Semestre 2020-2 Mat. Andrés Merino

1. Expresiones algebraicas

Ejercicio 1. Utilice manipulaciones algebraicas para reducir la siguiente expresión:

a) $3(x+y)$

b) $(x-2)8$

c) $(x+y)(a-b)$

d) $-(x-2)$

e) $(4x)(2x+y)$

f) $(3x-4)(2x+9)$

g) $(2u+3)(u-4)+4u(u-2)$

h) $(2u+3)(u-4)-4u(u-2)$

i) $(t^2+2t-5)(3t^2-t+2)$

j) $(t^2+2t)^2$

k) $\left(\dfrac{t^2-2t}{3}\right)^2$

l) $\left(\dfrac{t^2-2t}{3+t}\right)^2$

m) $\dfrac{8x^2y^3-6x^3y}{2x^2y}$

n) $\dfrac{6a^3b^3-9a^2b^2+3ab^4}{3ab^2}$

ñ) $\dfrac{3u^3v^4-2u^5v^2+\left(u^2v^2\right)^2}{u^3v^2}$

o) $\dfrac{6x^2yz^3-xy^2z}{xyz}$

p) $\dfrac{4}{3s+1}-\dfrac{11}{(3s+1)^2}$

q) $\dfrac{4}{(5s-2)^2}+\dfrac{s}{5s-2}$

r) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3x+1}{x^2}-\dfrac{x-2}{x^3}$

s) $\dfrac{5}{x}-\dfrac{2x-1}{x^2}+\dfrac{x+7}{x^3}$

t) $\dfrac{3t}{t+2}+\dfrac{5t}{t-2}-\dfrac{40}{t^2-4}$

u) $\dfrac{t}{t+3}+\dfrac{4t}{t-3}-\dfrac{18}{t^2-9}$

v) $\dfrac{4x}{3x-4}+\dfrac{8}{3x^2-4x}+\dfrac{2}{x}$

w) $\dfrac{12x}{2x+1}-\dfrac{3}{2x^2+x}+\dfrac{5}{x}$

x) $\dfrac{3x}{x-2}+\dfrac{5}{x}-\dfrac{12}{x^2-2x}$

y) $\dfrac{\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}}{\dfrac{x}{y}+1+\dfrac{y}{x}}$

z) $\dfrac{(x+h)^2+7(x+h)-\left(x^2+7x\right)}{h}$

EJERCICIO 2. Utilice un asistente computacional para reducir las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\left(x^2-3\right)^2(2x)-x^2(2)\left(x^2-3\right)(2x)}{\left(\left(x^2-3\right)^2\right)^2}$

b) $\dfrac{x+2-\dfrac{3}{x+4}}{\dfrac{x}{x+4}+\dfrac{1}{x+4}}$

c) $\left(x^2+1\right)^{3/2}(4)(x+5)^3+(x+5)^4\left(\frac{3}{2}\right)\left(x^2+1\right)^{1/2}(2x)$

d) $\dfrac{(x+h)^3-7(x+h)-\left(x^3-7x\right)}{h}$

EJERCICIO 3. Utilice un asistente computacional para factorar las siguientes expresiones:

a) $3r^4s^3-12r^2s^5$

b) $16a^4+24a^2b^2+9b^4$

c) $2c^3-12c^2+3c-18$

d) $u^3v^4-u^6v$

e) $x^4-12x^3+36x^2$

f) $5x+20$

g) $x^2-49y^2-14x+49$

h) $4x^4+12x^3+20x^2$

2. ECUACIONES

EJERCICIO 4. Resolver la siguiente ecuación:

