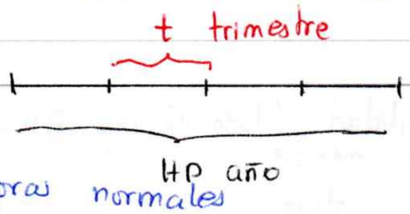
Hipótesis. Al inicio de cada trimestre la fábrica debe decidir cuántos tractores producir sabiendo que los tractores que se producen en un trimestre pueden ser utilizados para satisfacer la demanda

- Al inicio del año la compañía tiene en stock 5 tractores y quiere que al final del año se tengan 5 tractores.
- Todo tractor no vendido al final del periodo t debe pagar un costo de almacenaje (costo de stock) de h_t (u.m. / tractor x) y a lo más se pueden almacenar 5 tractores. (stock máximo = 5 tractores)

La siguiente tabla da la información para los cuatro trimestres

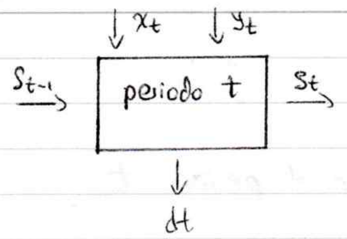
t	1	2	3	4
d_t	50	30	75	55
p_t	800	900	700	850
h_t	20	20	20	20

Problema: Plantear un problema de programación multiperiódico que determine una política de producción de utilidad anual máxima



Variables de decisión.
x_t: cantidad de tractores a producirse en horas normales
y_t: cantidad de tractores a producir en horas extra
$t = 1, \dots, 4$.

Variable de estado.
S_t : stock de tractores al final de cada trimestre $t=1,\dots,4$
$S_0 = 5$ y $S_4 = 5$



$S_t = x_t + y_t + S_{t-1} - d_t$ (relación interperiódica)

(P)
$$\begin{cases} \text{Máx } z = \sum_{t=1}^{4} p_t d_t - \sum_{t=1}^{4} (400 x_t + 450 y_t + h_t S_t) \\ \text{s.a.r.} \\ x_t \le 40 \quad t=1,\dots,4 \\ S_t = S_{t-1} + x_t + y_t - d_t \quad t=1,\dots,3 \\ S_0 = 5 \\ S_4 = 5 \\ S_t \le S_{máx} = 5 \\ x_t \ge 0, \quad y_t \ge 0 \quad S_t \ge 0 \end{cases}$$

↑ se satisface la demanda d_t

Solución óptima

t	1	2	3	4
x_t^*	40	35	40	40
y_t^*	5	0	30	20
S_t^*	0	5	0	5

$z^* = 79.300.$

Aplicación práctica (

Idea. Actualizar datos (d_t, P_t)
Otras restricciones.
- Quesos : La producción del periodo t solo puede venderse a partir del periodo t+1
  Solo un porcentaje de los productos elaborados en el periodo t pueden ser usados para satisfacer la demanda d_t

Modelo 2: Modelo de Manpower Planning
Se considera una empresa de servicios computacionales que presta sus servicios por horas y solo con sus expertos.
La demanda proyectada en horas experto para los 5 meses siguientes es

	1	2	3	4	5
Demanda horas (d_t)	6000	7000	8000	9500	11000

- Al inicio del MP, la empresa cuenta con 50 expertos, cada uno de los cuales trabaja 160 horas y cobra 2000 u.m. por mes
- Con el objeto de satisfacer la demanda futura, la empresa contrata inexpertos que reciben capacitación de expertos por 50 horas mensuales y reciben un salario de 1000 u.m.
- Al final de cada mes, el 5% de los expertos abandona la empresa

Problema. Formule un modelo de PL que permita determinar una política de contratación de personal que permita minimizar los costos laborales y satisfacer la demanda futura.

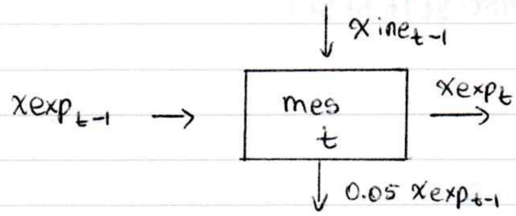
Variables de decisión

x_{ine_t} : cantidad de inexpertos a contratar en el periodo t

Variables de estado

x_{exp_t}: cantidad de expertos que trabajan en el periodo t.

$x_{ep_1} = 50$



$$x_{exp_t} = 0.95\ x_{exp_{t-1}} + x_{ine_{t-1}}$$
$$x_{exp_1} = 50 \qquad t = 2, \dots, 5$$

$$\text{Min } z = 2000 \sum_{t=1}^{5} x_{exp_t} + 1000 \sum_{t=1}^{5} x_{ine_t}$$

s.a.r.

