Análisis Numérico No Lineal

David Villacís david.villacis@epn.edu.ec
Investigador doctoral - MODEMAT
Procesamiento matemático de imágenes.
Técnicas Machine Learning

Información General

Horario: Lunes 14-16, Martes 16-18 } teoría; Viernes 14-16 práctica

Atención a estudiantes: Lunes 9-10.

Programación

Python: Survival Kit

Evaluación

Por bimestre:
- Laboratorio ~~35%~~ 30%
- Prueba Parcial ~~35%~~ 30%
- Prueba final ~~35%~~ 30%
- Deberes 10%

Bibliografía.

- Numerical Mathematics - Quarteroni Saco Saleri SPRINGER.
- Numerical Methods for OCTAVE (Matlab) - Quarteroni SPRINGER.

Contenidos

1) Resolución de sistemas de ecuaciones no lineales
2) Aproximación de funciones (Interpolación)
3) Diferenciación numérica.
~~4)~~ Integración numérica
4) Resolución de sistemas de ecuaciones en derivadas ordinarias

Lunes, 15 de noviembre de 2021

Aproximar un cero (raíz) de una ecuación de una variable

$$f: I = (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Problema: Encontrar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = 0$

→ Los métodos de solución son iterativos.

↳ Generar una sucesión $\{x_k\}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$

Convergencia:

Definición 1:
Una sucesión $\{x_k\}$, $x_k \in \mathbb{R}$ generada por un método numérico se dice que converge hacia α con orden $p \geq 1$ si

$$\frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} \leq C \qquad \forall k \geq k_0 \tag{1}$$

donde k_0 es un entero suficientemente grande.

* $p=1$ necesitamos que $C<1$ y decimos que converge linealmente

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha|$$

* $p=2$ decimos que la sucesión converge cuadráticamente

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C|x_k - \alpha|^2$$

* Caso particular: "«convergencia super lineal»

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C_k |x_k - \alpha|$$

donde $C_k \geq 0$ tal que $\lim_{k \to +\infty} C_k = 0$

→ Notemos que en la práctica no disponemos de α por lo tanto

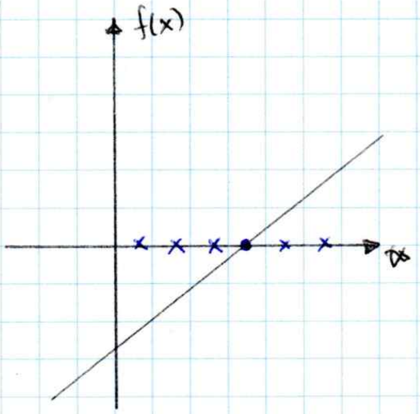
- decimos que una sucesión converge con orden p si:

$$|x_{k+1} - x_k| \leq |x_k - x_{k-1}|^p$$

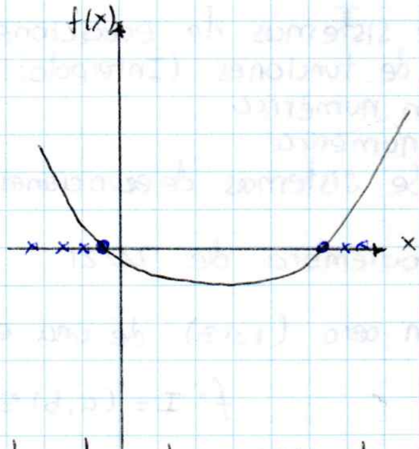
y converge super linealmente si

$$\lim_{k \to +\infty} C_k = 0 \quad y \quad |x_{k+1} - x_k| \leq C_k |x_k - x_{k-1}|$$

Observación
A diferencia de los métodos para resolver ecuaciones lineales, estos métodos y su solución también dependen del punto de inicio



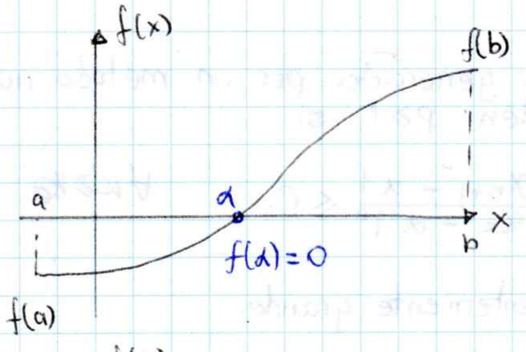
Globalmente convergente

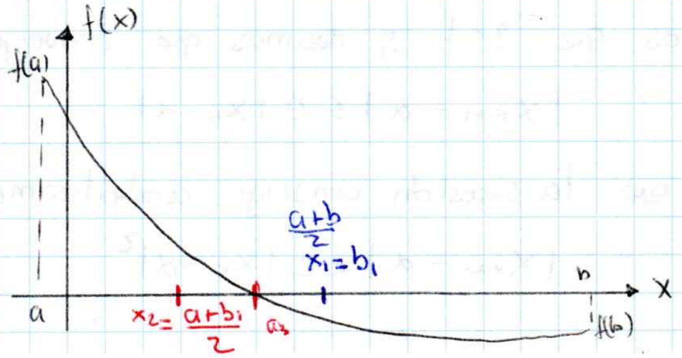


Localmente convergente

① Método de la Bisección

Lema 1 - Ceros en funciones continuas-
Sea una función $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, continua tal que $f(a)f(b) < 0$, entonces existe un $\alpha (a,b)$ tal que $f(\alpha) = 0$





Algoritmo

1.. Fijar el intervalo $I_0 = [a_0, b_0]$

2.. $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$, $k = 0$

3. WHILE (Criterio de parada no se cumple)

IF ($f(x_k) f(a_k) < 0$)

$a_{k+1} = a_k$
$b_{k+1} = x_k$

ElIF ($f(x_k) f(b_k) < 0$)

$a_{k+1} = x_k$
$b_{k+1} = a_k$

ELIF $f(x_k) = 0$

retrun x_k

$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2$

$x_k := x_{k+1}$

4 RETURN x_k

CRITERIO DE PARADA $|I| < \varepsilon$ $|f(x)| < \varepsilon$

$|I_0| = b - a$

$|I_1| = (b-a)/2$

$\vdots$

$|I_k| = \frac{b-a}{2^k}$, $k \geq 0$

Si definimos el error absoluto de la siguiente manera

$$e_k = x_k - x$$

$$|e_k| = |x_k - \alpha| \leq |I_k| = \frac{b-a}{2^k}$$

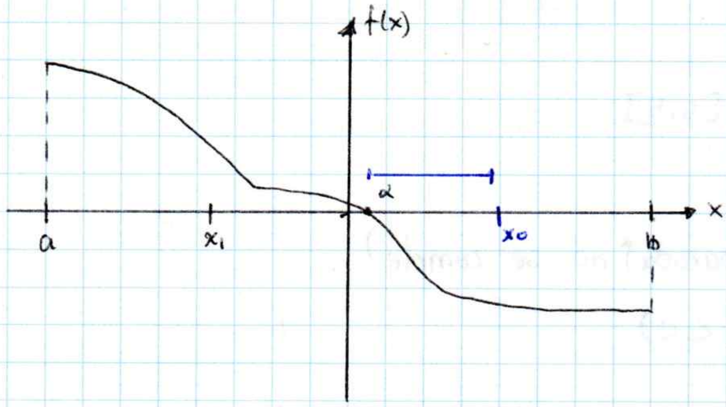
$$\lim_{k \to +\infty} |e_k| = 0$$

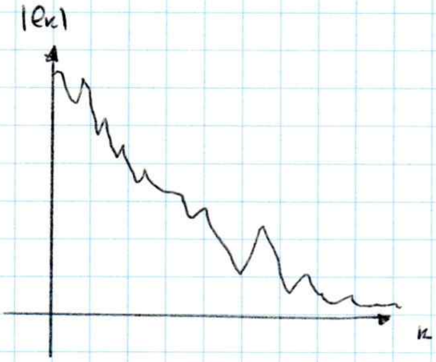
→ ¿Qué pasa con dos iteraciones cosecutivas

$$|x_{k+1} - \alpha| \sim |x_k - \alpha|$$

↳ No podemos garantizar el descenso monótono del error

$$|e_{k+1}| \nleq M_k |e_k|$$

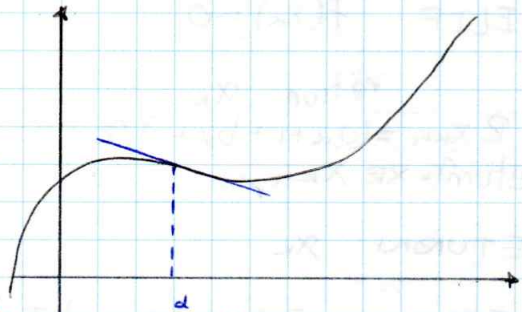




Intuición

Utilizar información de la derivada?

$$f(\alpha) = 0 = f(x) + (\alpha - x) f'(\xi) \qquad \xi \in (\alpha,$$



Esta aproximación por series de Taylor inspira a una familia de métodos

$$0 = f(x_k) + (x_{k+1} - x_k)\, q_k \qquad (2)$$

donde q_k es la aproximación de $f'(x_k)$

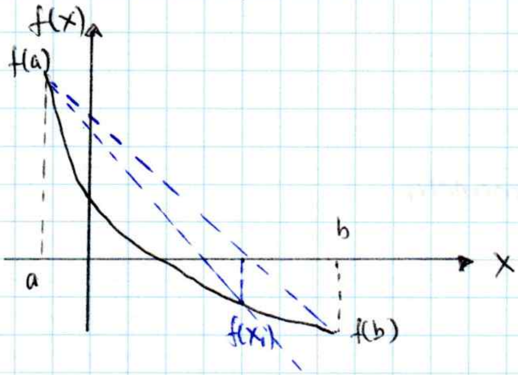
Reescribiendo

$$\rightarrow x_{k+1} q_k - x_k q_k + f(x_k) = 0$$

$$x_{k+1} q_k = x_k q_k - f(x_k)$$

Método de la cuerda

$$q_k = q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \forall k \geq 0$$

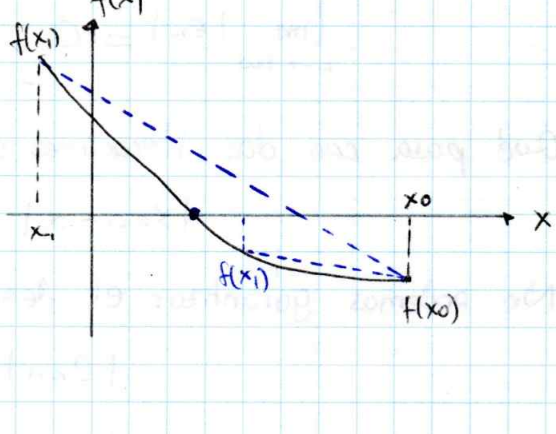


$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k} \qquad \forall k \geq 0 \qquad (3)$$

Secante

$$q_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \qquad \forall k \geq 0$$

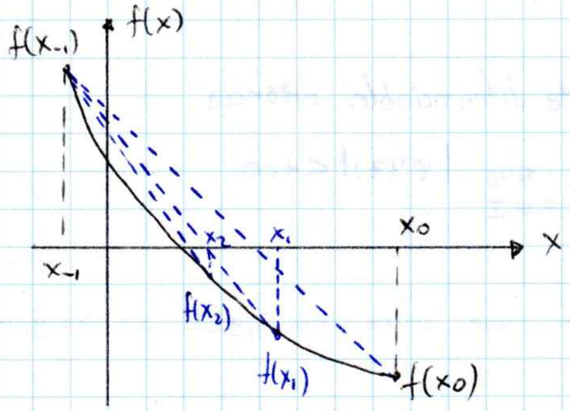
- Necesitamos dos valores iniciales x_{-1}, x_0



Regula Falsi

$$q_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k'})}{x_k - x_{k'}} \qquad k \geq 0$$

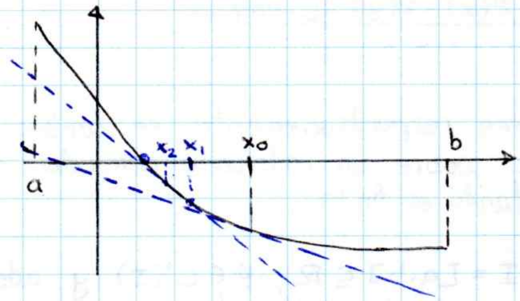
donde k' es el indice donde $f(x_k) f(x_{k'}) < 0$



- Newton

$q_k = f'(x_k)$

(4) $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



Martes, 16 de noviembre de 2021

Punto fijo

Introducción

$f(x) = 0$: x un cero de f $\Leftrightarrow$ $x - \varphi(x) = 0$; x es un punto fijo de φ.

En general, se pueden resolver los siguientes problemas de punto fijo usando el siguiente esquema iterativo.

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \qquad k \geq 0$$

Para un f dado puede que existan varios φ

Ejemplo:

$f(x) = 2x - \tan(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\tan(x)}{2} = \varphi_1(x)$

o

$\tan(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad x = \arctan(2x) = \varphi_2(x)$

$x_0 = 1.2$

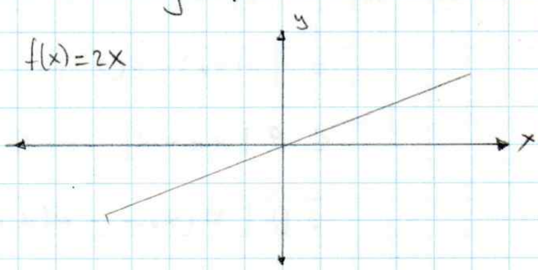
	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$
0	1.2	1.2
1	1.286	1.17
2	1.707	1.167
3	-3.64	1.166

Definición - Contractividad.
Sea $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ y $\varphi : I \to \mathbb{R}$. Decimos que φ es contractiva si

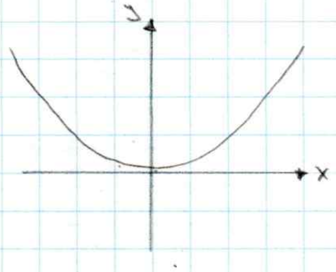
$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \theta |x - y| \quad \forall x,y \in I$$

con $0 \leq \theta < 1$.

$\Rightarrow$ Ejemplo



$\Rightarrow$ Globalmente Lipchits



$\varphi(x) < 1$

cambia dep del x

Lunes, 22 de noviembre de 2021

Lema: Sea $\varphi: I \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable, entonces

$$\sup_{x,y\in I} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|} = \sup_{z\in I} |\varphi'(z)| < +\infty$$

Demostración:

Aplicando el teorema del valor medio, sabemos que para todo $x,y \in I$ con $x<y$, existe un $\psi \in]x,y[$ tal que

$$\varphi(x)-\varphi(y) = \varphi'(\psi)(x-y)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y} \right| = |\varphi'(\psi)|$$

Tomando el supremo respectivamente en ambos lados se obtiene el resultado. Notar que φ' continua definida sobre un intervalo cerrado entonces alcanza su máximo/mínimo dentro del intervalo por lo tanto es finito.

Teorema. Sea $I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, $\varphi\in C^1(I)$ y además $\varphi: I\to I$ una aplicación contractiva con constante $\theta<1$, entonces

1. Existe un único punto fijo de φ,
2. Para todo valor $x_0\in I$ la iteración de punto fijo $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ converge a α con la siguiente taza.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = \varphi'(x)$$

Demostración

① Asumiendo que existen 2 puntos fijos $\alpha_1, \alpha_2 \in [a,b]$ tal que $\varphi(\alpha_1)=\alpha_1$ y $\varphi(\alpha_2)=\alpha_2$,

$$\begin{aligned}|\alpha_1-\alpha_2| = |\varphi(\alpha_2)-\varphi(\alpha_1)| &= |\theta(\alpha_2-\alpha_1)| \\ &\leq |\theta|\,|\alpha_2-\alpha_1| \\ &< |\alpha_2-\alpha_1|\end{aligned}$$

con $\psi\in]\alpha_2,\alpha_1[$, por lo tanto $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$.

② Para $k\geq 0$

$$\begin{aligned}|x_{k+1}-\alpha| &= |\varphi(x_k)-\alpha| \\ &= |\varphi(x_k)-\varphi(\alpha)| \\ &\leq \theta|x_k-\alpha| = \theta|\varphi(x_{k-1})-\varphi(\alpha)| \leq \theta^2|x_{k-1}-\alpha| \\ &= \theta^2|\varphi(x_{k-2})-\varphi(\alpha)| \leq \theta^3|x_{k-2}-\alpha| \leq \cdots \leq \theta^{k+1}|x_0-\alpha|\end{aligned}$$

Si $k\to+\infty$, entonces la sucesión converge a α.

