Escuela de Ciencias Físicas y Matemática

Estructuras Discretas II • Ejercicios No. 1

Semestre 2022-1 — Mat. Andrés Merino

1. Fundamentos de combinatoria

Ejercicio 1. Se quiere etiquetar las butacas de un auditorio con una letra y un número entero positivo menor o igual que 100. ¿Cuál es el máximo número de butacas a las que se puede asignar una etiqueta diferente?

Solución. Consideremos:

- n_1: la cantidad de letras (27);
- n_2: la cantidad de números (100);
- n: la cantidad de butacas que se pueden asignar.

Como para asignar una butaca debo seleccionar una letra y un número de manera independiente, entonces puedo usar el principio de multiplicación:

$$n = n_1 \cdot n_2 = 27 \cdot 100 = 2\,700.$$

Por lo tanto, la cantidad de butacas que se puede asignar es de 2 700. □

Ejercicio 2. En una sala hay 32 ordenadores. Cada ordenador tiene 24 puertos. ¿Cuántos puertos diferentes hay en la sala?

Solución. Definamos

- a: la cantidad de ordenadores (32);
- b: la cantidad de puertos de cada ordenador (24);
- c: la cantidad de puertos diferentes en la sala.

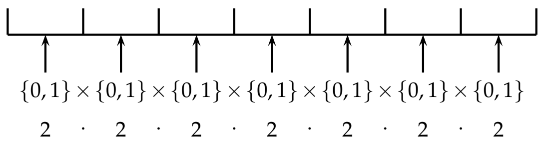
Como cada computadora tiene la misma cantidad de puertos, para contar la cantidad de puertos de la sala, basta tomar una computadora y luego un puerto, que son independientes, entonces puedo aplicar el principio de multiplicación:

$$c = a \cdot b = 32 \cdot 24 = 768.$$

De aquí, el número de puertos en la sala es de 768. □

EJERCICIO 3. ¿Cuántas cadenas de bits diferentes hay con longitud 7?

Bosquejo de solución. Consideremos el siguiente gráfico que ilustra la situación: Podemos ver la cadena de bits como 7 casillas donde se pueden colocar un 0 o un 1:



Así, por el principio de multiplicación, tenemos que el número de manera de rellenar estas casillas es

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 = 128.$$

Por lo tanto, existen 128 cadenas de bits diferentes con longitud 7. □

EJERCICIO 4. ¿Cuántas funciones se pueden definir de un conjunto de m elementos a uno conjunto de n elementos?

EJERCICIO 5. ¿Cuántas funciones inyectivas se pueden definir desde un conjunto de m elementos en otro conjunto de n elementos?

EJERCICIO 6. Supongamos que para elegir un representante de la Facultad de Matemáticas en una comisión universitaria se puede escoger bien un profesor o bien un estudiante de doctorado. ¿De cuántas formas se puede escoger el representante si hay 37 profesores y 83 estudiantes de doctorado en dicha Facultad?

EJERCICIO 7. Cada usuario de un ordenador tiene una contraseña con una longitud de entre seis y ocho caracteres, cada uno de los cuales es bien un dígito o bien una letra mayúscula. Cada contraseña debe contener al menos un dígito. ¿Cuántas contraseñas distintas admite el sistema?

Solución. Consideremos:

- C_6: las cadenas de caracteres con 6 caracteres;
- C_7: las cadenas de caracteres con 7 caracteres;
- C_8: las cadenas de caracteres con 8 caracteres;

- C: todas las cadenas de entre 6 y 8 caracteres.

Notemos que
$$C = C_6 \cup C_7 \cup C_8,$$
como estos conjuntos son disjuntos, por el principio de la unión
$$|C| = |C_6| + |C_7| + |C_8|.$$
Calculemos $|C_6|$, como en cada posición puedo colocar cualquier letra o dígito, por el principio de multiplicación
$$|C_6| = 37 \cdot 37 \cdot 37 \cdot 37 \cdot 37 \cdot 37 = 37^6.$$
De igual forma para $|C_6|$ y $|C_7|$; así,
$$|C_7| = 37^7 \qquad \text{y} \qquad |C_8| = 37^8.$$
Con esto,
$$|C| = 37^6 + 37^7 + 37^8 = 3'\,609\,977'\,057\,463.$$
Ahora, notemos que las contraseñas inválidas, van a estar solo formadas por letras, de 6, 7 y 8 caracteres.