$x_{exp_1} = 50$

$x_{exp_t} = 0.95\ x_{exp_{t-1}} + x_{ine_{t-1}}$

$160\ x_{exp_t} - 50\ x_{ine_t} \geq d_t \qquad t = 1, \dots, 5$

$x_{exp_t} \geq 0, \quad x_{ine_t} \geq 0 \qquad t = 1, \dots, 5$

solución óptima

t	1	2	3	4	5
x_{exp_t}	50	47.5	54.125	63.42	69.25
x_{ine_t}	0	9	12	9	0

$z^* = 598\ 583.10$

Observación: Obligatoriamente $x_{exp_t} \in \mathbb{R}$

Modelo 3: Problema de inversiones

Una corporación quiere establecer un plan de inversiones para los próximos tres años

tiempo 0 — 1 — 2 — 3

- Al tiempo 0, la corporación tiene un capital de 100.000 um.
- Se tienen 5 inversiones disponibles A, B, C, D y E; así, como invertir en un banco con una tasa del 8 %

La siguiente tabla nos da el flujo de efectivo (cash flow) asociado a cada inversión

inversión \ tiempo	0	1	2	3
A	-1	0.5	1	0
B	0	-1	0.5	1
C	-1	1.2	0	0
D	-1	0	0	1.9
E	0	0	-1	1.5

Esta tabla se interpreta de la siguiente manera.
Fila 1: La inversión A puede realizarse en el tiempo 0 (-1, invierte una unidad monetaria), 0.5 indica que se devuelve el 50% de la inversión y el +1 significa que se devuelve el 100% de la inversión en A y 0 no pasa nada.

Observación: Cada observación puede hacerse solo 1 vez en el trieño. A diferencia de los depósitos anuales en el banco si se pueden realizar al inicio de cada año.

Para asegurar la diversificación. Toda inversión no puede superar 75.000 u.m.
- Los réditos obtenidos en las inversiones deben ser reinvertidos (sistema cerrado)
No hay ingreso de nuevos capitales ni salidas.

Problema. Formular un problema de PL multiperiódico que permita determinar una política de inversiones con el efectivo al final del periodo máximo

Variables de decisión
- La decisión consiste en determinar qué cantidad invertir en cada opción A, B, ... E y cuánto en el banco al inicio de cada año

Sean:
A: Cantidad invertida en la opción A
⋮
E: Cantidad invertida en la opción E
B_t: Cantidad que se pone en el tiempo t en el banco con $t=0,1,2$.

$$\text{Máx } z = B + 1.9D + 1.5E + 1.08B_2$$

s.a.

$$A + C + D + B_0 = 100.000 \quad \leftarrow t_0$$
$$B + B_1 = 0.5A + 1.2C + 1.08B_0 \quad \leftarrow t_1$$
$$E + B_2 = A + 0.5B + 1.08B_1 \quad \leftarrow t_2$$
$$A \geq 0 \ldots E \geq 0, \quad B_t \geq 0 \quad t = 0, \ldots, 2$$
$$A \leq 75.000 \ldots E \leq 75\,000 \quad B_t \leq 75\,000 \quad t = 0,1,2.$$

Solución óptima

$A^* = 60.000$ $\quad B^* = 30.000$ $\quad C^* = 0$ $\quad D^* = 40.000$ $\quad E^* = 75.000$ $\quad B_t = 0 \; \forall t$

$$z^* = 218.500$$

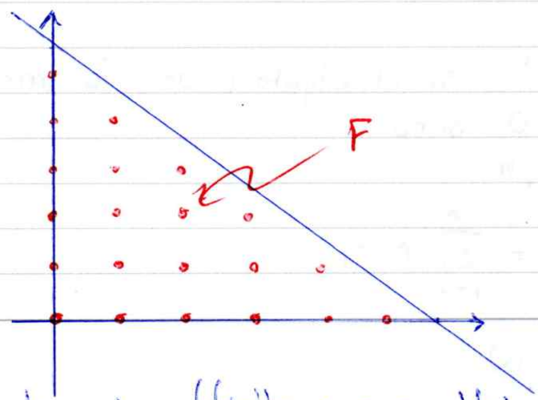
Teoría de portafolio o política de inversiones

Introducción a la PL Entera.