Para la tasa de convergencia

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = \lim_{k\to} \frac{\varphi(x_k)-\varphi(\alpha)}{x_k-\alpha}$$

Por el lema (2), sabemos que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\varphi(x_k)-\alpha}{x_k-\alpha} = \varphi'(\alpha)$$

Nota: A la cantidad $|\varphi'(\alpha)|$ se la conoce como factor de convergencia asintótica.
La tasa de convergencia asintótica

$$R = -\log\left(\frac{1}{|\varphi'(\alpha)|}\right)$$

Observación Asumamos que $\varphi \in C^p(I)$ y además asumamos que $\varphi^{(k)}=0$ para todo $k=1,\dots,p-1$

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)(x_k-\alpha) + \frac{1}{2}\varphi''(\alpha)(x_k-\alpha)^2 + \dots + \frac{1}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(\alpha)(x_k-\alpha)^{p-1} + \frac{1}{p!}\varphi^p(\alpha)(x_k-\alpha)^p + O(\|x_k-\alpha\|^p)$$

entonces

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = \varphi(\alpha) + \frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\alpha)(x_k-\alpha)^p + O(\|x_k-\alpha\|^{p+1})$$

$$\frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^p} = \frac{1}{p!}\varphi^p(\alpha) + O(\|x_k-\alpha\|)$$

Tomando el límite $k\to+\infty$ $\varphi^p(\alpha)\neq 0$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = \frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\alpha)$$

Análisis del método de la cuerda.

$$x_{k+1} = x_k - q^{-1}f(x_k) = \underbrace{x_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(x_k)}_{\varphi} = \varphi(x_k)$$

Para la cuerda

$$\varphi(x) = x - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(x)$$

Derivando φ

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}f'(x)$$

Si $f'(\alpha)=0$, entonces $\varphi'(x)\not<1$ y en este caso el método no converge

$$|\varphi'(\alpha)|<1 \iff \left|1-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}f'(\alpha)\right|<1$$

$$\iff -1 < 1 - f'(\alpha)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} < 1$$

$$\Rightarrow -2 < -f'(\alpha)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} < 0$$

$$\Rightarrow 2 > f'(\alpha)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} > 0$$

$$2\frac{(f(b)-f(a))}{b-a} > b-a > 0$$

Análisis del método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\varphi_N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi'_N(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$= 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$= 1 - 1 + \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$= \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Para que la iteración esté bien definida, necesitamos asumir que $f'(x) \neq 0$ en una vecindad de α

Evaluando en α

* $\varphi'_N(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2} = 0$

Derivando nuevamente

$$\varphi''_N(x) = \frac{(f'(x)f''(x) + f(x)f'''(x))(f'(x))^2 - 2(f(x)f''(x))f'(x)f''(x)}{(f'(x))^4}$$

$$= \frac{(f'(x))^3 f''(x) + f(x)(f'(x))^2 f'''(x) - 2f(x)f'(x)(f''(x))^2}{(f'(x))^4}$$

$$= \frac{f''(x)}{f'(x)} + \frac{f(x)f'''(x)}{(f'(\alpha))^2} - \frac{2f(x)f''(x)^2}{(f'(x))^3}$$

$$\varphi''_N(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{f(\alpha)f'''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2} - \frac{2f(\alpha)(f''(\alpha))^2}{(f'(\alpha))^3}$$

$$= \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \quad \text{si } f''(\alpha) \neq 0, \text{ entonces } \varphi''_N(\alpha) \neq 0.$$

$\therefore$ Por lo tanto, el método de Newton tiene una convergencia cuadrática local.

Tarea: En el caso de que α tenga una multiplicidad $\alpha > 1$, el método de Newton no presenta una convergencia cuadrática.

Martes, 23 de noviembre de 2021 (Aceleración de Aitken)

→ Asumamos que tenemos una iteración de punto fijo

$$x_k = \varphi(x_{k-1}) \qquad k = 1, \dots$$

* Si la sucesión $\{x_k\}$ converge linealmente a un punto fijo α de φ. Gracias a que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = \varphi'(\alpha),$$

entonces sabemos que para un k dado, debe existir un λ tal que

$$\varphi(x_k) - \alpha = \lambda(x_k - \alpha) \tag{1}$$

Idea: Definir un nuevo valor x_{k+1} que es mejor aproximación de α que $\varphi(x_{k+1})$

De (1) sabemos que

$$\varphi(x_k) - \alpha = \lambda x_k - \lambda\alpha \iff \varphi(x_k) - \lambda x_k = \alpha - \lambda\alpha = \alpha(1-\lambda)$$

$$\alpha = \frac{\varphi(x_k) - \lambda x_k}{1-\lambda} = \frac{\varphi(x_k) - \lambda x_k + x_k - x_k}{1-\lambda}$$

$$= \frac{(\varphi(x_k) - x_k) + x_k(1-\lambda)}{1-\lambda}$$

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

$$\Rightarrow \alpha = x_k + \frac{(\varphi(x_k) - x_k)}{1-\lambda} \quad (3) \qquad x_{k+1} = \left(x_k + \frac{\varphi(x_k) - x_k}{1-\lambda}\right)$$

φ Aitken

▲ Aitken genera una sucesión de $\{\lambda_k\}$ de la siguiente forma.

$$\lambda_k = \frac{\varphi(\varphi(x_k)) - \varphi(x_k)}{\varphi(x_k) - x_k} \qquad (2)$$

Lema: Si tenemos una sucesión $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ que converge hacia α, entonces

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = \varphi'(\alpha).$$

Demostración:
Si $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, entonces $x_{k+2} = \varphi(\varphi(x_k))$ y por lo tanto, por (2), sabemos que

$$\lambda_k = \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} = \frac{x_{k+2} - \alpha - x_{k+1} + \alpha}{x_{k+1} - \alpha - x_k + \alpha} = \frac{(x_{k+2}-\alpha) - (x_{k+1}-\alpha)}{(x_{k+1}-\alpha) - (x_k - \alpha)} = \frac{\frac{(x_{k+2}-\alpha)}{(x_{k+1}-\alpha)} - 1}{1 - \frac{(x_k-\alpha)}{(x_{k+1}-\alpha)}}$$

Ahora, tomando el límite $k \to +\infty$, se tiene que

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = \frac{\varphi'(\alpha) - 1}{1 - \frac{1}{\varphi'(\alpha)}} = \varphi'(\alpha).$$

Si utilizamos (2) para generar un método iterativo basado en (3)

$$x_{k+1} = x_k + \frac{\varphi(x_k) - }{1-\lambda_k} = x_k + \frac{\varphi(x_k) - x_k}{1 - \frac{\varphi(\varphi(x_k)) - \varphi(x_k)}{\varphi(x_k) - x_k}} = x_k + \frac{(\varphi(x_k) - x_k)^2}{\varphi(x_k) - x_k - \varphi(\varphi(x_k)) + \varphi(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{(\varphi(x_k) - x_k)^2}{2\varphi(x_k) - \varphi(\varphi(x_k)) - x_k}, \qquad k \geq 0 \qquad (4)$$

Aceleración de Aitken de φ

$$x_{k+1} = \varphi_A(x_k)$$

$$\varphi_A(x) = x + \frac{(\varphi(x) - x)^2}{2\varphi(x) - \varphi(\varphi(x)) - x}$$

$$= \frac{x(2\varphi(x) - \varphi(\varphi(x)) - x) + (\varphi(x) - x)^2}{2\varphi(x) - \varphi(\varphi(x)) - x}$$

$$= \frac{\varphi(x)^2 - 2\varphi(x)\cancel{x} + x^2 - x^2 - \varphi(\varphi(x))x + 2\varphi(x)x}{2\varphi(x) - \varphi(\varphi(x)) - x}$$

$$\varphi_A(x) = \frac{\varphi(x)^2 - \varphi(\varphi(x))x}{2\varphi(x) - \varphi(\varphi(x)) - x}$$

$$\lim_{x\to\alpha} \varphi_A(x) = \frac{\varphi(\alpha)^2 - \varphi(\varphi(\alpha))\alpha}{2\varphi(\alpha) - \varphi(\varphi(\alpha)) - \alpha} = \frac{\alpha^2-\alpha^2}{2\alpha-\alpha-\alpha} = \frac{0}{0}$$

Aplicando L'Hospital

$$= \frac{2\varphi(x)\varphi'(x) - (\varphi(\varphi(x)) + x\,\varphi'(\varphi(x))\,\varphi'(x))}{2\varphi'(x) - 1 - \varphi'(\varphi(x))\varphi'(x)}$$

y, tomando el límite cuando $x \to +\infty$

$$= \frac{2\varphi(\alpha)\varphi'(\alpha) - \alpha\,\varphi'(\varphi(\alpha))\,\varphi'(\alpha) - \varphi(\varphi(\alpha))}{2\varphi'(\alpha) - 1 - \varphi'(\varphi(\alpha))\varphi'(\alpha)}$$

$$= \frac{2\alpha\varphi'(\alpha) - \alpha\varphi'(\alpha)^2 - \alpha}{2\varphi'(\alpha) - 1 - \varphi'(\alpha)^2}$$

$$= \alpha\,\frac{(2\varphi'(\alpha) - \varphi'(\alpha)^2 - 1)}{(2\varphi'(\alpha) - \varphi'(\alpha)^2 - 1)} = \alpha$$

Es decir, $\varphi_A(\alpha) = \alpha$.

Teorema: Considerando la iteración de punto fijo (4) con $\varphi(x) = x - f(x)$ que calcula un cero de la función f. Si f es suficientemente regular, entonces.

① Si φ converge linealmente a una raiz simple $(m=1)$ de f, entonces φ_A converge cuadráticamente a la misma raiz.

② Si φ converge con orden $p \geq 2$ a una raiz simple de f, φ_A converge con orden $2p-1$

③ Si φ converge linealmente a una raiz de f que tiene multiplicidad $m \geq 2$, entonces φ_A converge linealmente, pero su factor de convergencia asintótica es mejor $\alpha = 1 - 1/m$.

Nota: Si la raiz de f es simple, la aceleración de Aitken converge con $p=1$ incluso si φ no converge.

Sistemas de ecuaciones no lineales.

Encontrar un $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(\alpha) = 0$, donde $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continuamente diferenciable.

Newton Vectorial

$$0 = F(\alpha) = F(x) + \overbrace{J_F(x)}^{\text{matriz jacobiana}}(\alpha - x) + O(\|\alpha - x\|^2)$$

$$0 = F(x) + J_F(x)\alpha - J_F(x)x + O(\|\alpha - x\|^2)$$

$$J_F(x)\alpha = J_F(x)x - F(x) - O(\|\alpha - x\|^2)$$

$$\alpha = x - J_F(x)^{-1}F(x) - O(\|\alpha - x\|^2)$$

Por lo tanto, podemos usar el siguiente esquema iterativo.

¡No es práctico! $$x_{k+1} = x_k - J_F(x_k)^{-1}F(x_k)$$ ← Método de Newton Vectorial.

Una alternativa más eficiente

$$x_{k+1} = x_k - \underbrace{J_F(x_k)^{-1} F(x_k)}_{\Delta_k}$$

$\hookrightarrow \Delta_k = -J_F(x_k)^{-1} F(x_k)$

$\hookrightarrow J_F(x_k)\,\Delta_k = -F(x_k)$ → Sistema lineal de ecuaciones

solución → Δk → $x_{k+1} = x_k + \Delta k$

Sección 5: Convergencia de Newton Vectorial

(1) $x_{k+1} = x_k - J_F(x_k)^{-1} F(x_k)$

Lema 5.1: Si $J(x)$ existe para todo x en un convexo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, y si existe una constante L tal que

$$\| J_F(x) - J_F(y) \| \leq L \| x - y \|, \qquad \forall x, y \in D$$

entonces, para todo $x, y \in D$, se satisface la siguiente estimación

$$\| F(x) - F(y) - J_F(y)(x-y) \| \leq L/2 \, \| x - y \|^2 \qquad (2).$$

Demostración:
Definamos una función auxiliar $\varphi(t) = F(y + t(x-y))$, $t \in [0,1]$, $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$.

① φ es diferenciable para todo $t \in]0,1[$.
② Usando la regla de la cadena

$$\varphi'(t) = J_F(y + t(x-y))(x-y)$$

→ $F(x) - F(y) - J_F(y)(x-y) =: \Delta$ → De hecho $\Delta = \int_0^1 (\varphi'(t) - \varphi'(0))\, dt$
→ Por lo tanto, $\Delta = \varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(0)$

Es de interés acotar $\| \varphi'(t) - \varphi'(0) \|$.

$$\begin{aligned} \| \varphi'(t) - \varphi'(0) \| &= \| J_F(y + t(x-y))(x-y) - J_F(y)(x-y) \| \\ &= \| (J_F(y+t(x-y)) - J_F(y))(x-y) \| \\ &\leq \| J_F(y+t(x-y)) - J_F(y) \| \, \| x - y \| \end{aligned}$$

Por la hipótesis, tenemos que

$$\begin{aligned} \| \varphi'(t) - \varphi'(0) \| &\leq L \| y + t(x-y) - y \| \, \| x - y \| \\ &\leq L t \| x - y \|^2 \\ &\leq L \| x - y \|^2. \end{aligned}$$

→ Finalmente,

$$\begin{aligned} \| \Delta \| &= \left\| \int_0^1 (\varphi'(t) - \varphi'(0))\, dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \| \varphi'(t) - \varphi'(0) \| \, dt \\ &\leq \int_0^1 L t \| x - y \|^2 dt = L \| x - y \|^2 \int_0^1 t\, dt \leq \frac{L}{2} \| x - y \|^2 \end{aligned}$$

Lema 5.2. Sea A una matriz cuadrada, si $\rho(A)<1$, entonces la matriz $(A-I)$ es invertible y se cumple la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}.$$

Teorema 5.3. Sea $F: D \to \mathbb{R}^n$ una función C^1, convexa definida en $D \subseteq \mathbb{R}^n$ que contiene a α $(\alpha \in D)$. Asumiendo que $J_F(\alpha)^{-1}$ existe y además existen constantes $R, C,$ y L tal que $\|J_F(\alpha)^{-1}\| \leq C$ y

$$\|J_F(x) - J_F(y)\| \leq L\|x-y\| \quad , \quad \forall x,y \in B_R(\alpha).$$

Entonces, existe un $r>0$ tal que para cualquier $x_0 \in B_r(\alpha)$, la sucesión definida de la ecuación (1) está bien definida y converge hacia α con

$$\|x_{k+1}-\alpha\| \leq \gamma L \|x_k - \alpha\|^2.$$

Demostración:

- Esta iteración está bien definida si $x_{k+1} \in B_r(\alpha)$ donde $r = \min(R, 1/2CL)$
- Empezando por $x_0 \in B_r(\alpha)$, es $J_F(x_0)$ intertible?

$$\begin{aligned}
\|J_F(\alpha)^{-1}[J_F(x_0) - J_F(\alpha)]\| &\leq \|J_F(\alpha)^{-1}\|\,\|J_F(x_0)-J_F(\alpha)\| \\
&\leq CL\,\|x_0-\alpha\| \\
&\leq CLr \\
&\leq 1/2.
\end{aligned}$$

* $\|J_F(x_0)^{-1}\| \leq ?$

- Tomando $A = -J_F(\alpha)^{-1}(J_F(x_0) - J_F(\alpha))$, entonces

$$\begin{aligned}
I - A &= I + J_F(\alpha)^{-1}J_F(x_0) - \underbrace{J_F(\alpha)^{-1}J_F(\alpha)}_{I} \\
&= J_F(\alpha)^{-1}J_F(x_0)
\end{aligned}$$

- Aplicando el lema (2)

$$\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

$$\underbrace{\|(J_F(\alpha)^{-1}J_F(x_0))^{-1}\|}_{\Delta} \leq \frac{1}{1-\|J_F(\alpha)^{-1}(J_F(x_0)-J_F(\alpha))\|}$$

Analizando (Δ):
$$\|(J_F(\alpha)^{-1}J_F(x_0))^{-1}\| = \|J_F(x_0)^{-1}J_F(\alpha)\| \geq \frac{\|J_F(x_0)^{-1}\|}{\|J_F(\alpha)^{-1}\|}$$

Consideremos

$$\|ABB^{-1}\| \leq \|AB\|\,\|B^{-1}\| \quad \Rightarrow \quad \|AB\| \geq \frac{\|A\|}{\|B^{-1}\|}$$

Resumiendo

$$\frac{\|J_F(x_0)^{-1}\|}{\|J_F(\alpha)^{-1}\|} \leq \frac{1}{1-\|J_F(\alpha)^{-1}(J_F(x_0)-J_F(\alpha))\|}$$

$$\|J_F(x_0)^{-1}\| \leq \frac{\|J_F(\alpha)^{-1}\|}{1-\|J_F(\alpha)^{-1}(J_F(x_0)-J_F(\alpha))\|}$$

Usando el lema (1)

$$\|J_F(x_0)^{-1}\| \leq \frac{\|J_F(\alpha)^{-1}\|}{1-L/2\,\|x_0-\alpha\|^2}$$

$$\leq \frac{\|J_F(\alpha)^{-1}\|}{1-L/2\left(1/2CL\right)^2}$$

$$\leq \frac{C}{1-\frac{L}{8C^2L^2}} = \frac{C}{\frac{8CL-1}{8C^2L}} = \frac{8C^3L}{8CL-1} = \gamma$$

Por tanto, la iteración $x_1 = x_0 - J_F(x_0)^{-1}F(x_0)$ está bien definida

→ Agregando un cero inteligente

$$x_1-\alpha = x_0-\alpha - J_F(x_0)^{-1}F(x_0)$$

$$J_F(x_0)(x_1-\alpha) = J_F(x_0)(x_0-\alpha) - F(x_0) + F(\alpha)$$

$$\|x_1-\alpha\| = \|(J_F(x_0))^{-1}(F(\alpha)-F(x_0)-J_F(x_0)(\alpha-x_0))\|$$
$$\leq \|J_F(x_0)^{-1}\|\,\|F(\alpha)-F(x_0)-J_F(x_0)(\alpha-x_0)\|$$

Por el lema (1)

$$\|x_1-\alpha\| \leq \gamma\,\frac{L}{2}\,\|x_0-\alpha\|^2$$

Se cumple para $k=0$, y siguiendo las iteraciones $k=1,2,\ldots$, se obtiene la estimación
↳ asumir k se cumple y probar si $k+1$ cumple.

Sección 6: Modificaciones Newton Vectorial

→ Los dos pasos importantes del método de Newton

① Calcular la matriz Jacobiana $J_F(x)$
② Resolver el sistema lineal $J_F(x_k)\,S_k = -F(x_k)$
③ Localidad del método.

→ ¿Cómo aliviar la carga computacional?

* La idea es no actualizar $J_F(x_k)$ en cada iteración, sino mantenerla fija por $p \geq 2$ iteraciones.

* Se deteriora la velocidad de convergencia pero se gana en eficiencia computacional.

② Resolución inexacta del sistema lineal

$$J_F(x_k)\,\Delta_k = -F(x_k) \tag{1}$$

→ Métodos iterativos de solución

Solo corremos un número reducido de iteraciones de un método iterativo

Newton - Jacobi
Newton - GS

Newton-SOR
Newton - Krelov

Newton - SOR

$$J_F(x_k) = D_k - E_k - F_k$$

donde $D_k = D(x_k)$, $-E_k = -F(x_k)$ y $-F_k = -F(x_k)$ y asumiendo que D_k es invertible, El método SOR para resolver el sistema lineal (1) sigue lo siguiente

INT $\Delta x_k^{(0)} = 0$

ITERA $\Delta x_k^{(r)} = H_k \Delta_k^{(r-1)} - \omega_k (D_k - \omega_k E_k)^{-1} F(x_k)$

donde H_k es la matriz de iteración del método SOR

$$H_k = [D_k - \omega_k E_k]^{-1} [(1-\omega_k) D_k + \omega_k F_k]$$

y ω_k es el parámetro de relajación del método.