$$(8x-2)(3x+4)=(4x+3)(6x-1).$$

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}
(8x-2)(3x+4)=(4x+3)(6x-1) \quad &\Longrightarrow \\
\Longrightarrow \quad & 24x^2+26x-8=24x^2+14x-3 && \text{Manipulación algebraica}\\
\Longrightarrow \quad & 26x-8=14x-3 && \text{Proposición 5-b}\\
\Longrightarrow \quad & 26x-8-14x=14x-3-14x && \text{Proposición 5-c}\\
\Longrightarrow \quad & 12x-8=-3 && \text{Manipulación algebraica}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\implies 12x - 8 + 8 = -3 + 8 && \text{Proposición 5-a}\\
&\implies 12x = 5 && \text{Manipulación algebraica}\\
&\implies \frac{12x}{12} = \frac{5}{12} && \text{Proposición 5-g}\\
&\implies x = \frac{5}{12} && \text{Manipulación algebraica}
\end{aligned}
$$

□

EJERCICIO 5. Resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{3}{2x-4} - \frac{5}{x+3} = \frac{2}{x-2}.$$

Solución. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{3}{2x-4} - \frac{5}{x+3} = \frac{2}{x-2} \implies && \\
&\implies \frac{3(x+3) - 5(2x-4)}{(2x-4)(x+3)} = \frac{2}{x-2} && \text{Manipulación algebraica}\\
&\implies \frac{3x + 9 - 10x + 20}{(2x-4)(x+3)} = \frac{2}{x-2} && \text{Manipulación algebraica}\\
&\implies \frac{-7x+29}{2(x-2)(x+3)} = \frac{2}{x-2} && \text{Manipulación algebraica}\\
&\implies \frac{-7x+29}{2(x+3)} = 2 && \text{Proposición 5-h, con } x-2 \neq 0\\
&\implies -7x + 29 = 4(x+3) && \text{Proposición 5-l, con } x+3 \neq 0\\
&\implies -7x + 29 = 4x + 12 && \text{Manipulación algebraica}\\
&\implies -7x + 29 - 4x - 29 = 4x + 12 - 4x - 29 && \text{Proposición 5-c}\\
&\implies 11x = 17 && \text{Manipulación algebraica}\\
&\implies \frac{11x}{11} = \frac{17}{11} && \text{Proposición 5-g}\\
&\implies x = \frac{17}{11}. && \text{Manipulación algebraica}
\end{aligned}
$$

□

EJERCICIO 6. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{3}{2x+3} + \dfrac{5}{2x-3} = \dfrac{4x+6}{4x^2-9}$

b) $\dfrac{4}{x+2} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{5x-6}{x^2-4}$

c) $\dfrac{2}{2x+5} + \dfrac{3}{2x-5} = \dfrac{10x+5}{4x^2-25}$

d) $\dfrac{2}{2x+1} - \dfrac{3}{2x-1} = \dfrac{-2x+7}{4x^2-1}$

Solución.

c) Tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{2x+5} + \frac{3}{2x-5} = \frac{10x+5}{4x^2-25} \quad \Longrightarrow && \\
&\Longrightarrow \quad \frac{10x+5}{4x^2-25} = \frac{10x+5}{4x^2-25} && \text{Manipulación algebraica} \\
&\Longrightarrow \quad 10x+5 = 10x+5 && \text{Proposición 5-h} \\
&\Longrightarrow \quad 10x+5-5-10x = 10x+5-5-10x && \text{Proposición 5-c} \\
&\Longrightarrow \quad 0 = 0 &&
\end{aligned}
$$

Como la ecuación original es equivalente a una ecuación que siempre es verdadera, la solución de la ecuación es cualquier número real. □