Definición Un problema de PL se dice:
i) De programación lineal entera (puro) si todas las variables de decisión deben tomar valores enteros
ii) De programación bivalente o (0-1) si todas las variables de decisión deben tomar valores 0 o 1 (si o no)
iii) De programación lineal mixta, cuando un conjunto de variables debe tomar valores enteros o bivalentes y el otro conjunto (complemento) pueden tomar valores reales.

Ejemplo

$$\text{Máx } z = 2x_1 + 3x_2$$
s.a.r.
$$x_1 + x_2 \leq 5.25$$
$$+ \ (R)$$



i) P.L.E.

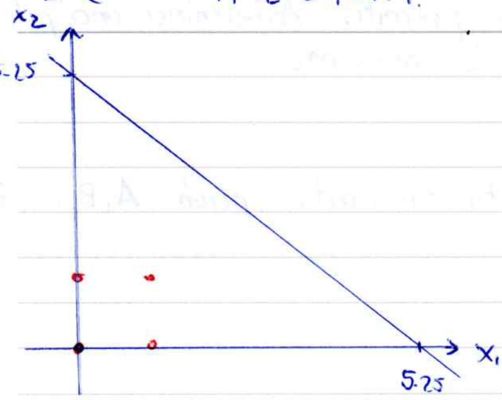
$(P) = x_1 \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$
$\quad\quad x_2 \in \mathbb{Z}^+$

F es discreto, (finito o numerable)

F no es convexo
- (P) es NP-complejo

Para los problemas NP-difíciles no se conoce un algoritmo que los resuelva.

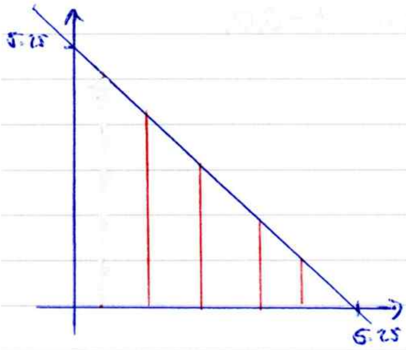
ii] (P) $x_1, x_2 \in \{0,1\}$



NP-difícil

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se hace} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

iii] (P) $x_1 \in \mathbb{Z}^+$, $x_2 \geq 0$



$x_1^* = 0$ $\quad z^* = 15.75$

$x_2^* = 5.25$

F no es convexo.

Modelo de P.L.E

1) Problema del Knapsack (mochila)

Un andinista tiene a su disposición n objetos diferentes que pueden llevarse en su mochila, cada uno de los cuales tiene un valor c_i $i=1,\dots,n$. El andinista tiene una mochila que soporta (W) kilogramos y conoce que cada objeto tiene un peso w_i $=1,2,\dots n$

Problema. Como realiza un cargamento de valor máximo y que tenga peso mínimo menor a W.

Decisión Escoger un subconjunto de los n-objetos

Hipótesis

$$\sum_{i=1}^{n} w_i > W$$

Variables de decisión

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si el objeto } i \text{ va la maleta.} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$i=1,\dots,n$

$$(P)\begin{cases} \text{Max } z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{s.a.r.} \\ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W \\ x_i \in \{0,1\} \quad i=1,\dots,n \end{cases}$$

Generalización.

Se tienen n clases diferentes de objetos iguales, en cantidades suficientes, de los que se conoce el valor c_i de un objeto en la clase C_i así como su peso ω_i.
Si se tiene una mochila de peso máximo ω ¿cómo hacer un cargamento óptimo?

x_i : número de objetos de la clase C_i que se toman para formar el cargamento $x_i \in \mathbb{Z}^+$

$$(P)\begin{cases} \text{Máx } z = \sum_{i=1}^{n} x_i c_i \\ \text{s.a.r.} \\ \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i \leq W \\ x_i \in \mathbb{Z}^+ \quad i=1,2,\dots,n \end{cases}$$

PLE

Ejemplo. Una empresa explora un portafolio de 4 inversiones que se deben hacer completamente y dispone de 14.000 u.m.

	inv 1	inv 2	inv 3	inv 4
Desembolso inicial	5 000	7.000	4.000	3.000
Rendimiento anual	16 000	22.000	12.000	8.000

capital + ganancias

¿Cuál es mi portafolio de inversión máximo?