Asumiendo que solo iteramos (2) m veces y

$$\Delta_k^{(r)} = x_k^{(r)} - x_k$$

la actualización de Newton SOR se ve así

$$x_{k+1} = x_k - \omega_k (H_k^{m-1} + \cdots + I)(D_k - \omega_k E_k)^{-1} F(x_k)$$

Métodos Cuasi-Newton

→ $x_{k+1} = x_k + \Delta_k$ donde Δ_k es la solución de un sistema lineal

$$J_F(x_k)\Delta_k = -F(x_k)$$

$$\hookrightarrow B\Delta_k = -F(x_k)$$

donde B es una aproximación de $J_F(x_k)$

Plantilla.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $B_0 > 0$

For $k = 1, 2, \ldots$

Resolvemos $B_{k-1}\Delta_{k-1} = -F(x_{k-1})$; $\Delta_{k-1} = -B_{k-1}^{-1} F(x_{k-1})$

Actualizamos $x_k = x_{k-1} + t_k \Delta_{k-1}$

Calculamos B_k a partir de B_{k-1} ; B_k^{-1}

Endfor

→ Con respecto al paso 3 del algoritmo, un requerimiento razonable para actualizar B_k es el siguiente

$$F(x_k) = F(x_{k-1}) + B_k(x_k - x_{k-1}) \quad (3)$$

↳ Ecuación con la condición secante

En cierta literatura $y = F(x_k) - F(x_{k-1})$ y $s = x_k - x_{k-1}$

$$Bs = y \qquad \text{[Ecuación secante]} \qquad (4)$$

- Además de la ecuación secante, nos gustaría
  - B_k es simétrica
  - $B_k >$

→ Si tomamos $B = A + uv^T \Leftrightarrow B_{k+1} = B_k + uv^T$ (Actualizaciones de rango 1)

Viernes, 3 de diciembre de 2021

Motivación

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

① $F(x_{n+1}) \sim F(x_k)$ ② $F(x) \approx F(x_k) + J_F(x_k)(x - x_k) \approx 0$

$$F(x) \approx F(x_k) + B_k(x - x_k) \approx 0$$

→ No podemos esperar que $F(x_{k+1})$ sea 0

Mejorar B_k para que B_{k+1} genere $F(x_{k+1})$ más pequeño.

→ Si sabemos de x_{k+1} y $F(x_{k+1})$ podemos aproximar el B_{k+1} de la siguiente manera

$$F(x_k) + B_{k+1}(x_{k+1} - x_k) = F(x_{k+1}) \qquad (1)$$

y

$$F(x_k) + B_k(x_{k+1} - x_k) = 0$$

→ Como solo consideramos $x_{k+1} - x_k$ debemos cumplir también que

$$B_k y = B_{k+1} y \quad \text{siempre que} \quad y^T(x_{k+1} - x_k) = 0 \qquad (2)$$

¿Cómo actualizamos B_k?
↳ Escalamiento de $F(x_{k+1})$ proporcional al producto $y^T(x_{k+1} - x_k)$
↳ $s_k = x_{k+1} - x_k$

$$F(y) = \frac{y^T s_k}{s_k^T s_k} F(x_{k+1}) = F(x_{k+1}) \frac{s_k^T y}{s_k^T s_k}$$

Como $F(y)$ es una función lineal, se puede escribir de la siguiente forma

$$F(y) = U_k y$$

Por lo tanto

$$B_{k+1} - B_k = U_k = \frac{F(x_{k+1}) s_k^T}{s_k^T s_k}$$

Finalmente,

$$B_{k+1} = B_k + \frac{F(x_{k+1}) s_k^T}{s_k^T s_k} \qquad \text{Método de Broyden}$$

* Definir un x_0

Empezamos con una aproximación B_0

$$\begin{cases} ① & B_0 = \mathcal{J}_F(x_0) \\ ② & B_0 = I \end{cases}$$

$$B_k s_k = -F(x_k)$$
$$x_{k+1} = s_k - x_k$$

* Resolvemos la ecuación $F(x_k) + B_k(x_{k+1} - x_k) = 0$ y obtenemos x_{k+1}

* Actualizamos $B_{k+1} = B_k + \dfrac{F(x_{k+1}) s_k^T}{s_k^T s_k}$

Fórmulas de Sherman-Morrison

El método de Broyden se puede escribir de forma alternativa como

$$B_k(x_{k+1} - x_k) = -F(x_k)$$

$$B_k x_{k+1} - B_k x_k = -F(x_k)$$

$$\hookrightarrow x_{k+1} = x_k - B_k^{-1} F(x_k)$$

Para poder utilizar esta iteración, necesitamos una forma de actualizar B_{k+1}^{-1} a partir de B_k^{-1}.

Lema. Sea A, $n \times n$ invertible y sean $u, v \in \mathbb{R}^n$, entonces $(A + uv^T)^{-1}$ se puede calcular como

$$\underbrace{(A + uv^T)^{-1}}_{B_{k+1}^{-1}} = \underbrace{A^{-1}}_{B_k^{-1}} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} \qquad (5)$$

Si tomamos en (5) $A = B_k$, $u = F(x_{k+1})$, $v = \dfrac{s_k}{s_k^T s_k}$, entonces podemos actualizar B_{k+1}^{-1} como

$$B_{k+1}^{-1} = B_k^{-1} - \frac{B_k^{-1} F(x_{k+1}) s_k^T B_k^{-1}}{(s_k^T s_k)\left(1 + \dfrac{s_k^T B_k^{-1} F(x_{k+1})}{s_k^T s_k}\right)}$$

$$= B_k^{-1} - \frac{c_k s_k^T B_k^{-1}}{s_k^T s_k + s_k^T c_k} = B_k^{-1} - \frac{c_k s_k^T B_k^{-1}}{s_k^T (s_k + c_k)}$$

Viernes, 10 de diciembre.

Capítulo 2: Interpolación Numérica (Aproximación de Funciones)

Idea 1: Reemplazar una función f dada por otra función $\bar{f}$ más «simple»

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \bar{f}(x)dx$$

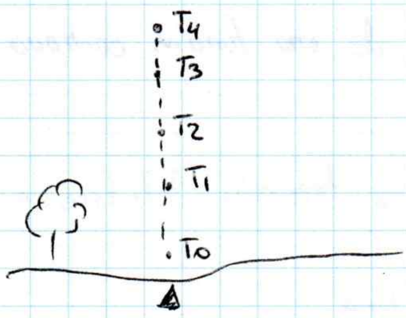
Idea 2: No tenemos acceso a f!

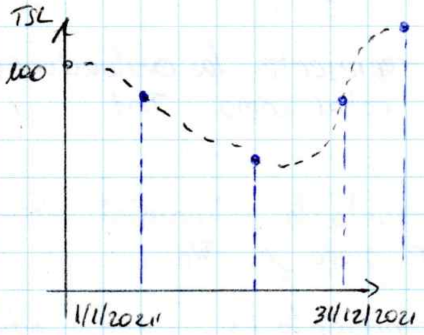
↳ Tenemos acceso a evaluaciones de f en algunos puntos

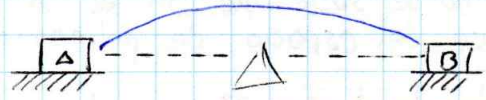
↳ A partir de los puntos conocidos de f, podemos construir $\bar{f}$.

Ejemplos.

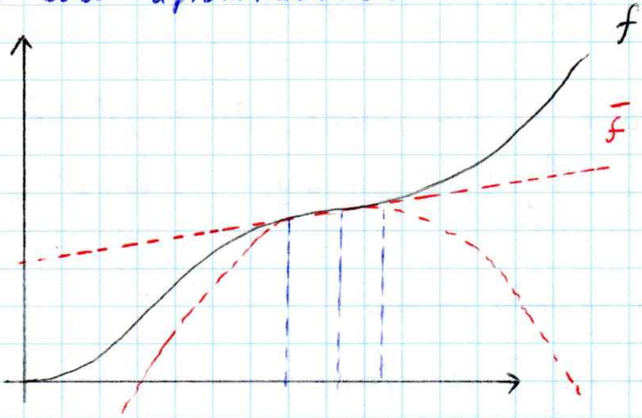
① Climatología ② Finanzas ③ Robótica.







Idea: ¿Cómo construir estas aproximaciones?



$$f(x^*) = f(x) + f'(x)(x^* - x) + \frac{1}{2} f''(x)(x^* - x)^2 + O(x^3)$$

→ Como esta función solo aproxima localmente, es necesario usar otras técnicas

Problema: Dados $n+1$ pares $\{x_i, y_i\}$ con $i = 0, 1, \dots, n$. Donde cada x_i se lo conoce como nodo. Encontrar una función $\bar{f}$ tal que satisfaga la siguiente ecuación

$$\bar{f}(x_i) = y_i \qquad \forall i = 0, \dots, n \tag{1}$$

A $\bar{f}$ se la conoce como interpolante del conjunto de datos $\{y_i \mid i = 0, \dots, n\}$ y a (1) se la conoce como la condición de interpolación.

Tipos de interpolantes.

① Interpolantes polinomiales

$$\bar{f}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

② Interpolantes trigonométricos

$$\bar{f}(x) = a_{-M} e^{-iMx} + a_{-M+1} e^{-i(M+1)x} + \dots + a_0 + \dots + a_M e^{iMx}$$

donde M es un entero igual a $n/2$ cuando n es par y $(n-1)/2$ si n es impar

③ Interpolantes racionales

$$\bar{f}(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k}{a_{k+1} + a_{k+2} x + \dots + a_{k+n+1} x^n}$$

2.1 Interpolación polinomial de Lagrange

Proposición 2.1. Para cualquier conjunto de pares $\{x_i, y_i\}$ $i = 0, \dots, n$ con valores distintos de x_i, existe un único interpolante lineal de grado menor o igual a n.

notado por Π_n y conocido como interpolante polinomial de y_i en los nodos x_i tal que

$$\Pi_n(x_i) = y_i \qquad i=0,\dots,n \qquad (2)$$

→ En el caso que $\{y_i : i=0,\dots,n\}$ representa las evaluaciones de una función continua f en los nodos x_i, Π_n se lo puede notar como $\Pi_n f$

Demostración

→ Como se sabe que Π_n es un interpolante polinomial, entonces tenemos $\{l_i\}_{i=0,\dots,n}$ una base del espacio de polinomios de grado n, $\mathbb{P}_n$

→ Por lo tanto, Π_n admite una representación usando esta base

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n}{}' \, b_i l_i(x)$$

→ Además, Π_n debe satisfacer las ecuaciones de interpolación

$$\Pi_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n}{}' \, b_j l_j(x_i) = y_i \qquad \forall i = 0,\dots,n$$

Si tomamos a $l_j \in \mathbb{P}_n$ de la siguiente manera

$$\delta_{ij} = l_j(x_i) = \begin{cases} 1 & si \quad i=j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

entonces $b_i = y_i$, $\forall i = 0,\dots,n$

→ Un tipo de polinomios que se comportan de esta manera son los polinomios de LAGRANGE.

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

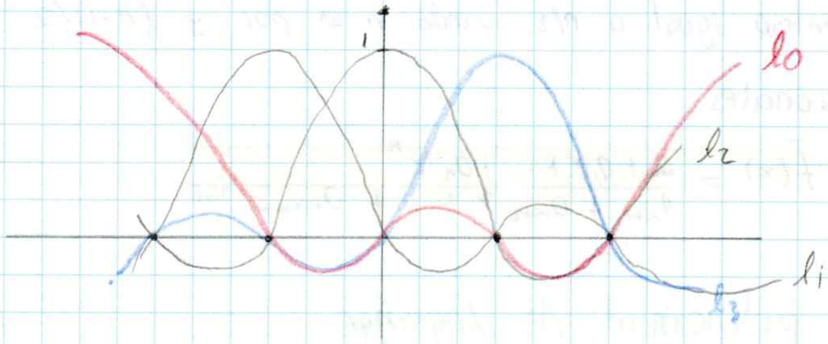
→ De forma equivalente

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \qquad i=0,\dots,n$$

Deber: Demostrar que los polinomios de Lagrange forman una base para $\mathbb{P}_n$

En cosecuencia

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n}{}' \, y_i l_i(x)$$

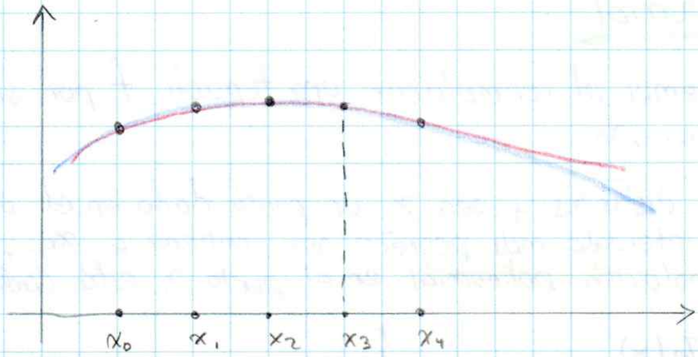


UNICIDAD

→ Asumamos que existe otro polinomio Q_m con $m \leq n$ tal que

$Q_m(x_i) = y_i \qquad i = 0, \dots, m$

→ Entonces, si restamos $\Pi_n - Q_m$



→ $R = \Pi_n - Q_m$ ← corresponde al polinomio nulo
Por lo tanto $\Pi_n - Q_m$ en todos los nodos y así Π_n es único

Lunes 13 de diciembre de 2021 (Prueba 1)

Martes 14 de diciembre de 2021

El interpolante polinomial en la forma de Lagrange se puede escibir como

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, l_i(x) \qquad (3)$$

⇒ Una forma alternativa de escibir este polinomio es

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\,\omega_{n+1}'(x_i)} y_i$$

donde ω_{n+1} es el polinomio nodal de grado $n+1$ y se define como

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Deber $\omega_{n+1}(x)$? $\omega_{n+1}'(x)$? $(x-x_0)$

Ejercicio:

x_i	y_i
1	-1
2	2
3	0

Encontrar el interpolante polinomial

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

$$l_i(x) = \prod_{j=0}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

- $l_0 = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{2} \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{x^2-5x+6}{1-3-2+6} = \frac{x^2-5x+6}{2}$

- $l_2 = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 2}}^{2} \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = \frac{x^2-3x-x+3}{-1} = -x^2+4x-3$

- $l_3 = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 3}}^{2} \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{x^2-2x-x+2}{2} = \frac{x^2-3x+2}{2}$

$\Pi_n(x) = y_0 l_0 + y_1 l_1 + \cancel{y_2 l_2}^{\,0} = -\frac{1}{2}(x^2-5x+6) - 2(x^2-4x+3) = x^2\left(-2-\frac{1}{2}\right) + x\left(-\frac{5}{2}-\frac{16}{2}\right) - 3 - 6$

$$\Pi_n(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{21}{2}x - 9$$

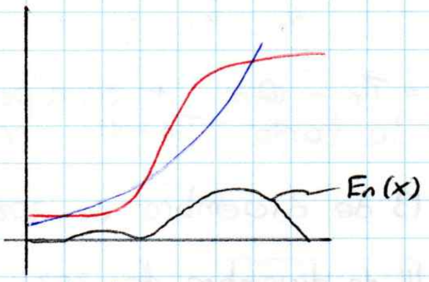
2.2 Error en la aproximación polinomial

Nos interesa estimar el error que cometemos al reemplazar una función f por su interpolante polinomial Π_n en los nodos $x_0, x_1, \dots, x_n$

Teorema. Sean $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ nodos distintos y sea x un punto dado en el dominio de $f \in C^{n+1}(I_x)$, donde I_x es el intervalo más pequeño que contiene a $x_0, \dots, x_n$ y a x. Entonces, el error de interpolación polinomial en el punto x está dado por

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n(x)$$

$$(1) \qquad E_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} w_{n+1}$$



donde $\xi \in I_x$ y w_{n+1} es el polinomio nodal de grado 1.

Demostración.