- I_6: contraseñas inválidas de 6 caracteres;
- I_7: contraseñas inválidas de 7 caracteres;
- I_8: contraseñas inválidas de 8 caracteres;
- I: contraseñas inválidas.

Entonces, usando el principio de la unión y multiplicación, de manera similar a lo anterior:
$$\begin{aligned} |I| &= |I_6 \cup I_7 \cup I_7| \\ &= |I_6| + |I_7| + |I_8| \\ &= 27^6 + 26^7 + 26^8 \\ &= 293\,277'\,310\,173. \end{aligned}$$
Con esto, el conjunto de contraseñas válidas es:
$$\begin{aligned} |C \setminus I| &= |C| - |I| \\ &= 3'609\,977'057\,463 - 293\,277'\,310\,173 \end{aligned}$$

$$= 3'\,316\,699'\,747\,290$$

Así, la cantidad de contraseñas válidas es de $3'\,316\,699'\,747\,290$. □

EJERCICIO 8. ¿Cuántas cadenas de cinco caracteres ASCII contienen el carácter @ al menos una vez? (Hay 128 caracteres ASCII).

EJERCICIO 9. El nombre de una variable en el lenguaje C es una cadena que puede contener letras mayúsculas y minúsculas, dígitos y guiones bajos. Además, el primer carácter de la cadena debe ser una letra (mayúscula o minúscula) o un guion bajo. Si el nombre de la variable está determinado por los ocho primeros caracteres, ¿cuántos nombres distintos de variables admite el lenguaje C? (Ten en cuenta que el nombre de una variable puede tener menos de ocho caracteres).

EJERCICIO 10. ¿Cuántas cadenas de diez bits comienzan con 000 o bien terminan con 00?

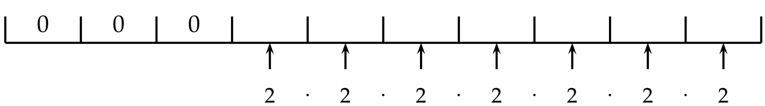
Solución. Consideremos los siguientes conjuntos:

- A: conjunto de cadenas de 10 bits que comienzan en 000 o terminan con 00;
- $A1$: conjunto de cadenas de 10 bits que comienzan con 000;
- $A2$: conjunto de cadenas de 10 bits que terminan con 00.

Con esto, utilizando el principio de inclusión-exclusión:

$$|A| = |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

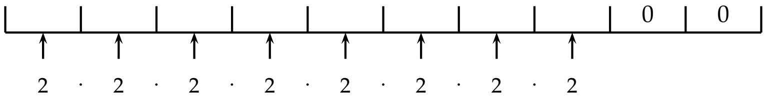
- **Para $|A_1|$:** consideremos el siguiente gráfico que ilustra la situación:



  Así, utilizando el principio de multiplicación

$$|A_1| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7.$$

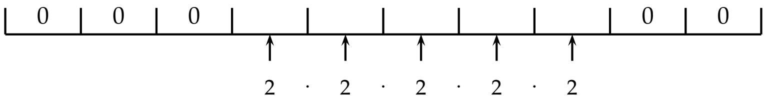
- **Para $|A_2|$:** consideremos el siguiente gráfico que ilustra la situación:



Así, utilizando el principio de multiplicación

$$|A_2| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8.$$

- **Para** $|A_1 \cap A_2|$**:** consideremos el siguiente gráfico que ilustra la situación:



Así, utilizando el principio de multiplicación

$$|A_1 \cap A_2| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5.$$

Por lo tanto,

$$|A| = 2^7 + 2^8 - 2^5 = 352.$$

Así, la cantidad de cadenas que cumple lo solicitado es 352. □

EJERCICIO 11. ¿Cuántas cadenas de diez bits contienen bien la cadena 00000 o bien la cadena 11111?