EJERCICIO 7. Despeje la variable específica:

a) $I = Prt$, despeje P

b) $F = g\dfrac{mM}{d^2}$, despeje M

c) $A = \frac{1}{2}(a+b)h$, despeje b

d) $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, despeje q

3. ECUACIONES NO LINEALES

EJERCICIO 8. Resuelva, paso a paso, las siguientes ecuaciones, luego, compruebe su respuesta en un asistente computacional:

a) $|x+4| = 11$

b) $3|x+1| - 5 = -11$

c) $3|3x-2| + 3 = 7$

d) $9x^3 - 18x^2 - 4x + 8 = 0$

e) $9x^3 - 18x^2 - 4x + 8 = 0$

f) $3x^3 - 5x^2 - 12x + 20 = 0$

g) $4x^4 + 10x^3 = 6x^2 + 15x$

h) $15x^5 - 20x^4 = 6x^3 - 8x^2$

i) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$

j) $2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$

k) $5y^4 - 7y^2 + 1{,}5 = 0$

l) $3y^4 - 5y^2 + 1{,}5 = 0$

m) $x^{-4} - 13x^{-2} + 1 = 0$

n) $x^{-2} - 2x^{-1} - 35 = 0$

EJERCICIO 9. Resuelva, paso a paso, las siguientes ecuaciones, luego, compruebe su respuesta en un asistente computacional:

a) $\sqrt{7-2x} - \sqrt{5+x} = \sqrt{4+3x}$

b) $\sqrt{11+8x} + 1 = \sqrt{9+4x}$

c) $2\sqrt{x} - \sqrt{x-3} = \sqrt{5+x}$

d) $\sqrt{2\sqrt{x+1}} = \sqrt{3x-5}$

e) $\sqrt{5\sqrt{x}} = \sqrt{2x-3}$

f) $\sqrt{1+4\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1$

g) $\sqrt{x+2} = \sqrt{x-2}$

h) $\sqrt{7-5x} = 8$

i) $\sqrt{2x-9} = \frac{1}{2}$

j) $4 + \sqrt[3]{1-5t} = 0$

k) $\sqrt[3]{6-s^2} + 5 = 0$

l) $\sqrt[5]{2x^2+1} - 2 = 0$

m) $\sqrt[4]{6x^2-9} = x$

n) $\sqrt{7-x} = x - 5$

ñ) $\sqrt{3-x} - x = 3$

o) $3\sqrt{2x-3} + 2\sqrt{7-x} = 11$

p) $x - \sqrt{-7x-24} = -2$

q) $26x + \sqrt{5x+19} = -1$

1. MODELAMIENTO CON ECUACIONES

EJERCICIO 1. ¿Qué precio se debe marcar en la etiqueta de un producto si se desea colocar una oferta del 20 % de descuento sobre el precio marcado y obtener un ingreso de $58?

Solución. Tomemos la siguiente variable:

- x: precio que se debe marcar en la etiqueta de un producto.

Con esto planteamos la ecuación. Para que el ingreso sea de $58 y la oferta de descuento sea del 20 % es necesario que

$$x + 0{,}2x = 58,$$

donde $0{,}2x$ corresponde al descuento que se va a otorgar al cliente. Resolviendo la ecuación

$$\begin{aligned} x - 0{,}2x = 58 \quad &\Longrightarrow \quad 1{,}2x = 58 \\ &\Longrightarrow \quad x = 72{,}5. \end{aligned}$$

Así, el precio que se debe marcar en la etiqueta de un producto para que con una oferta del 20 % se tenga un ingreso de $58 es de $72,5. □

EJERCICIO 2. Usted compra un producto a $45. ¿Qué precio se debe marcar en la etiqueta de un producto si se desea colocar una oferta del 25 % de descuento sobre el precio marcado y obtener una ganancia del 10 %?

Solución. Tomemos la siguiente variable:

- precio que se debe marcar en la etiqueta de un producto.

Con esto planteamos la ecuación. Para que con un descuento del 25 % se obtenga una ganancia del 10 % es necesario que

$$x - 0{,}25x = 45 + 0{,}1(45),$$

donde $0{,}25x$ corresponde al descuento y $0{,}1(45)$ a la ganancia deseada. Resolviendo la ecuación

$$
\begin{aligned}
x - 0{,}25x = 45 + 0{,}1(45) \quad &\implies \quad 0{,}75x = 49{,}50 \\
&\implies \quad x = 66.
\end{aligned}
$$

Así, el precio que se debe marcar en la etiqueta de un producto cuyo costo fue de \$45 para que con un descuento del 25 % se obtenga una ganancia del 10 % es de \$66. □

EJERCICIO 3. Un estudiante en un curso de álgebra tiene calificaciones de examen de 75, 82, 71 y 84. ¿Qué calificación en el siguiente examen subirá el promedio del estudiante a 80?