- El resultado se verifica trivialmente si x coincide con los nodos x_i
- Los casos interesantes ocurren cuando $t \in I_x$
- Introducimos la siguiente función

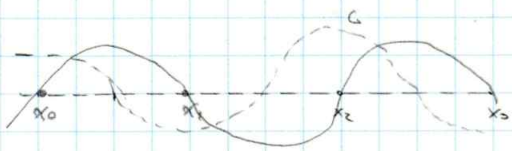
$$G(t) = E_n(t) - w_{n+1}(t)\,\frac{E_n(x)}{w_{n+1}(x)}$$

« El error en los nodos es cero pero distinto de cero en el restante »

- Como f es $n+1$ veces diferenciable y w_{n+1} es un polinomio, entonces $G \in C^{n+1}(I_x)$ y

$$G(x_i) = E_n(x_i) - \cancel{w_{n+1}(x_i)}^{\,0}\,\frac{E_n(x)}{w_{n+1}(x)} = 0$$

$$G(x) = E_n(x) - w_{n+1}(x)\,\frac{E_n(x)}{w_{n+1}(x)} = 0$$



- Por lo tanto, esta función G tiene $n+2$ ceros?
- Por lo tanto, podemos aplicar el teorema de Rolle. Sea f continua en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$ tal que $f'(c)=0$. Así, sabemos que $G'(t)$ tiene $n+1$ ceros

Recursivamente $G^{(n+1)}$ tiene un cero en $\xi \in I_x$

$$G^{n+1}(t) = E_n^{(n+1)}(t) - w_{n+1}^{(n+1)}(t)\,\frac{E_n(x)}{w_{n+1}(x)}$$

$$E_n^{(n+1)}(t) = f^{n+1}(t) - \cancel{\Pi_n^{(n+1)}(t)}^{\,0} = f^{(n+1)}(t)$$

Deber $w_{n+1}^{(n+1)}(t) = (n+1)!$

$$G^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\,\frac{E_n(x)}{w_{n+1}(x)}$$

Evaluando en ξ

$$G^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!\,\frac{E_n(x)}{\omega_n(x)} = 0$$

$$\Rightarrow E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x)$$

Viernes, 17 de diciembre de 2021

Forma de Newton

(LAGRANGE) $$l_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})}$$

La forma de Newton para un interpolante polinomial de orden $n-1$, dados n nodos x_i y valores y_i es:

$$\Pi_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

La podemos reescribir como

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i n_i(x)$$

donde $n_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)$

→ La ventaja de la forma de Newton sobre la de Lagrange es que a_i se pueden calcular fácilmente

→ Por ejemplo; $\Pi_n(x_i) = y_i$

↳ Para el primer punto (x_0)

$$\Pi_n(x_0) = y_0 = a_0$$

↳ Para el punto (x_1)

$$\Pi_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1-x_0) = y_0 + a_1(x_1-x_0) = y_1$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

↳ Si ahora tomamos (x_2)

$$\Pi_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2-x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{y_2-a_0-a_1(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{y_2-y_0-\left(\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right)(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0} - \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}$$

↳ Tomando el nodo x_3

$$y_3 = \Pi_n(x_3) = a_0 + a_1(x_3 - x_0) + a_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + a_3(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

$$a_3 = \frac{y_3 - a_0 - a_1(x_3 - x_0) - a_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$= \frac{y_3 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_3 - x_0) - \frac{\left[\left(\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}\right) - \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)\right]}{x_2 - x_1}(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$= \frac{\frac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

⋮ Pendiente

$$a_3 = \frac{\dfrac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1} - \dfrac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}}{x_3 - x_0}$$

Diferencias divididas de Newton $f[x_0] = y_0$

$$f[x_1, x_0] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = a_2 = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = a_3 = \frac{f[x_3, x_2, x_1] - f[x_2, x_1, x_0]}{x_3 - x_0}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & & & \\
 & \downarrow & \downarrow & & & \\
x_0 & y_0 & & & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & & \\
x_1 & y_1 & & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
 & & f[x_1, x_2] & & f[x_0, x_1, x_2, x_3] & \\
x_2 & y_2 & & f[x_1, x_2, x_3] & & f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \\
 & & f[x_2, x_3] & & f[x_1, x_2, x_3, x_4] & \\
x_3 & y_3 & & f[x_2, x_3, x_4] & & \\
 & & f[x_3, x_4] & & & \\
x_4 & y_4 & & & &
\end{array}$$

Estos valores se pueden precalcular dados los nodos x_i y sus valores y_i en una matriz

$$\begin{bmatrix}
y_0 & f[x_1, x_0] & f[x_2, x_1, x_0] & f[x_3, x_2, x_1, x_0] & f[x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0] \\
y_1 & f[x_2, x_1] & f[x_3, x_2, x_1] & f[x_4, x_3, x_2, x_1] & 0 \\
y_2 & f[x_3, x_2] & f[x_4, x_3, x_2] & 0 & 0 \\
y_3 & f[x_4, x_3] & 0 & 0 & 0 \\
y_4 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

→ Armamos el polinomio

$$\Pi_n(x) = y_0 + f[x_1,x_0](x_1-x_0) + f[x_2,x_1,x_0](x-x_0)(x-x_1) + f[x_3,x_2,x_1,x_0](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + f[x_4,x_3,x_2,x_1,x_0](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

Ejercicio

x	y
1	-1
2	2
3	0

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -5/2 \\ 2 & -2 & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

$$f[x_1,x_0] = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = 3 \qquad f[x_2,x_1,x_0] = \frac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0} = \frac{5}{2}$$

$$f[x_2,x_1] = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = -2$$

$$\Pi_n(x) = -1 + 3(x-1) - 5/2(x-1)(x-2)$$

$$= -1 + 3x - 3 - 5/2\, x^2 + \frac{15}{2}x - 5$$

$$= -\frac{5}{2}x^2 + \frac{21}{2}x - 9$$

Lunes, 20 de diciembre de 2021

(Cómo se obtiene a_2)

$$\Pi_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$\Pi_n(x_0) = a_0 = y_0$$

$$\Pi_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1-x_0) = y_0 + a_1(x_1-x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

$$\Pi_n(x) = y_2 = a_0 + a_1(x_2-x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

$$= y_0 + a_1(x_2-x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

$$y_2 - y_1 + y_1 - y_0 = a_1(x_2-x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

$$= \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x_2-x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

$$a_2 = \frac{y_2-y_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} + \frac{y_1-y_0}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} - \frac{(y_1-y_0)\cancel{(x_2-x_0)}}{(x_1-x_0)\cancel{(x_2-x_0)}(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{y_2-y_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} + \frac{y_1-y_0}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} - \frac{y_1-y_0}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{y_2-y_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} + (y_1-y_0)\left(\frac{x_1-x_0+x_0-x_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_1-x_0)}\right)$$

$$= \frac{y_2-y_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} - \frac{y_1-y_0}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Sección: Nodos igualmente espaciados

Si tomamos nodos igualmente espaciados

$$x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 1, \dots, n$$

con $h > 0$ y x_0 dado

→ Para esta selección de nodos, tenemos que el error de interpolación se puede escribir como

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Deber $\left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| \leq n! \frac{h^{n+1}}{4}$

Por lo tanto

$$|E_n f(x)| \leq \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)} \frac{n!\, h^{n+1}}{4} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{4(n+1)} h^{n+1}$$

$$\max |E_n f(x)| \leq \underline{\max |f^{(n+1)}(x)|} \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Pueden existir casos para los cuales

$$\lim_{n \to +\infty} \max_{x \in I} |E_n f(x)| = +\infty$$

→ Contraejemplo de Runge

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Interpolación lineal a trozos

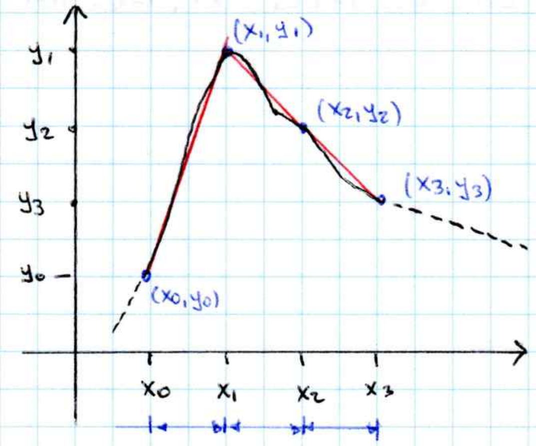
→ Alternativa para trabajar con distribuciones de nodos dados

→ Dada una distribución, no necesariamente uniforme de nodos

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

y notando I_i como el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, la idea es aproximar f por una función continua que restringida a cada intervalo I_i es una función lineal

Π_1^H (Aproximación polinomial a trozos de f)



Para un par de nodos (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})

$$\Pi_1^H f(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \quad \forall x \in I_i$$

donde H representa el valor máximo de I_i.

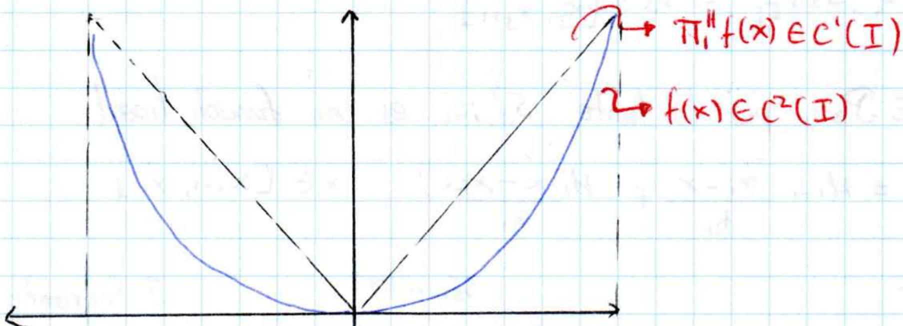
→ **Error de interpolación:** Utilizando el resultado de la interpolación polinomial $E_n(x)$ fijando $n=1$ y $h = H$.

Proposición: Si $f \in C^2(I)$ donde $I = [x_0, x_n]$, entonces

$$\max_{x \in I} |f(x) - \Pi_1^H f(x)| \leq \frac{H^2}{8} \max_{x \in I} |f''(x)|$$

Para todo x en el intervalo de interpolación

$H_1^H f(x) \to f(x)$ cuando $H \to 0$, dado que f sea suficientemente suave.

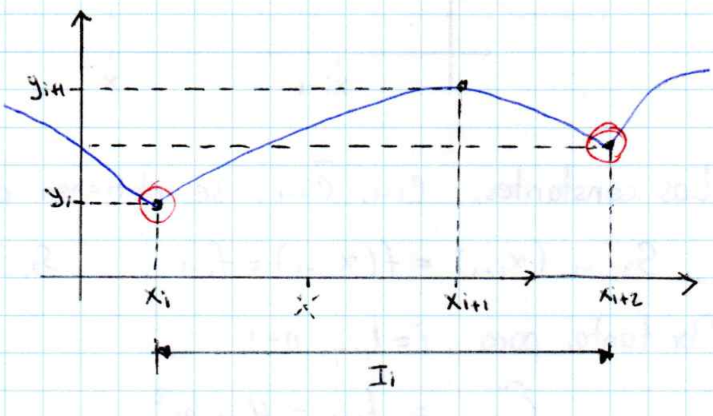


Aproximación por Splines

→ Podemos utilizar otros interpolantes a trozos
→ Polinomio de grado $n \geq 2$.

$\Pi_2^H f(x)$

→ Ciertas aplicaciones requieren que los interpolantes sean diferenciables.



Construcción

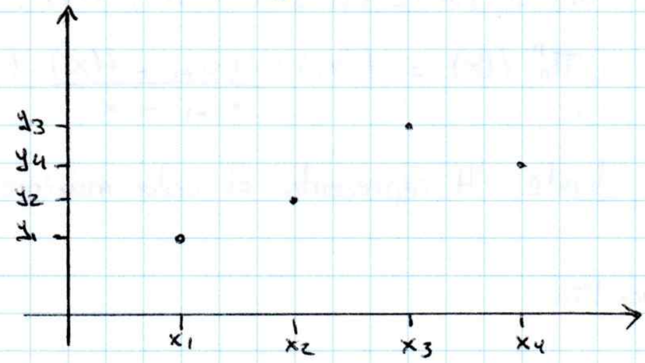
$\Pi_3^H f(x)$ queremos que sea 2 veces diferenciable a este tipo de interpolante se le conoce como

S_3: spline de grado 3.

Garantizar que este spline tenga las siguientes propiedades

① En cada intervalo $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, para cada $i = 0, \dots, n-1$ S_3 sea un polinomio de grado 3 que interpola los nodos (x_i, y_{i+1}) para $j = i, i+1$

② S_3 tiene primera y segunda derivada continuas en los nodos x_i, $i=1,\dots,n-1$



→ $n+1$ condiciones de interpolación $S_3(x_i)=y_i$
→ $n-1$ condiciones de continuidad de S_3
→ $2(n-1)$ condiciones de continuidad de S_3' y S_3''

→ Spline natural $\qquad S_3''(x_0)=0 \qquad S_3''(x_n)=0.$

→ Spline periódico $\qquad S_3''(x_0)=S_3''(x_n)$

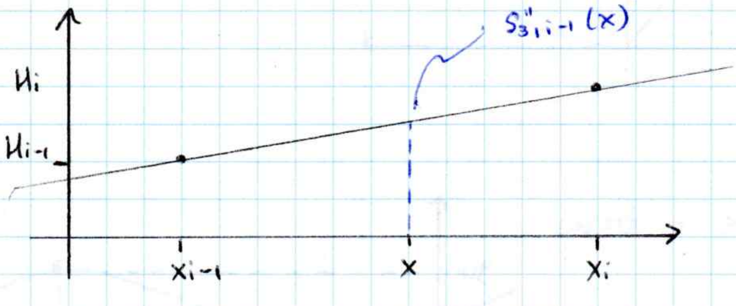
Notación:

$$f_i = S_3(x_i), \quad m_i = S_3'(x_i), \quad M_i = S_3''(x_i), \quad i=0,\dots,n$$

$$S_{3I_j} = S_3|_{I_j} = S_3|_{[x_j, x_{j+1}]}$$

Como $S_{3,i-1} \in \mathcal{P}_3$, por lo tanto $S_{3,i-1}''$ es una función lineal

$$S_{3,i-1}''(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x-x_{i-1}}{h_i}, \qquad x\in[x_{i-1}, x_i]$$



Integrando $S_{3,i-1}(x)$,

$$S_{3,i-1}(x) = M_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i} + C_{i-1}(x-x_{i-1}) + \tilde{C}_{i-1}$$

Las constantes, C_{i-1}, $\tilde{C}_{i-1}$, se obtienen de las condiciones de continuidad de S_3 y S_3'

$$S_{3,i-1}(x_{i-1}) = f(x_{i-1}) = f_{i-1}, \qquad S_{3,i}(x_i) = f(x_i) = f_i$$

Por tanto, para $i=1,\dots,n-1$

$$\tilde{C}_{i-1} = f_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}$$

$$C_{i-1} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1})$$

→ Usando la continuidad de la primera derivada

$$S_3'(x_i^-) = \frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i}{3}M_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$

$$= -\frac{h_{i+1}}{3} M_i - \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} = S_3'(x_i^+)$$

Estas condiciones generan un sistema de ecuaciones lineales (M-continuidad)

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \qquad i = 1, \dots, n-1$$

donde

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} , \qquad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$$

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right) \qquad i = 1, \dots, n-1.$$

Las dos condiciones extra se escriben como

$$\left.\begin{array}{l} 2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0 \\ \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda_0 \geq 0 \\ \mu_n \leq 1 \end{array}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_{n-1} \\ & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix}}^{n-1} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ \\ d_n \end{bmatrix}$$

d_0, d_n valores dados

(spline natural) $d_0 = d_1 = 0$

Martes, 4 de enero de 2022

Con respecto al error de interpolación de los splines cúbicos, tenemos el siguiente resultado.

Teorema Sea $f \in C^4([a,b])$ y una partición fija del intervalo $[a,b]$ en subintervalos h_i tal que $h = \max h_i$ y $\beta = h / \min h_i$ y sea S_3 el spline cúbico que interpola a f, entonces

$$\| f^{(r)} - S_3^{(r)} \|_\infty \leq C_r h^{4-r} \| f^{(4)} \|_\infty \qquad r = 0, 1, 2, 3.$$

con $C_0 = 5/384$, $C_1 = 1/24$, $C_2 = 3/8$ y $C_3 = (\beta + \beta^{-1})/2$.

Capítulo 3: Diferenciación numérica.

- Consideremos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable en (a,b). Buscamos una aproximación de la primera derivada de f en un punto $\bar{x} \in (a,b)$
- Para un h suficientemente pequeño y positivo la cantidad

$$(\delta_+ f)(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} \qquad (1)$$

es una aproximación de $f'(\bar{x})$ que se conoce como DIFERENCIA DIVIDIDA HACIA ADELANTE. ¿Cuánto error se comete con esta aproximación?

↳ Expansión en series de Taylor de $f(x+h)$ alrededor del punto $\bar{x}$. Asumimos $f \in C^2([a,b])$

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + hf'(\bar{x}) + \frac{h^2}{2} f''(\xi) \qquad (2)$$

con $\xi \in (\bar{x}, \bar{x}+h)$.
Arreglando en el lado izquierdo

$$(\delta_+ f)(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} = f'(x) + \frac{h}{2} f''(\xi)$$

Por lo tanto,

$$(\delta_+ f)(\bar{x}) - f'(\bar{x}) = \frac{h}{2} f''(\xi) \quad \to \text{Aproximación de primer orden}$$

$\to$ Otra forma de aproximar la derivada

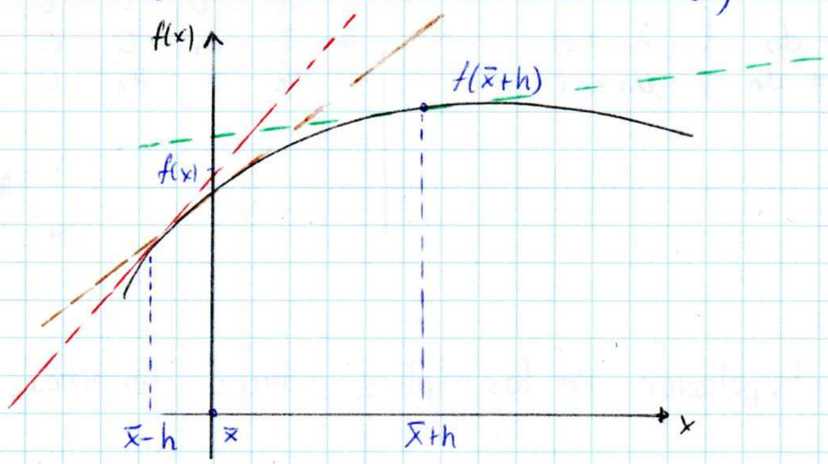
$$(\delta_- f)(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}) + f(\bar{x}-h)}{h} \qquad (4)$$

Diferencias finitas hacia atrás

$$f(\bar{x}-h) = f(\bar{x}) - h f'(x) + \frac{h^2}{2}$$

$$\iff f(\bar{x}) - f(\bar{x}+h)$$

$$\iff (\delta_- f)(\bar{x}) - f'(\bar{x}) = -h/2\, f''(\eta)$$



Pregunta:
¿Podemos hacerlo mejor?
↳ Diferencias finitas centradas

$$(\delta f)(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}-h)}{2h} \qquad (5)$$

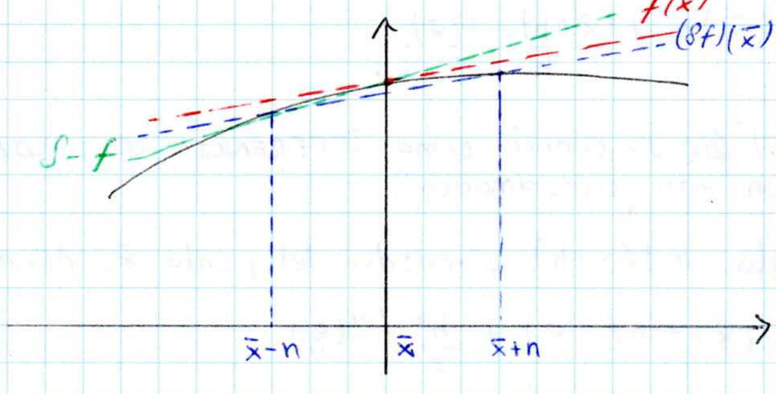
$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + h f'(\bar{x}) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(\xi)$$

$$- f(\bar{x}-h) = -f(\bar{x}) + h f'(\bar{x}) - \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(\eta)$$

Así

$$f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}-h) = 2h f'(\bar{x}) + \frac{h^3}{6}\left[f^{(3)}(\xi) + f^{(3)}(\eta)\right]$$

$$(\delta f)(\bar{x}) - f'(\bar{x}) = \frac{h^2}{12}\left[f^{(3)}(\xi) + f^{(3)}(\eta)\right] \quad \to \text{se dice que son aproximaciones de segundo orden.}$$



¿Qué pasa cuando $\bar{x} = a$, $\bar{x} = b$?