2. PRINCIPIO DEL PALOMAR

EJERCICIO 12. ¿Cuántos estudiantes debe haber en una clase para garantizar que al menos dos estudiantes reciben la misma nota en el examen, suponiendo que el examen se califica en una escala de 0 a 100 puntos?

EJERCICIO 13. ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que debe haber en una clase para estar seguro de que al menos seis reciben la misma calificación, si las calificaciones posibles son Suspenso, Aprobado, Notable, Sobresaliente y Matrícula de Honor?

Solución. Consideremos:

- N: es el número de estudiantes (desconocido);

- k: es el número de calificaciones (5).

Por el principio del palomar generalizado

$$\left\lceil \frac{N}{5} \right\rceil = 6.$$

Como estoy buscando el número mínimo, puedo omitir la función techo y tenemos

$$\begin{aligned} \frac{N-1}{5} = 6 - 1 &\iff N - 1 = 25 \\ &\iff N = 26. \end{aligned}$$

Es decir, necesitamos 26 estudiantes para asegurar que 6 obtienen la misma calificación. □

Ejercicio 14. ¿Cuántas cartas se deben sacar de una baraja de 52 para garantizar que al menos tres son del mismo palo?

Ejercicio 15. Supongamos que un laboratorio de informática tiene 15 estaciones de trabajo y 10 servidores. Una estación de trabajo se puede conectar a un servidor mediante un cable. Solo una de las conexiones de cada servidor puede estar activa en cada momento. Queremos garantizar que, en tocio momento. cualquier conjunto de diez o menos estaciones de trabajo están conectadas di reciamente a algún servidor. Aunque esto se puede conseguir conectando todas las estaciones de trabajo a tocios los servidores (con 150 cables), se pide determinar el mínimo número de conexiones necesarias para asegurar este objetivo.

Ejercicio 16. Una red de ordenadores está formada por seis equipos. Cada ordenador está conectado directamente al menos a otro. Demuestra que hay al menos dos ordenadores en la red que tienen el mismo número de conexiones.

Solución. Agrupemos los ordenadores por el número de conexiones que tienen con otro. Así, consideremos:

- N: el número de ordenadores (6);
- k: el número de grupos (1 conexión, 2 conexiones, 3 conexiones, 4 conexiones, 5 conexiones) (5).

Por el principio del palomar, al menos un grupo tiene

$$\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil = \left\lceil \frac{6}{5} \right\rceil = \lceil 1{,}2 \rceil = 2$$

ordenadores. Es decir, existe por lo menos 2 ordenadores con el mismo número de conexiones. $\square$

1. Fundamentos de combinatoria

Ejercicio 1. ¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEF existen? ¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEF contienen la subcadena DEF?

Solución. Consideremos

$$\mathscr{C} = \{A, B, C, D, E, F\},$$

como $|\mathscr{C}| = 6$, la cantidad de permutaciones es de

$$6! = 720.$$

Para la segunda pregunta, consideremos

$$\mathscr{B} = \{A, B, C, DEF\},$$

como $|\mathscr{C}| = 4$, entonces la cantidad de permutaciones es igual a

$$4! = 24.$$

□

Ejercicio 2. ¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEF contienen a las letras DEF juntas en cualquier orden?

Solución. Tenemos dos procesos

a) Permutar las 3 letras DEF, consideremos el conjunto

$$\mathscr{C} = \{D, E, F\},$$

como $|\mathscr{C}| = 3$, la cantidad de permutaciones es

$$3! = 6.$$

b) Agregar las otras letras, consideremos el conjunto

$$\mathscr{B} = \{A, B, C, DEF\}$$

como $|\mathscr{B}| = 4$, la cantidad de permutaciones es

$$4! = 24.$$

Así, por el principio de multiplicación, existen

$$6 \cdot 24 = 144$$

permutaciones donde las letras DEF están juntas pero en cualquier orden. □

> **Ejercicio 3.** ¿De cuántas maneras se pueden sentar seis personas alrededor de una mesa circular?