Solución. Tomemos la siguiente variable:

- x: calificación del siguiente examen para subir el promedio a 80.

Con esto planteamos la ecuación, para que el promedio sea 80, se necesita que

$$\frac{75 + 82 + 71 + 84 + x}{5} = 80.$$

Resolviendo la ecuación:

$$
\begin{aligned}
\frac{75 + 82 + 71 + 84 + x}{5} = 80 \quad &\implies \quad 312 + x = 400 \\
&\implies \quad x = 88.
\end{aligned}
$$

Así, la calificación en el siguiente examen para subir el promedio a 80 debe ser de 88. □

EJERCICIO 4. Un estudiante de Lógica del diseño gráfico de la PUCE tiene notas parciales de 28, 31 y 24. ¿Qué calificación debe sacar en el Examen Final para tener una nota total de 30?

Solución. Tomemos la siguiente variable:

- x: calificación del examen final para tener una nota total de 30.

Con esto planteamos la ecuación, para que la nota total sea de 30, se necesita que

$$0{,}24(28 + 31 + 24) + 0{,}28x = 30.$$

Resolviendo la ecuación:

$$\begin{aligned} 0{,}24(28+31+24)+0{,}28x=30 &\implies 19{,}92+0{,}28x=30\\ &\implies 0{,}28x=10{,}08\\ &\implies x=36. \end{aligned}$$

Así, la calificación en el examen final para tener una nota total de 30 debe ser de 36. □

EJERCICIO 5. Una pareja no desea gastar más de \$70 por comer en un restaurante. Si se agrega un impuesto de venta de 8 % a la cuenta y piensan dar una propina de 15 % después de agregar el impuesto, ¿cuánto es lo más que pueden gastar en la comida?

Solución. Tomemos la siguiente variable:

- m: monto máximo que pueden gastar en comida

Con esto planteamos la ecuación, para esto, primero tenemos la representación de las siguientes cantidades:

- impuesto: $0{,}08m$
- monto más impuesto: $m+0{,}08m$
- propina: $0{,}15(m+0{,}08m)$
- total a pagar: $m+0{,}08m+0{,}15(m+0{,}08m)$

Así, la condición del problema se traduce a

$$m+0{,}08m+0{,}15(m+0{,}08m)=70.$$

Resolviendo la ecuación:

$$\begin{aligned} m+0{,}08m+0{,}15(m+0{,}08m)=70 &\implies 1{,}242m=70\\ &\implies m\approx 56{,}36. \end{aligned}$$

Así, el monto que se puede gastar en comida es, aproximadamente, \$56,36. □

EJERCICIO 6. El tiempo de una diseñadora se factura a \$60 por hora y el de su asistente se factura a \$20 por hora. Un cliente recibe una cuenta de \$580 por cierto trabajo. Si el asistente trabajó 5 horas menos que la diseñadora, ¿cuánto tiempo facturó cada una en el trabajo?