DIFERENCIAS FINITAS HACIA ADELANTE $\to$ falla $\bar{x} = b$

DIFERENCIAS FINITAS HACIA ATRÁS → falla $\bar{x}=a$

DIFERENCIAS CENTRADAS → fallan $\bar{x}=a$ y $\bar{x}=b$

Existes aproximaciones para los casos extremos $\{x_0,\dots,x_n\}$

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}\left[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)\right]$$

$$f'(x_n) \approx \frac{1}{2h}\left[3f(x_n)-4f(x_{n-1})+f(x_{n-2})\right]$$

son aproximaciones de segundo orden

Integración Numérica.

En esta sección revisaremos métodos numéricos para aproximar la siguiente integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

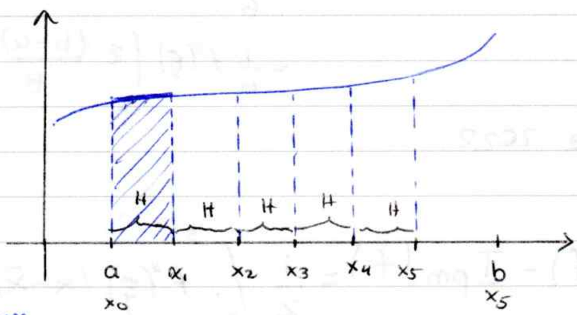
donde f es una función continua arbitraria en $[a,b]$

Reglas de cuadratura.

1) Regla del punto medio: Una forma simple de aproximar esta integral $I(f)$ se puede obtener al particionar $[a,b]$ en subintervalos $I_k=[x_{k-1},x_k]$ con $k=1,\dots,M$ con $x_k=a+kH$, $k=0,\dots,M$ y $H=(b-a)/M$

Usando esta descomposición

$$I(f)=\sum_{k=1}^{M}\int_{I_k} f(x)\,dx \qquad (2)$$



Estrategia: Reemplazar f por un interpolante polinomial $\tilde{f}$ que aproxima a f en I_k.

→ El interpolante más simple que podemos usar es $\tilde{f}$ como un polinomio constante. Este interpolante usa el punto medio del intervalo I_k

$$\bar{x}_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}.$$

entonces podemos reescribir (2) como

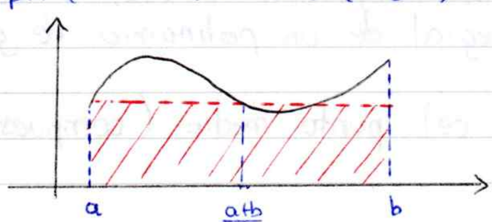
(3)
$$I(f)\approx I_{pm}^{c}(f)=\sum_{k=1}^{M}\int_{I_k} f(\bar{x}_k)\,dx$$

$$=\sum_{k=1}^{M} f(\bar{x}_k)\int_{I_k}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{M} f(\bar{x}_k)(x_k-x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{M} f(\bar{x}_k)H = H\sum_{k=1}^{M} f(\bar{x}_k)$$

Cuando tenemos un solo intervalo, $H=(b-a)$, se denomina regla simple del punto medio.

$$I_{pm}(f) = (b-a)\,f\!\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (4)$$



¿Cuánto error cometemos al aproximar la integral con esta regla?

Error

$$I(f)-I_{pm}(f)=\int_a^b f(x)\,dx-(b-a)f(\bar{x})=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b f(\bar{x})\,dx=\int_a^b f(x)-f(\bar{x})\,dx$$

$$f(x)=f(\bar{x})+f'(\bar{x})(x-\bar{x})+\tfrac{1}{2}f''(\eta(x))(x-\bar{x})^2, \quad \text{donde } \eta\in(x,\bar{x})$$

$$f(x)-f(\bar{x}) = f'(x)(x-\bar{x})+\tfrac{1}{2}f''(\eta(x))(x-\bar{x})^2$$

Retomando

$$I(f) - I_{pm}(f) = \int_a^b \left(f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{1}{2} f''(n(x))(x-\bar{x})^2 \right) dx$$

$$= \int_a^b f'(\bar{x})(x-\bar{x})dx + \frac{1}{2}\int_a^b f''(n(x))(x-\bar{x})^2 dx$$

$$\int_a^b (x-\bar{x})dx = \left.\frac{(x-\bar{x})^2}{2}\right|_a^b = \frac{(b-\bar{x})^2}{2} - \frac{(a-\bar{x})^2}{2} = 0 \text{ pues } \bar{x} \text{ es el punto medio}$$

$$I(f) - I_{pm}(f) = \frac{1}{2}\int_a^b f''(n(x))(x-\bar{x})^2 dx$$

Gracias al teorema del valor medio para integrales, sabemos que existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$I(f) - I_{pm}(f) = \frac{1}{2} f''(\xi)\int_a^b (x-\bar{x})^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} f''(\xi) \left.\frac{(x-\bar{x})^3}{3}\right|_a^b$$

$$= \frac{1}{6} f''(\xi)\left[(b-\bar{x})^3 - (a-\bar{x})^3\right]$$

$$= \frac{1}{6} f''(\xi)\left(2\frac{(b-a)^3}{8}\right)$$

Lunes, 17 de enero de 2022.

Tenemos que

$$I(f) - I_{pm}(f) = \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(x-\bar{x})^2 dx$$

Por el teorema del valor medio

$$\int_a^b f''(n(x))(x-\bar{x})^2 dx = (b-a) f''(n(c))(c-\bar{x})^2$$

$$= f''(\xi)(b-a)(c-\bar{x})^2$$

$$= f''(\xi)\int_a^b (c-\bar{x})dx$$

Para el caso de la regla del punto medio compuesta

$$I(f) - I_{pm}^c(f) = \frac{b-a}{24}H^2 f''(\xi) \qquad \text{con } \xi \in [a,b].$$

Definición - Grado de exactitud-

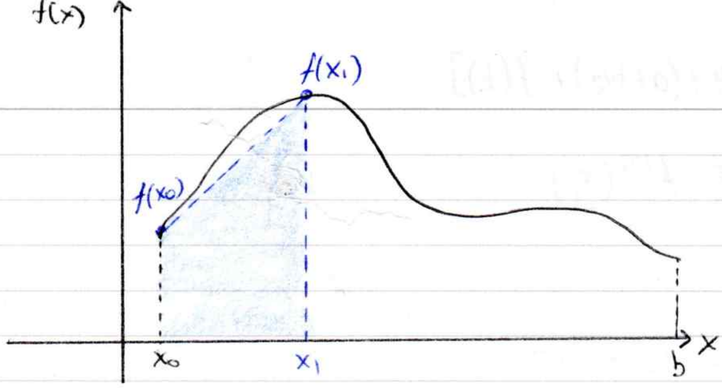
Llamaremos como grado de exactitud de una regla de cuadratura, al máximo entero $r \geq 0$ para el cual la integral aproximada, coincide con la integral exacta al evaluar la integral de un polinomio de grado r.

Observación: El grado de exactitud del punto medio (compuesta o clásica) es 1.

② Regla del trapecio.

$$I(f) = \sum_{k=1}^{M}\int_{I_k} f(x)dx$$

→ La aproximación se obtiene al reemplazar f sobre I_k con polinomio interpolante lineal, de f en los nodos x_{k-1} y x_k y reemplazando f por $\Pi_1^H f$



$$(7)\quad I_t^c(f) = \sum_{k=1}^{M} [f(x_k) - f(x_{k-1})]\cdot \frac{H}{2} = \frac{H}{2}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]$$

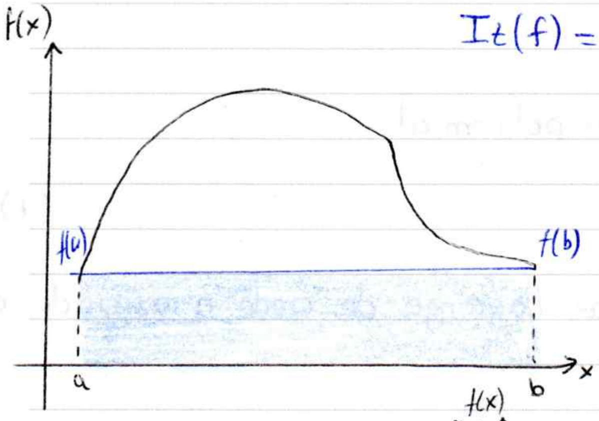
$$= \frac{H}{2}[f(a)+f(b)] + \sum_{k=1}^{M-1} f(x_k) \qquad (8)$$

Con respecto al error de esta regla de cuadratura

$$I(f) - I_t^c(f) = -\frac{b-a}{12} H^2 f''(\xi) \qquad \text{con } \xi \in]a,b[\text{, con } f\in C^2([a,b])$$

→ En el caso extremo, $m=1$

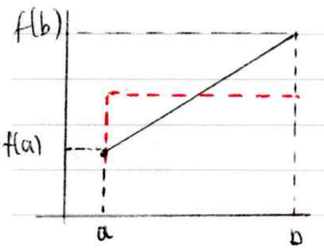
$$I_t(f) = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

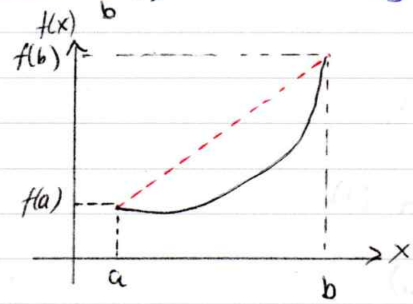


Con el siguiente error de cuadratura

$$I(f) - I_t(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

→ Esta regla tiene grado de exactitud $r=1$.





③ Regla de Simpson

La idea es reemplazar f por su interpolante polinomial de grado 2 en cada I_k en los nodos x_{k-1}, x_k y $\bar{x}_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$. Así, $f \approx \Pi_2 f(x)$, donde

$$f \approx \Pi_2 f(x) = \frac{2(x-\bar{x}_k)(x-x_k)}{H^2} f(x_{k-1}) + \frac{4(x_{k-1}-x)(x-x_k)}{H^2} f(\bar{x}_k)$$

$$+ \frac{2(x-\bar{x}_k)(x-x_{k-1})}{H^2} f(x_k)$$

$$I_s^c(f) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\int^{b}}_{I_k} \Pi_2 f(x) = \sum_{k=1}^{M} \frac{H}{6}[f(x_k) + 4f(\bar{x}_k) + f(x_k)] \qquad (9)$$

Con respecto al error, tenemos que

$$I(f) - I_s^c(f) = -\frac{b-a}{180}\frac{H^4}{16} f''''(\xi), \quad \text{con } f\in C^4([a,b]),\ \xi\in]a,b[. \qquad (10)$$

Tomando $H=1$

$$I_S(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(a+b/2) + f(b)\right]$$

$$I(f) - I_S(f) = -\frac{(b-a)^5}{16 \times 180} f^{(4)}(\xi)$$

Martes, 18 de enero de 2022

$y = [4,\ 3\ 6\ 2\ 1]$

$d_+y = [-1\ \ 3\ -4\ -1\ \ ?]$

$d_-y = [x\ -1\ \ 3\ -4\ -1]$

$dy = [x\ -1\ \ 3\ \ 4\ \ x]$

Newton-Cotes.

Recordando

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \bar{f}(x)dx$$

$$I_n(f) \approx \int_a^b \Pi_n f(x)dx$$

-> Usando la forma de Lagrange de la interpolación polinomial

$$I_n f = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x) \qquad (1)$$

donde $\ell_i(x)$ son los polinomios característicos de Lagrange de grado n asociado al nodo x_i

-> Si además definimos

$$(2) \qquad \alpha_i = \int_a^b \ell_i(x)\,dx,$$

entonces podemos reescribir la ecuación (1)

$$(3) \qquad I_n f = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\alpha_i}_{\text{peso}} f(x_i)$$

-> A la forma (3) se la conoce como REGLA DE CUADRATURA DE LAGRANGE.

Lunes, 24 de enero de 2022

Regla de cuadratura de Lagrange

Consideremos nodos igualmente espaciados en $[a,b]$, es decir, para $n \geq 0$, notaremos los nodos de cuadratura como

$$x_k = x_0 + kh \qquad k = 0,\dots,n$$

En el caso general, se puede definir

a) Fórmulas cerradas

$x_0 = a$, $x_n = b$ $\quad h = \frac{b-a}{n} \quad n \geq 1$

b) Fórmulas abiertas

$$x_0 = a+h, \quad x_n = b-h, \quad h = \frac{b-a}{n+2}, \quad n \geq 0.$$

Los pesos de cuadratura, dependen de n o h, pero no del intervalo de integración

↳ Considerando las fórmulas cerradas y haciendo el siguiente cambio de variable

$$x = \psi(t) = x_0 + tx \to \psi(0) = a$$
$$\to \psi(n) = b$$
$$\to \psi(k) = x_k$$

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_k)\,(x-x_{i-1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\,(x_i-x_k)\,(x_i-x_{i-1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$\frac{x-x_k}{x_i-x_k} = \frac{\psi(t)-\psi(k)}{\psi(i)-\psi(k)} = \frac{a+th-(a+tn)}{a+ih-(a+kh)} = \frac{t-k}{i-k}$$

→ Por lo tanto

$$l_i(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{t-k}{i-k} = \varphi_i(t) \qquad 0\leq i \leq n$$

→ Se puede obtener los pesos de cuadratura

$$\alpha_i = \int_a^b l_i(x)\,dx = \int_0^n \varphi_i(t)h\,dt \Rightarrow \alpha_i = h\int_0^n \varphi_i(t)\,dt$$

→ Ahora, la regla de cuadratura de Lagrange se obtiene como

$$(5) \Rightarrow \quad I_n(f) = h\sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x), \qquad \omega_i = \int_0^n \varphi_i(t)\,dt.$$

Ejemplo: $n=1$

$$I_1(f) = h[\omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)] \qquad \omega_0 = \int_0^1 \varphi_0(t)\,dt = \int_0^1 \frac{t-1}{-1}\,dt = \int_0^1 (1-t)\,dt = \frac{1}{2}$$

(trapecio clásico) $$= \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] \qquad \omega_1 = \int_0^1 \varphi_1(t)dt = \int_0^1 \frac{t-0}{1}\,dt = \frac{1}{2}$$

Usando las formulas abiertas $x = \psi(t)$

$$x_0 = a+h, \quad x_n = b-h \qquad x_n = a+h(k+1), \quad k = 1,\ldots,n-1$$
$$x_{-1} = a, \quad x_{n+1} = b.$$

Para este caso

$$\alpha_i = h\int_{-1}^{n+1} \varphi_i(t)\,dt.$$

De tal manera que

$$I_n(f) = h\sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i), \qquad \omega_i = \int_{-1}^{n+1} \varphi_i(t)\,dt.$$

Teorema: Para cualquier fórmula de Newton-Cotes correspondiente a un n par, la siguiente caractesización del error se cumple

$$E_n(f) = \frac{H_n}{(n+2)!} h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)$$

asumiendo que $f \in C^{(n+2)}([a,b])$ y con $\xi \in]a,b[$.

$$H_n = \begin{cases} \int_0^n t\,\Pi_{n+1}(t)\,dt < 0 & \text{(Fórmulas cerradas)} \\ \int_{-1}^{n+1} t\,\Pi_{n+1}(t)\,dt > 0 & \text{(Fórmulas abiertas)} \end{cases}$$

notando $\Pi_{n+1}(t) = \prod_{i=0} (t-i)$. De donde, se tiene que este método tendrá un grado de exactitud de $n+1$ y orden $n+3$.

De manera similar, para n impar, se satisface la siguiente estimación de error

$$E_n(f) = \frac{K_n}{(n+1)!} h^{n+2} f^{(n+1)}(\eta)$$

asumiendo $f \in C^{(n+1)}([a,b])$, $\eta \in (a,b)$ y

$$K_n = \begin{cases} \int_0^{n} \Pi_{n+1}(t)\,dt < 0 & \text{(Fórmulas cerradas)} \\ \int_{-1}^{n+1} \Pi_{n+1}(t)\,dt > 0 & \text{(Fórmulas abiertas)} \end{cases}$$

Demostración (Completa Isaacson and Keller, Analysis of Numerical Methods, Wiley, 308-314)

* nos enfocaremos en el caso n par, usando fórmulas cerradas

$$E_n(f) = I(f) - I_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \Pi_n(f)(x)\,dx$$

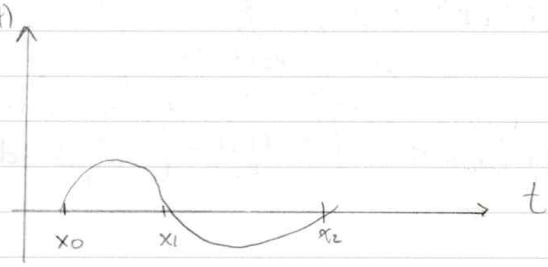
$$= \int_a^b f(x) - \Pi_n(f)(x)\,dx$$

$$= \int_a^b f[x_0, \ldots, x_n]\, \underbrace{\omega_{n+1}(x)}_{\text{polinomio nodal de grado } n+1} dx \tag{6}$$

Ahora, notemos la siguiente función auxiliar

$$W(x) = \int_a^x \omega_{n+1}(t)\,dt, \quad W(a) = 0$$

Como n es par, entonces $\omega_{n+1}(t) = (t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)$



ω_{n+1} es una función impar con respecto a $(a+b)/2$

$\rightarrow$ $\omega_{n+1}(t)$ es impar, $W(b) = 0$.