> **Ejercicio 4.** ¿De cuántas maneras se puede seleccionar el presidente, vicepresidente, secretario y tesorero de un grupo de 10 personas?

Solución. Tenemos un conjunto de 10 personas, de las cuales debemos a tomar de 4 en 4, por lo tanto, la cantidad de maneras que existe es:

$$P(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040.$$ □

> **Ejercicio 5.** ¿De cuántas maneras pueden hacer cola siete marcianos y cinco venusinos si dos venusinos no se paran juntos?

> **Ejercicio 6.** ¿Cuántas cadenas de ocho bits contienen exactamente cuatro unos?

Solución. De las 8 posiciones para los bits, en cuatro de ellos se deben colocas los números 1 y el resto se los rellena con 0. Es decir, de las 8 posiciones, se deben seleccionar 4 para colocar los números 1, dado que el orden de las posiciones no es relevante, el número de cadenas de ocho bits que contienen exactamente cuatro unos es:

$$C(8,4) = \frac{8!}{(8-4)! \cdot 4!} = 70.$$ □

> **Ejercicio 7.** ¿Cuántas manos de póquer contienen cartas todas del mismo palo?

Solución. Podemos hacer este proceso en dos pasos:

I. Seleccionar un palo: dado que son 4 palos, se tienen 4 formas diferentes de hacerlo.

II. Seleccionar cuatro cartas del palo seleccionado: Dado que existen 13 cartas del palo seleccionado y se deben seleccionar 5 y el orden no es relevante, existen

$$C(13,5) = \frac{13!}{(13-5)! \cdot 5!} = 1287$$

formas de seleccionarlos.

Con esto, por el principio de multiplicación, existen

$$4 \cdot 1287 = 5148$$

formas diferentes de tener una mano de póquer que contiene todas las cartas del mismo palo. □

EJERCICIO 8. ¿Cuántas manos de póquer contienen tres cartas de una denominación y dos de una segunda denominación?

1. FUNDAMENTOS DE COMBINATORIA

EJERCICIO 1. ¿Cuántas cadenas se pueden formar usando las siguientes letras? MISSISSIPPI

Solución. Tenemos:

1. 11 objetos (la cantidad de letras)
2. 4 tipos: 1 del primer tipo (la letra M), 4 del segundo tipo (la letra I), 4 del tercer tipo (la letra S) y 2 del cuarto tipo (la letra P).

Con esto, utilizando permutaciones generalizadas, existen

$$\frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot} = 34650$$

maneras diferentes de ordenar estas letras, es decir, existen 34 650 cadenas que se pueden formar con las letras de la palabra dada. □

EJERCICIO 2. ¿De cuántas maneras pueden dividirse 8 libros diferentes entre 3 estudiantes si Brenda obtiene 4 libros, y Samuel y Mariana 2 cada uno?

Solución. Podemos considerar que colocamos una etiqueta con el nombre de cada estudiante a cada libro, así obtenemos:

1. 8 objetos (los libros)
2. 3 tipos: 4 del primer tipo (libros de Brenda), 2 del segundo tipo (libros de Samuel) y 2 del tercer tipo (libros de Mariana).

Con esto, utilizando permutaciones generalizadas, existen

$$\frac{8!}{4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot} = 420$$

maneras diferentes de ordenar estos objetos, es decir, existen 420 formas de dividir los 8 libros. □

EJERCICIO 3. Considere 3 libros: de computación, física e historia. Suponga que la biblioteca tienen al menos 6 copias de cada uno. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 6 libros?

Solución.

□

EJERCICIO 4. Suponga que existen tres pilas de pelotas rojas, azules y verdes, y que cada pila contiene al menos 8 pelotas. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 8 pelotas? ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 8 pelotas si debe tenerse al menos una pelota de cada color?