Solución. Tomemos las siguientes variables:

- b: tiempo que facturó la diseñadora en horas
- a: tiempo que facturó el asistente en horas

Con esto planteamos la ecuación. Por los tiempos trabajados, sabemos que

$$a = b - 5;$$

por el costo del trabajo, sabemos que

$$60b + 20a = 580.$$

Resolviendo las ecuaciones, reemplazamos la primera ecuación en la segunda y obtenemos

$$60b + 20(b - 5) = 580.$$

Resolviendo esta ecuación:

$$\begin{aligned} 60b + 20(b-5) = 580 \quad &\Longrightarrow \quad 80b - 100 = 580 \\ &\Longrightarrow \quad 80b = 680 \\ &\Longrightarrow \quad b = 8{,}5. \end{aligned}$$

Reemplazamos en la primera ecuación:

$$a = (8{,}5) - 5 = 3{,}5.$$

Así, la diseñadora facturó 8.5 horas mientras que su asistente facturó 3.5 horas □

EJERCICIO 7. El costo de instalar aislamiento en una casa particular de dos recámaras es \$2400. Los costos mensuales de calefacción actuales promedian \$200, pero se espera que el aislamiento reduzca los costos en 10 %. ¿Cuántos meses tardará en recuperarse el costo del aislamiento?

EJERCICIO 8. La sección transversal de una zanja es un trapecio isósceles con una pequeña base de 3 m y una altura de 1 m. Determine el ancho de la base más grande que daría a la zanja un área de sección de 5 m^2.

Solución. Tomemos la siguiente variable:

- x: ancho de la base más grande del trapecio isósceles.

Con esto planteamos la ecuación. Sabemos que el área de un trapecio está dada por el producto de su altura por la semisuma de sus bases; es decir

$$A = h \cdot \frac{\text{base mayor} + \text{base menor}}{2}.$$

Reemplazando los datos, tenemos que

$$5 = 1 \cdot \frac{x+3}{2}.$$

Resolviendo la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} 5 = 1 \cdot \frac{x+3}{2} \quad &\Longrightarrow \quad 10 = x + 3 \\ &\Longrightarrow \quad x = 7. \end{aligned}$$

Así, el ancho de la base más grande que daría a la zanja una sección de $5\,\mathrm{m}^2$ es igual a $7\,\mathrm{m}$. □

EJERCICIO 9. Se ha de construir un silo grande para granos en forma de cilindro circular con una semiesfera en la parte superior. El diámetro del silo debe medir 10 m, pero la altura no se ha determinado. Encuentre la altura del silo que resultará en una capacidad de 1000 m^3.

Solución. Tomemos las siguientes variables:

- h: altura del silo,
- r: radio del silo.

Con esto, consideremos la figura 1.

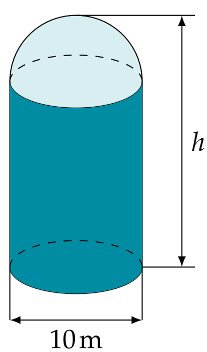


Figura 1: Silo

Así, como el volumen total del silo está dado por la suma del volumen del cilindro y semiesfera que lo conforman; reemplazando las fórmulas correspondientes, tenemos que

$$V = \pi r^2 h_c + \frac{(\frac{4}{3}\pi r^3)}{2}.$$

De donde, dado que el radio es igual a $5\,\mathrm{m}$ y la altura del cilindro (h_c) es la resta entre la altura total y la altura de la semiesfera y el volumen buscado es de 1000 m^3

$$1000 = \pi(5)^2(h-5) + \frac{2}{3}\pi(5)^3.$$

Resolviendo la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
1000 = \pi(5)^2(h-5) + \frac{2}{3}\pi(5)^3 \quad &\Longrightarrow \quad 1000 = 25\pi(h-5) + \frac{250}{3}\pi \\
&\Longrightarrow \quad 1000 = 25\pi h - 125\pi + \frac{250}{3}\pi \\
&\Longrightarrow \quad 1000 = 25\pi h - \frac{125}{3}\pi \\
&\Longrightarrow \quad 1000 = 25\left(\pi h - \pi\frac{5}{3}\right) \\
&\Longrightarrow \quad 40 = \pi h - \frac{5\pi}{3} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{120 + 5\pi}{3} = \pi h \\
&\Longrightarrow \quad h = \frac{120 + 5\pi}{3\pi} \approx 14{,}4.
\end{aligned}$$

Así, la altura total del silo para que este tenga una capacidad de $1000\,\mathrm{m}^3$ es de aproximadamente $14{,}4\,\mathrm{m}^3$. □

EJERCICIO 10. Un fabricante de latas desea construir un bote cilíndrico circular recto de altura 20 centímetros y capacidad de 3000 cm^3. Encuentre el radio de la lata.