Integrando por partes (6)

$$E_n(f) = \int_a^b f[x_0, \ldots, x_n, x]\, W'(x)\,dx = f[x_0, \ldots, x_n x]\, W(x)\Big|_a^b - \int_a^b W(x) \frac{d}{dx} f[x_0, \ldots, x_n, x]\,dx$$

$$= -\int_a^b W(x) \frac{d}{dx} f[x_0, \ldots, x_n, x]\,dx$$

deber. $\frac{d}{dx} f[x_0, \ldots, x_n, x] = f[x_0, \ldots, x_n, x, x]$

$$E_n(f) = -\int_a^b W(x)\, F[x_0, \ldots, x_n, x, x]\,dx \tag{7}$$

Usando el error de interpolación usando la forma de Newton

$$f[x_0, \ldots, x_n, x, x] = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}$$

Ahora, podemos reescribir (7) de la siguiente manera

$$E_n(f) = -\int_a^b \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} W(x)\,dx$$

$$= -\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\int_a^b w(x)\,dx$$

Retomando la forma original de w

$$E_n(f) = -\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\int_a^b\int_a^x w_{n+1}(t)\,dt\,dx$$

Intercambiando el orden de integración y fijando $s = x_0 + \tau h$ con $0 \le \tau \le n$, $a = x_0$, $b = x_n$

$$\int_a^b w(x)\,dx = \int_a^b\int_a^x w_{n+1}(t)\,dt\,dx = \int_a^b\int_s^b w_{n+1}(s)\,dx\,ds$$

$$= \int_a^b\int_s^b (s-x_0)(s-x_1)\cdots(s-x_n)\,dx\,ds$$

$$= \int_a^b (s-x_0)\cdots(s-x_n)\int_s^b dx\,ds$$

$(s-x_0) = (x_0+\tau h - x_0) = \tau h$

$(s-x_1) = (x_0 + \tau h - x_0 - h)$
$= h(\tau - 1)$

$$= \int_a^b (s-x_0)\cdots(s-x_n)(x_n - s)\,ds$$

$$= \int_0^n (h\tau)(h(\tau-1))(h(\tau-2))\cdots(h(\tau-n))(-h(\tau-n))\,h\,d\tau$$

$$= \int_0^n h^{n+3}[\tau(\tau-1)(\tau-2)\cdots(\tau-n+1)(\tau-n)^2]\,d\tau$$

tomando $t = n - \tau$

$$= h^{n+3}\int_0^n t^2(1-t)(2-t)\cdots(n-t)\,dt$$

$$= h^{n+3}\int_0^n t(t(t-1)(t-2)\cdots(t-n))\,dt.$$

Así,

$$\int_a^b w(x)\,dx = h^{n+3}\underbrace{\int_0^n t\,\Pi_{n+1}(t)\,dt}_{M_n} \Rightarrow E_n(f) = \frac{M_n}{(n+2)!}h^{n+3}f^{(n+2)}(\xi)$$

Lunes, 31 de enero de 2022

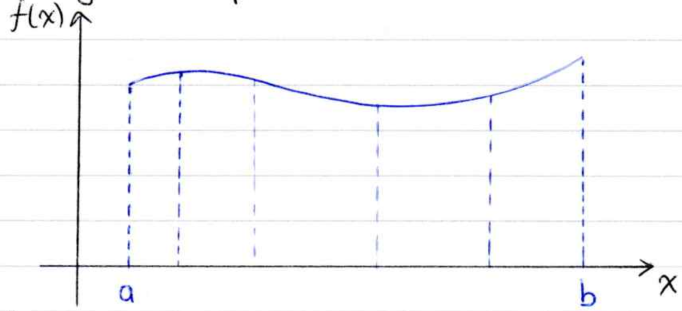
Observación

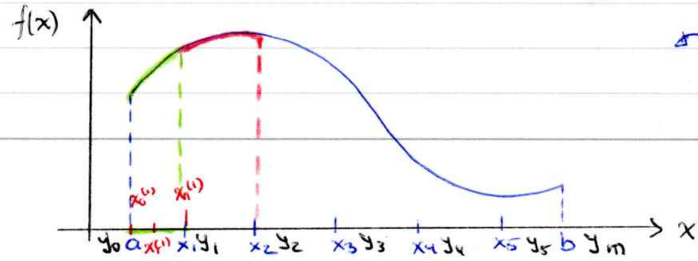
$$I(f) = \int_{-5}^{5}\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

función de Runge

→ En la práctica, no se recomienda usa los métodos de Newton-Cotes para más de 8 nodos.

Solución: Utilizar reglas compuestas





~ Estrategia: separar en intervalos
Reemplazar f por un polinomio interpolante a trozos

El procedimiento consiste en partir el intervalo de integración $[a,b]$ en m subintervalos $T_j = [y_j, y_{j+1}]$ tal que

$$y_j = a + jH \qquad \text{con} \quad H = \frac{b-a}{m} \qquad j = 0, \dots, m$$

Después, sobre cada intervalo, se aplica la interpolación polinomial en los nodos $\{x_k^{(j)}, 0 \le k \le n\}$ con pesos $\{\alpha_k^{(j)}, 0 \le k \le n\}$.

Entonces

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{T_j} f(x)dx.$$

Usando las reglas de Newton-Cotes sobre T_j tenemos

$$I_{n,m}(f) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(j)} f(x_k^{(j)}) \tag{1}$$

y por lo tanto, el error de cuadratura será

$$E_{n,m} = I(f) - I_{n,m}(f) \tag{2}$$

Teorema. Sea la regla de Newton-Cotes compuesta con n par. Si $f \in C^{n+2}([a,b])$, entonces se cumple la siguiente estimación

$$E_{n,m}(f) = \frac{b-a}{(n+2)!} \frac{\mu_n}{(n+2)^{n+3}} H^{n+2} f^{(n+2)}(\xi) \qquad \text{con } \xi \in (a,b)$$

- Para n impar, si $f \in C^{n+1}([a,b])$

$$E_{n,m}(f) = \frac{b-a}{(n+1)!} \frac{K_n}{n^{n+2}} H^{n+1} f^{(n+1)}(\eta) \qquad \text{con } \eta \in (a,b)$$

Demostración.

↳ Caso: n par

Definimos

$$\begin{aligned} E_{n,m}(f) &= I(f) - I_{n,m}(f) = \sum_{j=0}^{m-1} I(f)|_{T_j} - \sum_{j=0}^{m-1} I_n(f)|_{T_j} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} [I(f)|_{T_j} - I_n(f)|_{T_j}] \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} E_n(f)|_{T_j} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\mu_n}{(n+2)!} h_j^{(n+3)} f^{(n+2)}(\xi_j) \qquad \text{con } \xi_j \in T_j \end{aligned}$$

Donde, para todo $j = 0, \dots, (m-1)$ se tiene:

$$h_j = \frac{|T_j|}{n+2} = \frac{b-a}{m(n+2)}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E_{n,m}(f) &= \frac{\mu_n}{(n+2)!} \sum_{j=0}^{m-1} h_j^{(n+3)} f^{(n+2)}(\xi) \\ &= \frac{\mu_n}{(n+2)!} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{b-a}{m(n+2)}\right)^{n+3} f^{(n+2)}(\xi_j) \end{aligned}$$

Notando que $H = \frac{b-a}{m}$, entonces

$$E_{n,m}(f) = \frac{H_n}{(n+2)!} \frac{(b-a)}{m(n+2)^{n+3}} H^{n+2} \sum_{j=0}^{m-1} f^{(n+2)}(\xi_j)$$

Teorema del valor medio discreto.

Sea $\mu \in C^0([a,b])$ y sea $\{x_j\}$ un conjunto de $S+1$ puntos en $[a,b]$ y δ_j con $j=0,\dots,s$ constantes con el mismo signo. Entonces, existe $\eta \in (a,b)$ tal que

$$\sum_{j=0}^{s} \delta_j \,\mu(x_j) = \mu(\eta) \sum_{j=0}^{s} \delta_j$$

Usando el teorema del valor medio discreto con $\mu(x) = f^{(n+2)}(x)$ y $\delta_j = 1$ con $j=0,\dots,m-1$; entonces, existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$E_{n,m}(f) = \frac{H_n}{(n+2)!} \frac{b-a}{m(n+2)^{n+3}} H^{n+2} f^{(n+2)}(\xi) \sum_{j=0}^{m-1} 1$$

$$= \frac{H_n}{(n+2)!} \frac{b-a}{(n+2)^{n+3}} H^{n+2} f^{(n+2)}(\xi) \quad \text{con } \xi \in (a,b)$$

Teorema. Sea $f \in C^0([a,b])$ y asumiendo que los pesos $\alpha_k^{(j)}$ son no negativos, entonces

$$\lim_{m\to+\infty} I_{n,m}(f) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \forall n \geq 0.$$

Más aún,

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - I_{n,m}(f) \right| \leq 2(b-a)\,\Omega(f;H)$$

donde

$$\Omega(f;H) = \sup\{ |f(x)-f(y)|,\ x,y \in [a,b],\ x\neq y,\ |x-y| \leq H \}$$

es el módulo de continuidad de f.

Integración de Montecarlo.

- Aproximar integrales multidimensionales $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con n muy grande.
- La idea básica es considerar la misma como un valor medio estadístico

$$\int_\Omega f(x)\,dx = |\Omega| \int_{\mathbb{R}^n} |\Omega|^{-1} \chi_\Omega(x) f(x)\,dx, \quad \text{donde } x = (x_1,\dots,x_n)^T,\ |\Omega| \text{ es el}$$

volumen n-dimensional de Ω (medida). χ_Ω es la función caraterística de Ω.

$$\int_\Omega f(x)\,dx = |\Omega|\,\mu(f)$$

Con $\mu(f)$: es el valor medio de $f(\hat{x})$ donde $\hat{x} \in \mathbb{R}$ es una variable aleatoria

↳ Recordando: Una variable aleatoria $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ es una n-tupla de valores reales $(\hat{x}_1(z),\dots,\hat{x}_n(z))$ asignado a la salida de un experimento

Fijando $x \in \mathbb{R}^n$, la probabilidad $P(\hat{X} \leq x)$ de que el evento $\{\hat{X}_1 \leq x_1, \dots, \hat{X}_n \leq x_n\}$ es

$$P(\hat{X} \leq x) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n)\, d\hat{x}_1\, d\hat{x}_2 \cdots d\hat{x}_n$$

donde $f(\hat{x})$ es la densidad de probabilidad de $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) \geq 0 \qquad \int_{\mathbb{R}^n} f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)\, d\hat{x} = 1.$$

Una forma de aproximar el valor medio es usando N muestras independientes $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n$ con probabilidad $|\Omega|^{-1} X_\Omega$ y calcular su promedio

$$\bar{f}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) = I_N(f)$$

-> Ley de los grandes números.

Con probabilidad 1, sabemos que $\bar{f}_N \xrightarrow{c.s.} \mu(f)$ cuando $N \to +\infty$

↳ $E_N(f) = \mu(f) - I_N(f)$ está dada por la varianza

$$\sigma(I_N(f)) = \sqrt{\mu(I_N(f) - \mu(f))^2} = \sigma / \sqrt{N}$$

Martes, 1 de febrero de 2022

Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs)

→ Ecuación diferencial ordinaria.

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t)$$

¿Por qué estudiar estas ecuaciones?

↳ Modelamiento de sistemas dinámicos

* Epidemiológicos
* Termodinámica
* Dinámica poblacional
* Robótica

El problema de Cauchy (Problema de valor inicial)

→ EDO de orden 1

→ Problema: Sea $y: I \to \mathbb{R}$

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \qquad \forall t \in I$$

$$\Rightarrow \int_I \frac{dy(t)}{dt} = \int_I f(t, y(t))\, dt$$ Se genera una familia de soluciones

El problema de Cauchy escoge una de estas posibles soluciones fijando una condición inicial

→ Problema de Cauchy

$$(\Gamma) \begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

donde I es un intervalo en $\mathbb{R}$, $f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dada, t_0 es un punto de I y y_0 es un valor dado en t_0 llamado DATO INICIAL.

Existencia y unicidad de la solución

Teorema. Sea una función $f(t, y)$ tal que

1. f sea continua respecto a los dos argumentos
2. Lipschitz continua con respecto al segundo argumento

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)| \leq L|y_1-y_2| \quad \forall t \in I,\ y_1,y_2 \in \mathbb{R}$$

Entonces la solución para el problema (1) exista, sea única y $y \in C^1(I)$

Solución analítica

↳ Solo se puede obtener para ciertos problemas simples (relativamente)

↳ En casos más complejos, tenemos soluciones que solo están disponibles de manera implícita.

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y-t}{y+t}$$

cuya solución satisface la siguiente relación

$$\frac{1}{2}\ln(t^2+y^2) + \arctan(y/t) = c$$

En otros casos, $y'(t) = e^{-t^2}$ su solución se expresa a través de una relación en series.

∴ Es necesaria una aproximación numérica de la solución

Estrategia numérica.

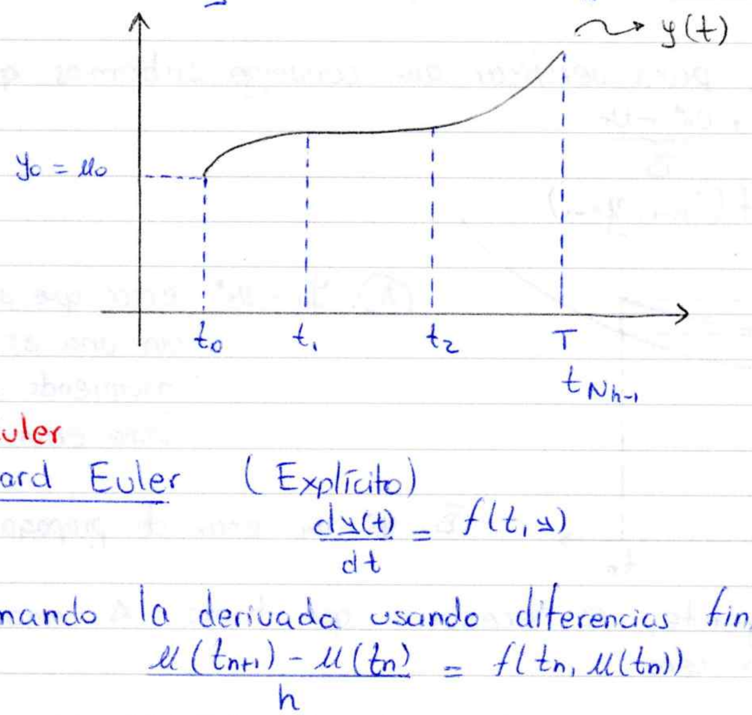
-> Subdividir el intervalo $I = [t_0, T]$ con $T < +\infty$ en N_h intervalos de tamaño

$$h = \frac{T-t_0}{N_h}$$

-> A h se lo conoce como paso de discretización

-> Para cada nodo t_n $(0 \leq \ \leq N_h)$ buscamos un valor u_n que es una aproximación (exacta) de la solución $y_n = y(t_n)$

-> Solución es el conjunto $\{u_0, u_1, \dots, u_{N}\}$



Métodos Euler

1) Forward Euler (Explícito)

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t,y)$$

Aproximando la derivada usando diferencias finitas hacia adelante

$$\frac{u(t_{n+1})-u(t_n)}{h} = f(t_n, u(t_n))$$

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + h f(t_n, u(t_n)) \tag{2}$$

Notando $u_{n+1} = u(t_{n+1})$, $f_n = f(t_n, u(t_n))$, entonces (2) se puede escribir de la siguiente manera

$$u_{n+1} = u_n + h f_n \tag{3}$$

Este cálculo se realiza para cada nodo t_n, $n = 1, \dots, N_{h-1}$

② Backward Euler (Implícito)

$$u_{n+1} = u_n + h f_{n+1}$$

con $f_{n+1} = f(t_{n+1}, u(t_{n+1}))$.

$$g(u_{n+1}) = u_{n+1} - h f_{n+1} - u_n \longrightarrow g(u_{n+1}) = 0$$

③ Método del trapecio (Crank-Nicolson)

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f_n + f_{n+1}] \quad (5)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(\tau)\,d\tau = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, y(\tau))\,d\tau \Rightarrow \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, y(\tau))\,d\tau = y(t) - y(t_0) \approx \frac{h}{2}[f_n + f_{n+1}]$$

$$\hookrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{h}{2}[f_n + f_{n+1}]$$

④ Método de Heun (explícito)

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f_n + f(t_{n+1}, u_n + h f_n)] \quad (6)$$

Estos métodos se conocen como métodos a un paso

Martes, 8 de febrero de 2022.