Solución.

□

EJERCICIO 5. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse 12 libros idénticos de matemáticas entre los estudiantes Ana, Beatriz, Carmen y Daniel?

Solución.

□

EJERCICIO 6. ¿Cuántas soluciones en enteros no negativas hay para la ecuación

$$a + b + c + d = 29?$$

Solución. Podemos considerar el problema como un conjunto de 29 elementos, de los cuales se tomarán 4 grupos, por lo tanto, aplicando combinaciones generalizadas, existen

$$C(29 + 4 - 1, 4 - 1) = C(32, 3) = 4960$$

maneras de separar los 29 elementos en 4 grupos, por lo tanto, existen 4 960 soluciones en enteros no negativos para la ecuación. □

EJERCICIO 7. ¿Cuántas soluciones en enteros no negativas hay para la ecuación

$$a + b + c + d = 29$$

tales que $a > 0$, $b > 1$, $c > 2$?

Solución. Notemos que las restricciones se puede reescribir como:

$$a \geq 1, \qquad b \geq 2 \qquad \text{y} \qquad c \geq 3.$$

Con esto, consideremos el siguiente cambio de variable:

$$x = a - 1, \qquad y = b - 2 \qquad \text{y} \qquad z = c - 3,$$

así, nuestras condiciones se transforman en

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad z \geq 0$$

y la ecuación queda como:

$$(x+1) + (y+2) + (z+3) + d = 29.$$

O lo que es lo mismo,

$$x + y + z + d = 23$$

con x, y, z y d números naturales. Por lo tanto, podemos considerar el problema como un conjunto de 23 elementos, de los cuales se tomarán 4 grupos, por lo tanto, aplicando combinaciones generalizadas, existen

$$C(23 + 4 - 1, 4 - 1) = C(26, 3) = 2600$$

maneras de separar los 26 elementos en 4 grupos, por lo tanto, existen 2 600 soluciones para la ecuación. □

EJERCICIO 8. Un examen tiene 12 problemas. ¿De cuántas maneras se pueden asignar puntos (enteros) a los problemas si el total es 100 y cada problema vale por lo menos 5 puntos?

Solución 1. Si cada pregunta vale por lo menos 5 puntos, significa que 60 puntos ya están asignados, por lo tanto, resta asignar 40 puntos entre las 12 preguntas. Podemos considerar el problema como un conjunto de 40 elementos, de los cuales se tomarán 12 grupos, por lo tanto, aplicando combinaciones generalizadas, existen

$$C(40 + 12 - 1, 12 - 1) = C(51, 11) = 47626016970$$

maneras de separar los 40 elementos en 12 grupos, por lo tanto, existen 47 626 016 970 maneras de asignar los puntos. □

Solución 2. Consideremos:

- P_i: el puntaje asignado a la pregunta i, con $i \in \{1, 2, \ldots, 12\}$.

Nuestro problema se transforma en obtener el número de soluciones para la ecuación

$$P_1 + P_2 + \cdots + P_{12} = 100$$

con $P_i \geq 5$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, 12\}$. Como se vio en el anterior ejercicio, esto es análogo considerar un conjunto de $100 - 5 \cdot 12 = 40$ elementos de los cuales se tomarán 12 grupos. Aplicando combinaciones generalizadas, existen

$$C(40+12-1, 12-1) = C(51, 11) = 47626016970$$

maneras de separar los 40 elementos en 12 grupos, por lo tanto, existen 47 626 016 970 maneras de asignar los puntos. □

2. Relaciones de recurrencia

Ejercicio 9. Una persona invierte \$1 000 al 12 % de interés anual compuesto. Si A_n representa la cantidad al final de n años, encuentre una relación de recurrencia y las condiciones iniciales que definen la sucesión $(A_n)_{n\geq 0}$.

Solución.

□

Ejercicio 10. Sea S_n el número de cadenas de n bits que no contienen el patrón 111. Desarrolle la relación de recurrencia para S_1, S_2,... y las condiciones iniciales que definen la sucesión.