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se invierte en inv } i \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad i=1,2,3,4$$

$$\text{Máx } z = \sum_{i=1}^{4} r_i x_i = 14000x_1 + 22000x_2 + 12000x_3 + 8000x_4$$

s.a.r.

$$5000x_1 + 7000x_2 + 4000x_3 \leq 14000$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad i=1,2,3,4.$$

Criterio heurístico

$\frac{r_i}{\text{pago inicial}}$; INV 1 ≥ INV 2 ≥ INV 3 ≥ INV 4

$\bar{x}_1 = 1$ residuo $= 14000 - 5000 = 9000$

$\bar{x}_2 = 1$ residuo $= 2000$

$\bar{x}_3 = 0$

$\bar{x}_4 = 0$ $\bar{z} = 38000$

Solución óptima

$x_1^* = 0$

$x_2^* = 1$

$x_3^* = 1$

$x_4^* = 1$

error relativo $\frac{42000 - 38000}{42000} = \frac{4}{42} = \frac{2}{21} = 0.095$

9.5%

INOP 5% - 20%

Supongamos que la empresa se plantea otras restricciones

a) Si tomo la inv 1 no tomo la inv 4

b) Si tomo la inv 2, tomo la inv 4

c) No tomo más de dos inversiones

a) $x_1 = 1 \Rightarrow x_4 = 0$ así $x_1 + x_4 \leq 1$

b) si $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$

$x_2 \leq x_1 \iff x_2 - x_1 \leq 0$

c) $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 2$

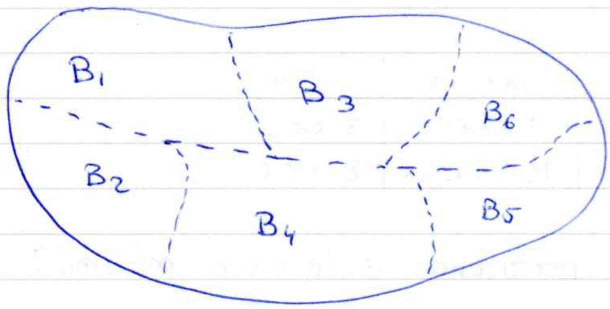
$\bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_2 = 1, \quad \bar{x}_3 = 0$

Lunes, 21 de febrero de 2022

d) Haga una sola de las inversiones INV1 e INV4 $\quad x_1 + x_4 = 1$

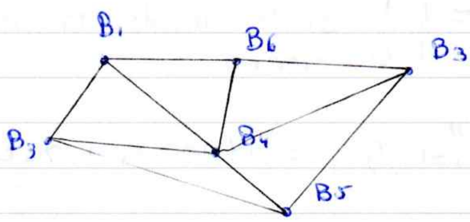
Ejemplo (localización)

Consideremos una zona de una ciudad que tiene 6 barrios y que desea instar el menor número de estaciones de bomberos en los barrios de manera que si ocurre un accidente, la atención se la haga desde la estación con un tiempo igual o menor a 15 minutos.



	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
B_1	10	20	30	30	20
B_2	0	25	35	20	10
B_3	*	0	15	30	20
B_4	*	*	0	15	25
B_5	x	x	x	0	14

(minutos)



Grafo no dirigido completo

Decisión ¿En qué barrios construir las estaciones de bomberos?

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se construye la estación de bomberos en el barrio } B_i \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

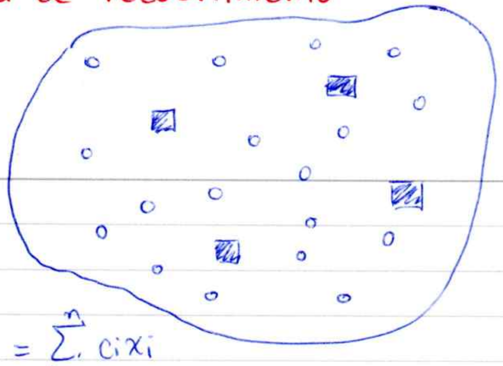
$$(P) \begin{cases} \min \ z = x_1 + \cdots + x_6 = \sum_{k=1}^{6} x_i \\ \text{s.a.r.} \\ x_1 + x_2 \geq 1 \quad (\text{seguridad } B_1) \\ x_1 + x_2 + x_6 \geq 1 \quad (\text{seguridad } B_2) \\ x_3 + x_4 \geq 1 \quad (\text{seguridad } B_3) \\ \vdots \\ x_2 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_i \in \{0, 1\} \ (\text{binarias}) \end{cases}$$

Solución óptima

$x_2^* = 1 \quad x_4^* = 1$

$x_1^* = x_3^* = x_5^* = x_6^* = 0$

Problema de recubrimiento



$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se construye la repetidora} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$A_{m\times n} = (a_{ij})$$

$$\min z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la ciudad } i \text{ es cubieta por la repetidora } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

c_i = costo de construcción de la repetidora i $\quad i = 1, \ldots, n$

$$(P) \begin{cases} \text{Min } z = \sum_{i=1}^{n} x_i c_i \\ \text{s.a.r.} \\ A x \geq \mathbb{1} \qquad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{m\times 1} \\ x \in \{0,1\}^n \end{cases}$$

Modelo 4: Problema de producción con costos fijos.