Definición - Método convergente -

Un método que resuelve la ecuación de Cauchy es convergente si $\forall n = 0, \dots, N_h$ $|y_n - u_n| \leq C(h)$ donde $C(h)$ es un infinitesimal de h (paso de discretización). Es decir, si $h \to 0$, entonces $C(h) \to 0$

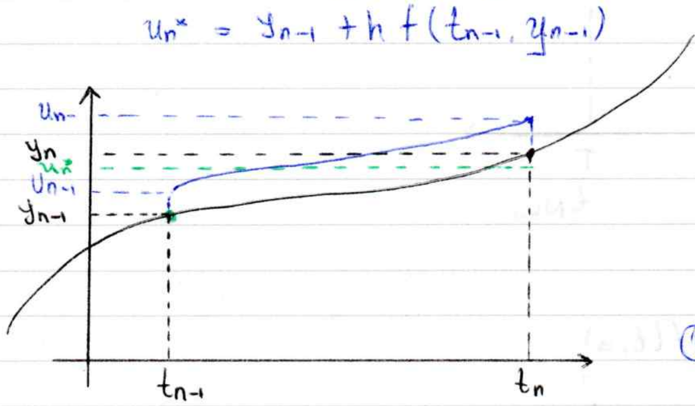
$C(h) = O(h^p)$ para $p > 0$, converge con orden p

Para el método de euler explícito, para verificar que converge sabemos que

$$e_n = y_n - u_n = \underbrace{y_n - u_n^*}_{A} + \underbrace{u_n^* - u_n}_{B}$$

donde

$$u_n^* = y_{n-1} + h f(t_{n-1}, y_{n-1})$$



Ⓐ $y_n - u_n^*$ error que se produce en una sola iteración asumiendo que no se tiene error previo.

Ⓑ $u_n^* - u_n$ error de propagación

Para que un método sea convergente, es necesario que tanto A como B tiendan a cero a medida que h tiende a cero

Euler explícito

$$\begin{aligned} y_n - u_n^* &= y_n - y_{n-1} - h f(t_{n-1}, y_{n-1}) \\ &= h \delta_+ y(t_{n-1}) - h f(t_{n-1}, y_{n-1}) \\ &= h(\delta_+ y(t_{n-1})) - \frac{dy}{dt}(t_{n-1}) = h\left(\frac{h}{2} y''(\xi_n)\right) \text{ con } \xi_n \in (t_{n-1}, t_n) \\ &= \frac{h^2}{2} y''(\xi) \end{aligned}$$

Definición: Error local de truncación.

$$\frac{y_n - u_n^*}{h} = \tau_n(h) \qquad \text{Para Euler } \tau_n(h) = \frac{h}{2} y''(\xi)$$

Error globlal de truncación

$$\tau(h) = \max_{n=0,\dots,N_h} |\tau_n(h)|$$

Para Euler explícito,

$$\tau(h) = M\frac{h}{2} \qquad \text{con } M = \max_{t\in[t_0,T]} |y''(t)|$$

Por lo tanto, para Euler $\tau(h) \to 0$ a medida que $h \to 0$

Definición Un método para el cual $\tau(h) \to 0$ cuando $h \to 0$, se lo conoce como método consistencia

Ahora, para (B) analizando la convergencia del método de Euler explícito

$$\begin{aligned}
u_n^* - u_n &= y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1}) - u_{n-1} + hf(t_{n-1}, u_{n-1}) \\
&= e_{n-1} + h[f(t_{n-1}, y_{n-1}) - f(t_{n-1}, u_{n-1})] \\
&\leq |e_{n-1}| + h\,|f(t_{n-1}, y_{n-1}) - f(t_{n-1}, u_{n-1})| \\
&\leq |e_{n-1}| + hL\,|y_{n-1} - u_{n-1}| \\
&\leq (1+hL)\,|e_{n-1}|
\end{aligned}$$

Sea $e_0 = y_0 - u_0 = 0$ tenemos que e_n es

$$\begin{aligned}
|e_n| &= |y_n - u_n^* + u_n^* - u_n| \\
&\leq |y_n - u_n^*| + |u_n^* - u_n| \\
&\leq h|\tau_n(h)| + (1+hL)|e_{n-1}| \\
&\leq h|\tau_n(h)| + (1+hL)|y_{n-1} - u_{n-1}^* + u_{n-1}^* - u_{n-1}| \\
&\leq h|\tau_n(h)| + (1+hL)[h|\tau_{n-1}(h)| + (1+Lh)|e_{n-2}|] \\
&\leq h|\tau(h)| + (1+hL)[h|\tau(h)| + (1+hL)|e_{n-2}|] \\
&\leq (1 + (1+hL) + (1+hL)^2 + \dots + (1+hL)^{n-1})\, h\,\tau(h)
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1+hL)^k = \frac{[(1+hL)^n - 1]}{hL}$$

$$(1+hL) \leq e^{hL}$$

Así,

$$\frac{(1+hL)^n - 1}{L}\,\tau(h) \leq \frac{e^{L(t_n - t_0)} - 1}{L}\,\tau(h)$$

$$|e_n| \leq \frac{e^{L(t-t_0)} - 1}{L}\,\frac{M}{2}\,h \qquad \forall\, n = 0,\dots,N_h$$

→ Por lo tanto, el método de euler explícito convege con orden 1.

Lunes, 14 de febrero de 2022.

Métodos a un paso

Son métodos que se pueden escribir de la siguiente forma

$$u_{n+1} = u_n + h\,\Phi(t_n, u_n, f_n; h) \qquad \forall\, 0 \leq n \leq N_{h-1}$$

con $u_0 = y_0$. A la función Φ se la conoce como función de incremento. $y_n = y(t_n)$

↳ Euler explícito: $\Phi(t_n, u_n, f_n; h) = f(t_n, u_n)$

↳ Heun : $\Phi(t_n, u_n, f_n; h) = 1/2\,[f_n + f(t_{n+1}, u_n + h f_n)]$

Cero estabilidad.

Definición: Un método (1) para resolver el problema de Cauchy es cero estable si

$$(\exists h_0 > 0)(\exists C > 0) : \forall h \in (0, h_0] \ , \ |z_n - u_n| \leq C_\varepsilon$$

con $0 \leq n \leq N_h - 1$.

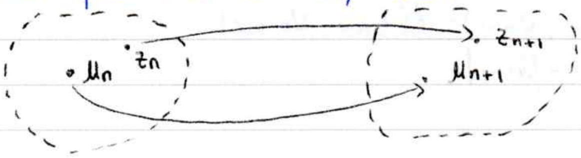
Donde C es una constante que puede depender del intervalo I de integración y z_n es la solución al siguiente problema perturbado

$$(2) \begin{cases} z_{n+1} = z_n + h[\Phi(t_n, z_n, f_n; h) + \delta_{n+1}] \\ z_0 = y_0 + \delta_0 \end{cases}$$

Recordando el problema sin pertuba

$$(3) \begin{cases} u_{n+1} = u_n + h\,\Phi(t_n, u_n, f_n; h) \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Asumiendo que $|\delta_k| < \varepsilon$, con $0 \leq k \leq \varepsilon$.



Teorema 1 Considere a un método a un paso (1) para la solución del problema de Cauchy. Asumiendo que la función de incremento Φ es lipschitz continua con respecto a la segunda variable, con constante Λ independiente de h y de los nodos t_j $[t_0, t_0 + T]$ es decir

$$(\exists h_0 > 0)(\exists \Lambda > 0) : (\forall h \in]0, h_0]$$

$$|\Phi(t_n, u_n, f(t_n, u_n); h) - \Phi(t_n, z_n, f(t_n, z_n); h| \leq \Lambda |u_n - z_n| \ , \ \forall\, 0 \leq n \leq N_h$$

Entonces el método (1) es cero-estable

Demostración:

Fijemos $w_j = z_j - u_j$ y restando (2) de (3), tenemos que

$$\begin{aligned} w_{j+1} &= z_{j+1} - u_{j+1} \\ &= z_j + h[\Phi(t_j, z_j, f(t_j, z_j); h) + \delta_{j+1}] - u_j - h\,\Phi(t_j, u_j, f(t_j, u_j); h) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow w_{j+1} = w_j + h\,[\Phi(t_j, z_j, f(t_j, z_j); h) - \Phi(t_j, u_j, f(t_j, u_j); h) + \delta_j h$$

Sumando sobre $j = 0, \ldots, n-1$

$$w_n = w_0 + h\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{j+1} + h\sum_{j=0}^{n-1} [\Phi(t_j, z_j, f(t_j, z_j), h) - \Phi(t_j, u_j, f(t_j, u_j), h)]$$

Tomando el valor absoluto en ambos lados

$$|w_n| \leq |w_0| + h\sum_{j=0}^{n-1} |\delta_{j+1}| + h\sum_{j=0}^{n-1} |\Phi(t_j, z_j, f(t_j, z_j); h) - \Phi(t_j, u_j, f(t_j, u_j); h)|$$

Ahora, usando la lipschitz continuidad de la función de incremento

$$\begin{aligned} |w_n| &\leq |w_0| + h\sum_{j=0}^{n-1} |\delta_{j+1}| + h\Lambda \sum_{j=0}^{n-1} |z_j - u_j| \\ &= |w_0| + h\sum_{j=0}^{n-1} |\delta_{j+1}| + h\Lambda \sum_{j=0}^{n-1} |w_j| \end{aligned}$$

Lema de Gronwall Discreta.

Sea $(k_n)_n$ una sucesión no negativa y φ_n una sucesión tal que

$$\begin{cases} \varphi_0 \leq g_0 \\ \varphi_n \leq g_0 + \sum_{s=0}^{n-1} p_s + \sum_{s=0}^{n-1} k_s \varphi_s \ , \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Si $y_0 \geq 0$ y $p_n \geq 0$, entonces, $\forall n \geq 0$ tenemos que
$$\varphi_n \leq \left(g_0 + \sum_{s=0}^{n-1} p_s\right) \exp\left(\sum_{s=0}^{n-1} k_s\right) \quad \forall n \geq 1$$

- Continuando con la demostración -

Aplicando el lema de Gronwall discreto a (4) tenemos que
$$|w_n| \leq (1+hn)\,\varepsilon\, e^{nh\Lambda} \qquad 1 \leq n \leq N_h$$
$$\Leftrightarrow |w_n| \leq \underbrace{\left((1+T)e^{\Lambda T}\right)}_{C} \varepsilon$$

Teorema de equivalencia. (Lax - Ritchmyer)

↳ Todo método consiste es convergente si y solo si es cero-estable

Teorema: Bajo las mismas hipótesis de Teorema 1 se tiene que
$$|y_n - u_n| \leq (|y_0 - u_0| + nh\,\tau(h))\, e^{nh\Lambda}, \quad 1 \leq n \leq N_h$$
Si además, el método es consistente (error local) y $|y_0 - u_0| \to 0$ a medida que $h \to 0$ entonces el método es convergente

Demostración:

Vamos a tomar $w_j = y_j - u_j$, tomando las iteraciones correspondientes
$$u_{j+1} = u_j + h\Phi(t_j, u_j, f(t_j, u_j); h)$$
$$y_{j+1} = \underbrace{y_j + h\Phi(t_j, y_j, f(t_j, y_j); h)}_{u_{j+1}^*} + h\tau_{n+1}(h)$$

$$\begin{aligned} w_{j+1} &= y_{j+1} - u_{j+1} \\ &= y_j + h\Phi(t_j, y_i, f(t_j, y_j); h) + h\tau_{j+1}(h) \\ &\quad - u_j - h\Phi(t_j, u_j, f(t_j, u_j); h) \\ &= w_j + h[\Phi(t_j, y_j, f(t_j, y_j); h) - \Phi(t_j, u_j, f(t_j, u_j); k)] \end{aligned}$$

Sumar sobre $j = 0, \dots, n-1$
$$w_n = w_0 + \sum_{j=0}^{n-1} h\tau_{j+1}(h) + h\sum_{j=0}^{n-1}(\Phi(t_j, y_j, f(t_j, y_j); h) - \Phi(t_j, u_j, f(t_j, u_j); h))$$

Tomamos el valor absoluto en ambos lados y aplicamos la desigualdad triangular
$$|w_n| \leq |w_0| + h\sum_{j=0}^{n-1} |\tau_{j+1}(h)| + h\sum_{j=0}^{n-1} |\Phi(t_j, y_j, f(t_j, y_j); h) - \Phi(t_j, u_j, f(t_j, u_j); h)|$$

Usando la Lipschitz continuidad de Φ tenemos que
$$|w_n| \leq |w_0| + h\sum_{j=0}^{n-1} |\tau_{j+1}(h)| + h\Lambda \sum_{j=0}^{n-1} |w_j|, \qquad 1 \leq n \leq N_h$$

Acotando $\tau(h) = \max_j |\tau_{j+1}(h)|$
$$|w_n| \leq |w_0| + h\sum_{j=0}^{n-1} \tau(h) + \sum_{j=0}^{n-1} h\Lambda |w_j|$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall
$$|w_n| \leq \left(|w_0| + hn\tau(h)\right) e^{hn\Lambda}$$

No todo método consistente es convergente

Martes 15 de febrero de 2022.

Estabilidad absoluta.

Estabilidad sobre intervalos no acotados

↳ $I = [t_0, T] \to$ Partición de N_h subintervalos

Los intervalos $N_h \to \infty$ a medida que $h \to 0$

¿Qué pasa si integramos sobre un intervalo muy grande $T \to +\infty$?

En este caso, incluso si h está fijo, $N_h \to +\infty$

$$|y_n - u_n| \leq \frac{e^{L(t_n - t_0)} - 1}{L} \frac{M}{2} h \leq +\infty$$ ¡la cota se vuelve trivial!

Por ejemplo, analicemos el método de Euler explícito sobre un intervalo muy grande.
Para esto, utilizaremos el siguiente problema modelo

$$(1).\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) & t \in (0, +\infty) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}^-$

El problema (1) tiene una solución exacta $y(t) = e^{\lambda t}$. Sabemos que $y(t) \to 0$ a medida que $t \to +\infty$

Por lo tanto, aplicando el método de Euler explícito al problema (1), tenemos

$$u_1 = u_0 + hf(t_0, u_0) = u_0 + h\lambda u_0$$
$$u_1 = (1 + h\lambda) u_0$$
$$u_2 = u_1 + hf(t_1, u_1) = (1 + h\lambda)(u_1) = (1 + h\lambda)^2 u_0 = (1 + h\lambda)^2$$

$$(2) \qquad u_{n+1} = (1 + \lambda h)^{n+1}$$

Para que (2) $\to 0$, e.d. $(1 + \lambda h)^n = u_n \to 0$, con $n \to +\infty$, se debe cumplir que

$$|1 + h\lambda| < 1$$
$$-1 < 1 + h\lambda < 1$$
$$-2 < h\lambda < 0$$
$$\Rightarrow \quad h < 2/|\lambda| \quad \text{garantiza que } u_n \to 0$$

En otro caso, si $h \geq 2/|\lambda|$ sabemos que $u_n \to +\infty$.

Métodos condicionalmente, absolutamente estables

Una conclusión similar se puede obtener si $\lambda \in \mathbb{C}$ con parte real negativa de t.

Ahora, si tomamos otros métodos:

Euler implícito.

$$u_{n+1} = u_n + h\lambda u_{n+1}$$
$$u_1 = u_0 + h\lambda u_1$$
$$u_1 = \left(\frac{1}{1 - h\lambda}\right), \qquad n \geq 0$$

Recordando que $h > 0$; así $|1 - h\lambda| > 1$, por lo tanto, como $h > 0$ y $\lambda < 0$, entonces $u_n \to 0$ siempre

Métodos incondicionalmente absolutamente estables

Crank - Nicholson

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f_n + f_{n+1}]$$

$$u_{n+1} = \left[\left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right)\left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right)\right]^{n+1}$$

incondicionalmente estable

Región de estabilidad absoluta.

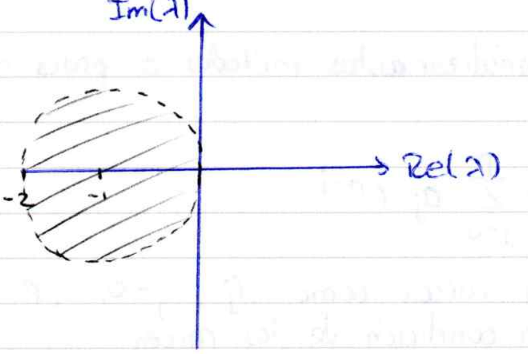
Tomemos el problema (1) con $\lambda \in \mathbb{C}$ con parte real negativa.

Sabemos la solución $y(t) = e^{\lambda t}$ tiende a 0, $t \to +\infty$.

Llamaremos como la REGIÓN DE ESTABILIDAD ABSOLUTA $\mathcal{A}$ de un método numérico al conjunto de números complejos $z = h\lambda$ para los cuales el método es absolutamente (convergente) estable.

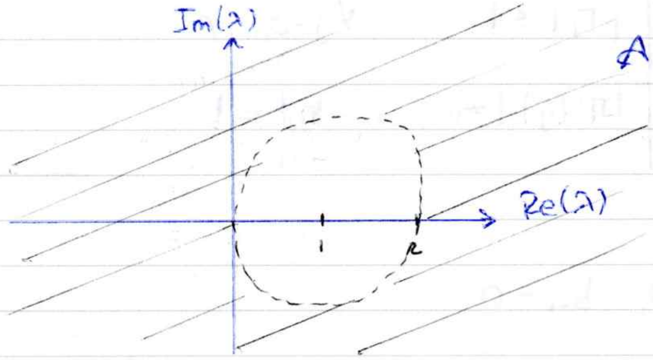
Euler explícito

Su $\mathcal{A}$ está dado por todos los $h\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|1 + \lambda h| < 1$

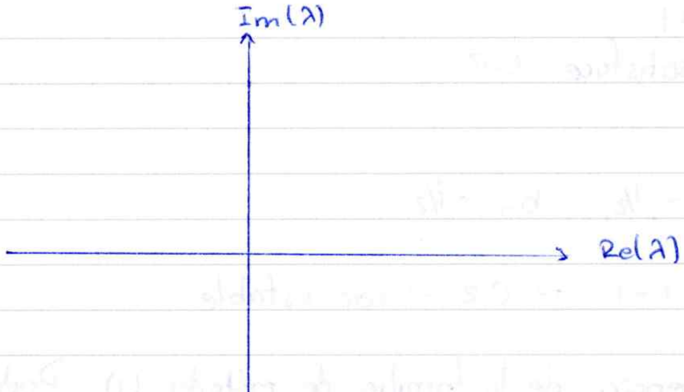


Euler implícito.

Su $\mathcal{A}$ está dado por



→ Crank- Nicholson



Lunes, 21 de febrero de 2022.