Solución.

□

Ejercicio 11. Derive una relación de recurrencia y una condición inicial para el número de maneras de dividir un polígono convexo de (n + 2) lados, $n \geq 1$, en triángulos dibujando $n - 1$líneas a través de los vértices que no se cruzan en el interior del polígono.

Solución.

□

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA

ESTRUCTURAS DISCRETAS II • EJERCICIOS NO. 4

Semestre 2022-1 | Mat. Andrés Merino

1. RELACIONES DE RECURRENCIA

EJERCICIO 1. Resolver la relación de recurrencia:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 7, \\
a_1 &= 16, \\
a_n &= 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \qquad n \geq 2.
\end{aligned}
$$

Solución. El polinomio que representa la relación es

$$t^2 = 5t - 6.$$

Resolviendo, las soluciones son

$$t = 3 \quad \vee \quad t = 2.$$

Entonces, obtenemos que la solución es, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot 2^n,$$

donde α y β son constantes a determinar. Para esto, utilizamos las condiciones iniciales:

$$
\begin{aligned}
7 = a_0 &= \alpha \cdot 3^0 + \beta \cdot 2^0, \\
16 = a_1 &= \alpha \cdot 3^1 + \beta \cdot 3^1.
\end{aligned}
$$

Así, tenemos el siguiente sistema

$$
\begin{cases}
\alpha + \ \beta = 7, \\
3\alpha + 2\beta = 16.
\end{cases}
$$

Resolviendo el sistema, obtenemos que $\alpha = 2$ y $\beta = 5$. Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = 2 \cdot 3^n + 5 \cdot 2^n.$$

□

EJERCICIO 2. Suponga que la población de venados del condado Rustic es 200 en el año 2019 y 220 en el año 2020, y que el incremento de venados de un año dado siempre es el doble del incremento del año anterior. Plantee una relación de recurrencia que represente el problema y resuélvala.

Solución. Consideremos que:

1. n : el número de años contados desde 2019, con $n \in \mathbb{N}$,
2. p_n : la población de venados en el año n.

Tenemos que la relación de recurrencia que describe el problema es

$$\begin{aligned} &p_0 = 200, \\ &p_1 = 220, \\ &p_{n-1} - p_n = 2(p_{n-2} - p_{n-1}), \qquad n \geq 2. \end{aligned}$$

Así, el polinomio que representa la relación es

$$t^2 = 3t - 2.$$

Resolviendo, las soluciones son

$$t = 1 \quad \vee \quad t = 2.$$

Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot 2^n,$$

donde α y β son constantes por determinar. Utilizando las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} 200 = p_0 = \alpha \cdot 1^0 + \beta \cdot 2^0, \\ 220 = p_1 = \alpha \cdot 1^1 + \beta \cdot 2^1. \end{aligned}$$

Con esto, tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 200, \\ \alpha + 2\beta = 220; \end{cases}$$

cuya solución es $\alpha = 180$ y $\beta = 20$. Por lo tanto, se tiene la solución: para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n = 180 \cdot 1^n + 20 \cdot 2^n = 180 + 20 \cdot 2^n.$$

□

EJERCICIO 3. Resolver la relación de recurrencia de la sucesión de Fibonacci.

Solución. Recordemos que la sucesión de Fibonacci está dada por

$$\begin{aligned} f_0 &= 1, \\ f_1 &= 1, \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, \qquad n \geq 2. \end{aligned}$$

Así, el polinomio que representa la relación es

$$t^2 = t^1 + 1.$$

Resolviendo, se sigue que

$$t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n = \alpha \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

donde α y β son constantes por determinar. Utilizando las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} 1 = f_0 &= \alpha \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \beta \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0, \\ 1 = f_1 &= \alpha \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \beta \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1. \end{aligned}$$

Con esto, tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\alpha + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\beta = 1; \end{cases}$$

cuya solución es $\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ y $\beta = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$. Por lo tanto, se tiene la solución: para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n. \qquad \square$$