Una empresa de confección de artículos deportivos puede producir: camisetas, pantalonetas y buzos. La elaboración de cada tipo de producto requiere del alquiler de maquinaria específica mensual a un costo fijo de 200 u.m. /mes, 150 u.m/mes y 100 u.m/mes respectivamente.

La información sobre la producción está en la siguiente tabla.

	Mano de obra	Tela	P.U.P.	Costos de producción	Costo fijo alquiler
Camisetas	3	4	12	6	200
Pantalones	2	3	8	4	150
Buzos	6	4	15	8	100
Disponibilidad	1500 h/mes	1600 m^2/mes			

Problema: Formular un Problema de PL (plan óptimo de producción de utilidad mensual máxima.

Variables de decisión: x_i cantidad del producto i a producir mensualmente $\quad i = 1, 2, 3$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se alquila la máquina para el producto } i \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3.$$

Observación $\quad y_1 = 1 \Rightarrow x_1 > 0$

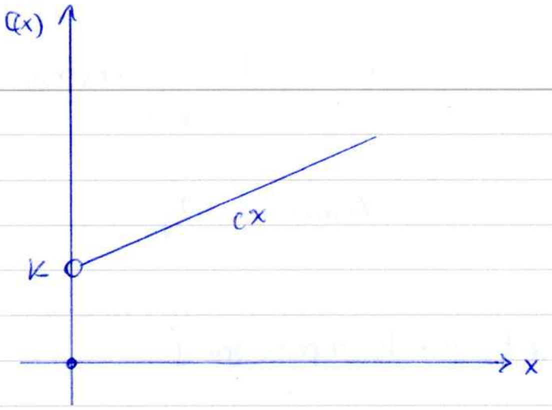
Costo fijo: costo que no depende de la cantidad de productos elaborados.

costos variables: los que implican elaborar una unidad de producto

$$C(x) = \underset{\text{fijo}}{K} + \underset{\text{variable}}{cx}$$

donde $K > 0$ si $x > 0$

$K = 0$ si $x = 0$



$$(P)\begin{cases} \text{Máx } z = (12-6)x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3 \\ \text{s.a.r} \\ 3x_1 + 2x_2 + \cancel{8}x_3 \leq 1500 \\ 4x_1 + 3x_3 + 4x_3 \leq 1600 \\ x_1 \leq H y_1 \qquad H = \min\{500, 400\} \qquad (\text{restricción de capacidad}) \\ x_2 \leq 1600/3\, y_2 \\ x_3 \leq 250\, y_3 \\ y_i \in \{0,1\}, \quad x_i \geq 0 \qquad i = 1,2,3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 20 &\leq x_1 \leq 350 & & & 20y_1 &\leq x_1 \leq 350y_1 \\ 50 &\leq x_2 \leq 200 & &\Longleftrightarrow & 50y_2 &\leq x_2 \leq 200y_2 \\ x_3 &\geq 0 & & & 0 \leq x_3 &\leq 250y_3 \end{aligned}$$

Modelo 5

Se supone que una empresa elabora un artículo que se distribuye a n ciudades de un país que requieren b_j unidades al mes (en promedio)

Por otro lado, se tienen m localizaciones posibles de depósitos desde los que se distribuye el artículo; cada uno con un costo de producción $K_i, i = 1, \ldots, m$ y una capacidad Q_i de almacenamiento de este depósito.

Finalmente, como el costo unitario de transporte c_{ij} desde el depósito D_i al ciente j

Problema: ¿Cómo construir los depósitos para satisfacer la demanda?

Hipótesis. Para que el problema tenga solución

$$\sum_{i=1}^{m} Q_i >> \sum_{j=1}^{m} b_i$$

Variables de decisión

$$\text{Min } z = \underbrace{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}}_{\text{costo de transporte}}$$

$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se construye el depósito } D_i \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

$i = 1, \dots, m$

x_{ij} = canitad de artículos a enviar del depósito D_i al cliente c_j $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$

$$X = \begin{array}{c|c} & c_j \\ \hline i & \begin{pmatrix} \cdots & x_{ij} & \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(P)\begin{cases} \text{Min } z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} K_i y_i \\ \text{s.a.r} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le Q_i y_i & i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j & j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \ge 0 \\ y_i \in \{0, 1\}. \end{cases}$$