Pasos múltiples

¿Cómo obtener un mayor orden de convergencia?

Métodos a pasos múltiples

Los métodos para resolver el problema de Cauchy de pasos múltiples se pueden escribir como la siguiente familia.

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j u_{n-j} + h \sum_{j=0}^{p} b_j f_{n-j} + h b_{-1} f_{n+1}, \qquad n = p, p+1, p+2, \dots \quad (1)$$

donde $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ son constantes que definen al método, $p \geq 0$ y $p+1$ denota el número de pasos.

- $p = 0$

$$u_{n+1} = a_0 u_n + h b_0 f_n + b_{-1} h f_{n+1}$$

$a_0 = 1,\ b_0 = 1,\ b_{-1} = 0$ EULER EPLICITO

$p = 1$

$$u_{n+1} = a_0 u_n + a_1 u_{n-1} + h\left(b_0 f_n + b_1 f_{n-1}\right) + h b_{-1} f_{n+1}$$

$u_0 = y_0$

$u_1 = ¿?$ Usar métodos a un paso

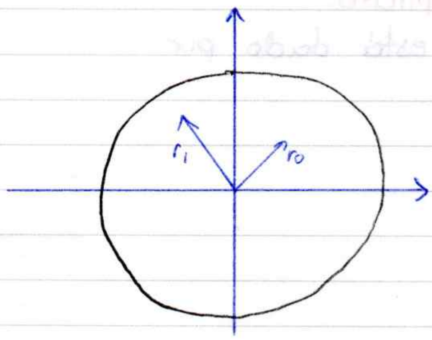
$u_k = a_0 u_1 + a_1 u_0$

Ahora, una herramienta para analizar estos métodos a pasos múltiplos es el PRIMER POLINOMIO CARACTERISTICO del método.

$$\pi(r) = r^{p+1} - \sum_{j=0}^{p} a_j r^{p-j} \tag{2}$$

de donde, notaremos a sus raíces como r_j, $j = 0, \ldots, p$. Decimos que (1) es cero estable si se satisface la condición de las raíces

$$\begin{cases} |r_j| \le 1 & \forall j = 0, \ldots, p \\ |\pi'(r_j)| \ne 0 & \text{si } |r_j| = 1 \end{cases}$$



Euler explícito

$p = 0,\quad a_0 = 1,\quad b_0 = 0,\quad b_{-1} = 0$

$\pi(r) = r + a_0 = r + 1$

$r_j = -1 \Leftarrow$ satisface C.R.

Crank-Nich

$p = 0,\ a_0 = 1\ \ b_0 = 1/2,\ \ b_{-1} = 1/2$

$\pi(r) = r + a_0 = r + 1 \Rightarrow$ C.R. $\to$ cero estable

Con respecto a la consistencia de la familia de métodos (1). Podemos calcular el error local de truncación para (1), como

$$\tau_n(h) = \frac{1}{h}\left(y_{n+1} - \sum_{j=0}^{p} a_j y_{n-j} - h \sum_{j=0}^{p} b_j f(t_{n-j}, y_{n-j}) - h b_{-1} f(t_{n+1}, y_{n+1}) \right) \tag{3}$$

Decimos que el método es consistente si $\tau(h) = \max_n |\tau_n(h)| = O(h)$

Teorema. El método (1) es consistente si satisface las siguientes condiciones algebraicas

$$\sum_{j=0}^{p} a_j = 1, \qquad -\sum_{j=0}^{p} j a_j + \sum_{j=-1}^{p} b_j = 1$$

Demostración

Expandiendo en series de Taylor y y f, para algún $n \ge p$

$y_{n-j} = y_n - jh y_n' + O(h^2)$ $\qquad f_{n-j} = f_n + O(h)$

Reemplazando estos valores en el esquema a pasos múltiples, tenemos

$$y_{n+1} - \sum_{j=0}^{p} a_j y_{n-j} - h \sum_{j=-1}^{p} b_j f_{n-j} \qquad y_n' = f_n$$

$$= y_{n+1} - \sum_{j=0}^{p} a_j y_n + h \sum_{j=0}^{p} j a_j y_n' - \sum_{j=0}^{p} a_j O(h^2) - h \sum_{j=-1}^{p} b_j f_n + \sum_{j=-1}^{p} b_j O(h)$$

$$= y_{n+1} - \sum_{j=0}^{p} a_j y_n - h y_n' \left(- \sum_{j=0}^{p} j a_j + \sum_{j=-1}^{p} b_j \right) - O(h^2) \left(\sum_{j=0}^{p} a_j - \sum_{j=-1}^{p} b_j \right)$$

Por (3), tenemos que

$$h\, \tau_n(h) = y_{n+1} - \sum_{j=0}^{p} a_j y_n - h y_n' \left(- \sum_{j=0}^{p} j a_j + \sum_{j=-1}^{p} b_j \right) - O(h^2) \left(\sum_{j=0}^{p} a_j - \sum_{j=-1}^{p} b_j \right)$$

Dividiendo para h

$$\tau_n(h) = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + \frac{y_n}{h} \boxed{\left(1 - \sum_{j=0}^{p} a_j \right)} + y' \boxed{\left(\sum_{j=0}^{p} j a_j - \sum_{j=-1}^{p} b_j \right)} - O(h) \left(\sum_{j=0}^{p} a_j - \sum_{j=-1}^{p} b_j \right)$$

Para todo n, $(y_{n+1} - y_n)/h \to y_n'$ cuando $h \to 0$, por tanto, el método sería consistente, solo si se cumplen las condiciones algebráicas.

Estabilidad absoluta

-> Tomando en cuenta el segundo polinomio caracteristico de (1)

$$\sigma(r) = b_{-1} r^{p+1} + \sum_{j=0}^{p} b_j r^{p-j}$$

A las raices de este segundo polinomio característico las notaremos $r_j(h\lambda)$

-> Condición absoluta de las raices

Un método de la familia (1) satisface la condición absoluta de las raices si existe $h_0 > 0$ tal que

$$|r_j(h\lambda)| < 1 \,, \quad j = 0, \dots, p. \quad \forall h > h_0 \qquad (4)$$

Ejemplos

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \longrightarrow \quad y = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(v, y(v))\, dv$$

Existen dos familias de métodos a pasos múltiples

-> Tipo Adams-Bashford -> Tipo - Adam - Multon

• AB3: Sabemos que $p=2$, orden de convergencia $= 3$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12} \left(23 f_n - 16 f_{n-1} + 5 f_{n-2} \right) \qquad (6)$$

Que se obtiene al reemplazar f en (5) por su interpolante polinomial de grado 2 en los nodos t_{n-2}, t_{n-1}, t_n

AM4: Sabemos que $p=2$, orden de convergencia $= 4$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{24} \left(9 f_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2} \right)$$

Que se obtiene al reemplazar f en (5) por su interpolante polinomial de grado 3 en los nodos $t_{n-2}, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}$

Backward - Diference Formula

BDF 2

$$u_{n+1} = \frac{4}{3} u_n - \frac{1}{3} u_{n-1} + \frac{2}{3} h f_{n+1}$$

BDF 3

$$u_{n+1} = \frac{18}{11} u_n - \frac{9}{11} u_{n-1} + \frac{2}{11} u_{n-2} + \frac{6h}{11} f_{n+1}$$

Ejemplo: AB3

- ¿Es consistente? ¿Es cero estable?

$$\pi(r) = r^3 + a_0 r^2 + a_1 r' + a_2$$
$$= r^3 + r^2 = r^2(r+1)$$

$$\left.\begin{array}{l} r_0 = r_1 = 0 \\ r_2 = -1 \end{array}\right\} \text{ cumple las C.R.} \to \text{SI} \Rightarrow \text{Es cero estable}$$

$$\sum_{j=0}^{p} a_j = a_0 + a_1 + a_2 = 1$$

por ser método explícito

$$-\sum_{j=0}^{p} j a_j + \sum_{j=-1}^{p} b_j = -(0a_0 + a_1 + 2a_2) + \cancel{b_{-1}}^{\,0} + b_0 + b_1 + b_2$$

$$= b_0 + b_1 + b_2 = \frac{23}{12} - \frac{16}{12} + \frac{5}{12} = 1.$$

Martes 22 de febrero de 2022

Runge - Kutta.

-> Métodos a un paso pero con un alto orden de convergencia

-> Toman algunas evaluaciones de $f(t,y)$ en cada intervalo $[t_n, t_{n+1}]$

Un método Runge-Kutta se puede escribir de la siguiente manera

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \qquad n \geq 0$$

donde

$$k_i = f(t_n + c_i h, u_n + h \textstyle\sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j) \qquad i = 1, 2, \dots$$

Con s el número de ETAPAS del método.

Los coeficientes $\{a_{ij}\}, \{b_i\}, \{c_i\}$ definen al método

-> Se especifican utilizando un Butcher array

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

donde $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{s \times s}$, $b = (b_1, \dots, b_s)^T$, $c = (c_1, \dots, c_s)^T \in \mathbb{R}^s$

El método Runge-Kutta más conocido es el RK4

$$(2) \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

donde

$$k_1 = f(t_n, u_n) = f_n$$
$$k_2 = f(t_n + h/2, u_n + h/2\, k_1)$$
$$k_3 = f(t_n + h/2, u_n + h/2\, k_2)$$
$$k_4 = f(t_n + h, u_n + h k_3)$$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

→ Método explícito de cuarto orden respecto en h.

- RK de dos etapas

$$\begin{array}{c|cc} \frac{3-\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{3-2\sqrt{3}}{12} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{6} & \frac{3+2\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

4^{to} orden respecto a h.

- RK3 (Mejora al método de Euler implícito.

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Métodos predictor-corrector.

→ Recordando como resolvemos los métodos implícitos

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1})$$ → resolver el sistema no lineal

IDEA:
No resolver el sistema no lineal y en su lugar realizar una iteración de punto fijo en cada paso

Crank-Nicolson:

$$u_{n+1}^{(k)} = u_n + \frac{h}{2}\left(f_n + f(t_{n+1}, u_{n+1}^{(k)})\right), \quad n \geq 1.$$

Resulta que si escogemos $u_{n+1}^{(0)}$ de manera apropiada, solo necesitamos una sola iteración, e.d. $u_{n+1}^{(1)}$
[*]

(Si tomamos $u_{n+1}^{(0)}$ con método explícito de orden p)
→ Si el método global tiene orden p. $u_{n+1}^{(0)}$ con un método explícito de orden $p-1$ entonces, se satisface [*]

Por ejemplo, podemos usar Euler explícito para inicializar el método de Crank-Nicholson

$$(3) \begin{cases} u_{n+1}^{*} = u_n + h f_n & \leftarrow \text{Predicción} \\ u_{n+1} = u_n + h/2\left[f_n + f(t_{n+1}, u_{n+1}^{*})\right] & \leftarrow \text{corrección} \end{cases}$$

Sistemas de EDOs

Consideremos el siguiente sistema de EDO's de primer orden

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \dots, y_m) \\ y_2' = f_2(t, y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ y_m' = f_m(t, y_1, \dots y_m) \end{cases} \quad (1)$$

Donde su solución es $y_1(t), \dots, y_m(t)$ con $t \in (t_0, T]$ con las siguientes condiciones iniciales

$$y_1(t_0) = y_{0,1}, \quad y_2(t_0) = y_{0,2}, \dots, \quad y_m(t_0) = y_{0,m}$$

Puedo aproximar la solución $u_1, \dots, u_m$ por separado

Euler explícito
$$\begin{cases} u_{n+1,1} = u_{n,1} + h f_1(t_n, u_{n+1}, \dots, u_{n,m}) \\ u_{n+1,2} = u_{n,2} + h f_2(t_n, u_{n,1}, \dots, u_{nm}) \\ \vdots \\ u_{n+1,m} = u_{n,m} + h f(t_n, u_{n,1}, \dots, u_{n,m}) \end{cases}$$

El sistema (1) se puede escribir como $Y'(t) = F(t, Y(t))$

$$u_{n+1} = u_n + h(\vartheta F(t_{n+1}, u_{n+1}) + (1-\vartheta) F(t_n, u_n)), \; n \geq 0$$

→ Propiedades de consistencia, cero-estabilidad y convergencia se heredan para los sistemas de EDOs

Ahora, consideremos el caso EDO de orden m

$$y^{(m)}(t) = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}) \quad (2)$$

para $t \in (t_0, T]$, con condiciones iniciales de la forma

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \dots, \quad y^{(m-1)}(t_0) = y_{m-1}$$

Si tomamos $w_1(t) = y(t)$, $w_2(t) = y'(t)$, … $w_m(t) = y^{(m-1)}(t)$
Entonces podemos reescribir (2) como un sistema de ecuaciones de primer orden

$$(3) \begin{cases} w_1' = w_2 \\ w_2' = w_3 \\ \vdots \\ w_{m-1}' = w_m \\ w_m' = f(t, w_1, w_2, \dots, w_m) \end{cases}$$

Con condiciones iniciales

$$w_1(t_0) = y_0, \quad w_2(t_0) = t_0, \dots, \quad w_m(t_0) = y_{m-1}$$

Otra forma para sistemas de orden 2.

$$(4)\quad \begin{cases} y''(t) = f(t, y, y') & t \in [t_0, T] \\ y(t_0) = \alpha_0 \quad y'(t_0) = \beta_0 \end{cases}$$

Podemos aproximarlo usando un método numérico (esquema)

Encontrar u_n para $1 \le n \le N_h$ tal que

$$y''(t_n) = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} = f(t_n, u_n, v_n) \quad \forall n \geq 1 \qquad (5)$$

Con $u_0 = \alpha_0$, $v_0 = \beta_0$ y v_n representa una aproximación de la primera derivada

$$v_n = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} \quad \text{con } v_0 = \beta_0 \qquad (6)$$

(5) y (6) es el método LEAP-FROG orden 2

Viernes 4 de marzo de 2022.

Ejercicio 1 Dado el siguiente problema Cauchy

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{t^2 + y^2} \qquad \forall t \in [-1, 1]$$

¿Existe una solución única a este problema?

Solución

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = \left|\sqrt{t^2+y_1^2} - \sqrt{t^2+y_2^2}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{t^2+y_1^2} - \sqrt{t^2+y_2^2}\right)\left(\sqrt{t^2+y_1^2} + \sqrt{t^2+y_2^2}\right)}{\sqrt{t^2+y_1^2} + \sqrt{t^2+y_2^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{t^2 + y_1^2 - t^2 - y_2^2}{\sqrt{t^2+y_1^2} + \sqrt{t^2+y_2^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{\sqrt{t^2+y_1^2} + \sqrt{t^2+y_2^2}}\right| = \frac{|y_1+y_2|\,|y_1-y_2|}{\sqrt{t^2+y_1^2} + \sqrt{t^2+y_2^2}}$$

$$\leq \frac{(|y_1| + |y_2|)\,|y_1 - y_2|}{\sqrt{t^2+y_1^2} + \sqrt{t^2+y_2^2}} \leq |y_1 - y_2|$$

Ejercicio 2 Considere el siguiente problema PVI

$$\begin{cases} y''(t) = y(t) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad p'(t) = \lambda y(t) = -y(t)$$

Solución

Sea $y'(t) = p(t)$, entonces

$$\begin{cases} p'(t) = y(t) \\ y'(t) = p(t) \end{cases}$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ p(0) = y_1 \end{cases}$$

Aplicando el método de euler al sistema

$$y_{k+1} = y_k + h\,p_k \qquad p_{k+1} = p_k + h\,y_k$$

y de forma matricial

$$\begin{bmatrix} y_{k+1} \\ p_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ p_k \end{bmatrix}$$

(Problema modelo)

↳ Iterando el problema

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ h & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 + h y_1 \\ y_1 + h y_0 \end{bmatrix}$$

Tomamos $y_1 = -y_0$

$$= \begin{bmatrix} y_0 - h y_0 \\ -y_0 + h y_0 \end{bmatrix} = (1-h)\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ p_2 \end{bmatrix} = (1-h)^2 \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} y_k \\ p_k \end{bmatrix} = (1-h)^k \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} \to |1-h| < 1$$

$$\leftrightarrow -1 < 1-h < 1$$

$$\to 1 > -1+h > -1$$

$$2 > h > 0.$$

Ejercicio 3. Derive un método Adam-Bashford con paso variable

$$y_{k+1} = y_k + h_k A_k f(t_k, y_k) + h_k B_k f(t_{k+1}, y_{k-1})$$

donde $t_{k+1} = t_k + h_k$, $h_k = \alpha_k h_{k-1}$ usado para aproximar la solución del problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Considerando α_k y h_0 dados, encuentre una expresión para A_k y B_k

Sugerencia: Usar una aproximación lineal de $y'(t)$

Solución

$$y'(t) \approx p(t) = \frac{f(t_k, y_k)(t - t_{k-1}) - f(t_{k-1}, y_{k-1})(t - t_k)}{h_{k-1}}$$

$$y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y)\,dt = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)\,dt$$

$$\approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(t)\,dt$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{h_{k-1}} \int_{t_k}^{t_{k-1}} f(t_k, y_k)(t - t_{k-1})\,dt - \frac{1}{h_{k-1}} \int_{t_k}^{t_{k-1}} f(t_{k-1}, y_{k-1})(t - t_k)\,dt$$

$$= y_k + \underbrace{\frac{f(t_k, y_k)}{h_{k-1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} t - t_{k-1}\,dt}_{h_k A_k} - \underbrace{\frac{f(t_{k-1}, y_{k-1})}{h_{k-1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t - t_k)\,dt}_{h_k B_k}$$

$$A_k = \frac{1}{h_k h_{k-1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} t - t_{k-1}\,dt = \frac{1}{h_k h_{k-1}} \int_{h_{k-1}}^{h_k + h_{k-1}} t\,dt = \frac{(h_k + h_{k-1})^2 - h_{k-1}^2}{2 h_k h_{k-1}} = 1 + \frac{\alpha_k}{2}$$

$$B_k = \frac{1}{h_k h_{k-1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t - t_k)\,dt = \frac{1}{h_k h_{k-1}} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} t - \int_{t_k}^{t_{k+1}} t_k\,dt \right) = -\frac{\alpha_k}{2}$$