EJERCICIO 4. Resolver la relación de recurrencia:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_1 &= 1, \\
a_n &= 4(a_{n-1} - a_{n-2}), \qquad n \geq 2.
\end{aligned}
$$

Solución. El polinomio que representa la relación es

$$t^2 = 4(t-1),$$

cuyas solución es

$$t = 2.$$

Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot n \cdot 2^n$$

donde α y β son constantes por determinar. Utilizando las condiciones iniciales

$$
\begin{aligned}
1 = a_0 &= \alpha \cdot 2^0 + \beta \cdot 0 \cdot 2^0, \\
1 = a_1 &= \alpha \cdot 2^1 + \beta \cdot 1 \cdot 2^1.
\end{aligned}
$$

Con esto, tenemos el siguiente sistema

$$
\begin{cases}
\alpha = 1, \\
2\alpha + 2\beta = 1;
\end{cases}
$$

y resolviendo, tenemos que $\alpha = 1$ y $\beta = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto, se tiene la solución: para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = 2^n - \frac{1}{2} \cdot n \cdot 2^n.$$

□

EJERCICIO 5. Resolver la relación de recurrencia:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 8, \\
a_1 &= \frac{1}{2\sqrt{2}}, \\
a_n &= \sqrt{\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}}, \qquad n \geq 2.
\end{aligned}
$$

Solución. Tomando logaritmos, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\log_2(a_0) &= \log_2 8 = 3, \\
\log_2(a_1) &= \log_2 \frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{3}{2}, \\
\log_2(a_n) &= \log_2 \left(\left(\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\log_2(a_{n-2}) - \log_2(a_{n-1}) \right), \qquad n \geq 2.
\end{aligned}
$$

Luego, tomando el cambio de variable

$$b_n = \log_2(a_n),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene la siguiente relación de recurrencia equivalente

$$
\begin{aligned}
b_0 &= 3, \\
b_1 &= -\frac{3}{2}, \\
b_n &= \frac{1}{2} \left(b_{n-2} - b_{n-1} \right), \qquad n \geq 2.
\end{aligned}
$$

Así, el polinomio que representa la relación es

$$t^2 = \frac{1}{2}(1 - t),$$

cuyas soluciones son

$$t = \frac{1}{2} \quad \vee \quad t = -1.$$

Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \alpha \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n + \beta \cdot (-1)^n.$$

Utilizando las condiciones iniciales

$$
\begin{aligned}
3 = b_0 &= \alpha \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^0 + \beta \cdot (-1)^0, \\
-\frac{3}{2} = b_1 &= \alpha \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^1 + \beta \cdot (-1)^1.
\end{aligned}
$$

Con esto, tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3, \\ \frac{1}{2}\alpha - \beta = -\frac{3}{2}; \end{cases}$$

cuya solución es $\alpha = 1$ y $\beta = 2$. Por lo tanto, la solución es, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \cdot (-1)^n = 2^{-n} + 2(-1)^n = 2(2^{-n-1} + (-1)^n).$$

y regresando a la variable original, tenemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = 2^{2(2^{-n-1}+(-1)^n)} = 4^{2^{-n-1}} \cdot 4^{(-1)^n}. \qquad \square$$

2. Aplicaciones al análisis de algoritmos

Ejercicio 6. Calcule el tiempo de ejecución en el peor de los casos de la implementación de ordenamiento por selección.

Solución. □

3. Funciones generatrices

Ejercicio 7. Determinar el número de soluciones de

$$a + b + c = 12,$$

donde a, b, c son enteros positivos tales que

$$2 \leq a \leq 5, \qquad 3 \leq b \leq 6 \qquad \text{y} \qquad 4 \leq c \leq 7.$$

Utilice las funciones generatrices.

Solución. Notemos que las funciones generatrices para cada variable son:

- Para a: $x^2 + x^3 + x^4 + x^5$.
- Para b: $x^3 + x^4 + x^5 + x^6$.
- Para c: $x^4 + x^5 + x^6 + x^7$.

Entonces, la función generatriz para la suma es

$$(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^4 + x^5 + x^6 + x^7),$$

que es igual a:

$$x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 10x^{12} + 12x^{13} + 12x^{14} + 10x^{15} + 6x^{16} + 3x^{17} + x^{18}.$$

Por lo tanto, el número de formas para que la suma sea 12 es el coeficiente de x^{12}, es decir, hay 10 soluciones de la ecuación. □

Ejercicio 8. Se cuenta con 10 galletas, ¿de cuántas formas se puede tomar 7 galletas?

Solución. Consideremos la función generadora de cada galleta

$$1x^0 + 1x^1 + 0x^2 + 0x^3 + \cdots = 1 + x.$$

Ahora, tenemos 10 galletas, su función generadora es

$$(1+x)(1+x)\cdots(1+x) = (1+x)^{10},$$

desarrollando

$$1 + 10x + 45x^2 + 120x^3 + 210x^4 + 252x^5 + 210x^6 + 120x^7 + 45x^8 + 10x^9 + x^{10}.$$

Como vamos a tomar 7 galletas, tomamos el coeficiente de x^7, es decir, hay 120 formas de tomar 7 galletas. □

EJERCICIO 9. De cuántas formas se pueden repartir ocho galletas idénticas entre tres niños, si cada niño recibe al menos dos galletas y no más de cuatro.

Solución. Notemos que la función generadora de cada niño es

$$1x^2 + 1x^3 + 1x^4.$$

Como cada galleta es idéntica, la función generatriz para la suma es

$$(x^2 + x^3 + x^4)(x^2 + x^3 + x^4)(x^2 + x^3 + x^4),$$

que es igual a:

$$x^{12} + 3x^{11} + 6x^{10} + 7x^9 + 6x^8 + 3x^7 + x^6$$

Por lo tanto, como se tienen 8 galletas en total, el número de formas para repartir las 8 galletas es el coeficiente de x^8, es decir, hay 6 formas de repartir las galletas. □

EJERCICIO 10. Se tiene veinte billetes de un dólar y cinco billetes de cinco dólares, ¿de cuántas formas se puede sumar 16 dólares?

Solución. Notemos que no importa el orden en este caso, así las funciones generatrices son:

- Para \$1: $x^0 + x^1 + \cdots + x^{20}$;
- Para \$5: $x^0 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + x^{25}$.

Entonces, la función generatriz para la suma es:

$$(1 + x^1 + \cdots + x^{20})(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + x^{25}).$$

Como buscamos la forma de suma 16, tomamos el coeficiente de x^{16}, con esto, hay 4 formas de hacerlo. $\square$

Ejercicio 11. Se tiene veinte billetes de un dólar y cinco billetes de cinco dólares, ¿de cuántas formas se puede introducir 16 dólares a una máquina expendedora?

Solución. Como se debe tomar en cuenta el orden, consideramos las funciones generatrices de lo que ingresa en la máquina. Así, en cada ingreso se tiene

$$0x^0 + 1x^1 + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 1x^5 + 0x^6 + \cdots = (x + x^5).$$

Si se considera r ingresos, tenemos la función generatriz

$$(x + x^5) \cdot (x + x^5) \cdot \cdots \cdot (x + x^5) = (x + x^5)^r.$$

como se considera todos los ingresos, la función generatriz es

$$(x + x^5)^0 + (x + x^5)^1 + (x + x^5)^2 + (x + x^5)^3 + \cdots + (x + x^5)^{16}$$

Como buscamos la forma de sumar 16, tomamos el coeficiente de x^{16}, con esto, hay 45 formas de hacerlo. $\square$

Ejercicio 12. Se cuenta con monedas de un centavo, de cinco centavos, de diez centavos, de veinticinco centavos y de cincuenta centavos, determinar:

a) ¿de cuántas formas se puede sumar un dólar?

b) ¿de cuántas formas se puede sumar cincuenta centavos?

Solución. $\square$