Solución. Tomemos las siguientes variables:

- h : altura del bote cilíndrico en centímetros
- r : radio del bote cilíndrico en centímetros

Con esto planteamos las ecuaciones. Notemos que el volumen de un bote cilíndrico está dador por:

$$V = \pi r^2 h.$$

Así, como el volumen es de 3000cm^3 y la altura es de 20cm, entonces

$$\pi r^2(20) = 3000,$$

despejando la ecuación anterior, se tiene que

$$r = \sqrt{\frac{150}{\pi}} \approx 6{,}9098.$$

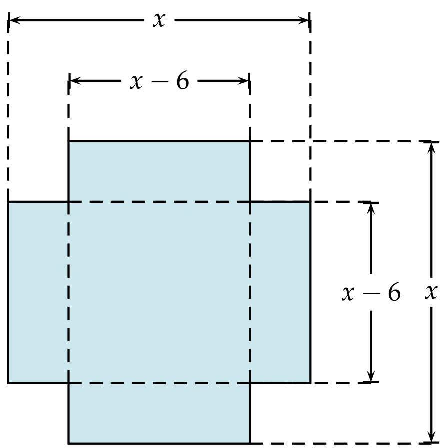
Así, el bote cilíndrico tiene un radio de aproximadamente 6,9098 centímetros. □

EJERCICIO 11. Una caja con base cuadrada y sin tapa ha de construirse de una pieza cuadrada de hojalata al cortar un cuadrado de 3 cm de cada esquina y doblar los lados. Si la caja debe contener 48 cm^3, ¿de qué tamaño debe ser la pieza de hojalata que debe usarse?

Solución. Tomemos la siguiente variable:

- x : lado de la pieza cuadrada de hojalata en centímetros

Para plantear la ecuación, consideremos la siguiente figura que ilustra el problema:



Con esto, tenemos que el volumen de la cada resultante está dado por:

$$3(x-6)^2 = 48.$$

Despejando la ecuación anterior,

$$x = 10.$$

Así, la pieza de hojalata a usarse debe ser de 10 centímetros de lado. □

EJERCICIO 12. Una hoja de papel de 24 por 36 cm se va a usar para un cartel, con el lado más corto en la parte inferior. Los márgenes de los lados y la parte superior van a tener el mismo ancho, y el margen de abajo va a tener el doble de ancho que los otros márgenes. Encuentre el ancho de los márgenes si el área impresa va a ser de $661.5\ \text{cm}^2$.

EJERCICIO 13. Un anillo que pesa 80 gramos está hecho de oro y plata. Al medir el desplazamiento del anillo en agua se ha determinado que tiene un volumen de 5 cm3. El oro pesa $19.3\ \text{g}/\text{cm}^3$ y la plata pesa $10.5\ \text{g}/\text{cm}^3$. ¿Cuántos gramos de oro contiene el anillo?

EJERCICIO 14. La membrana de una célula es una esfera cuyo radio mide 6 micrómetros. ¿Qué cambio en el radio aumentará el área superficial de la membrana en un 25 %?

Solución. Tomemos las siguientes variables:

- r : radio de la célula en micrómetros
- S : superficie de la célula en micrómetros cuadrados

Con esto, tenemos que la superficie de la célula está dada por:

$$S = 4\pi r^2,$$

reemplazando $r = 6$, tenemos que

$$S = 4\pi(6)^2 = 144\pi.$$

Ahora, como buscamos un incremento del área superficial, tenemos que esta está dada por

$$144\pi + (0{,}25)144\pi = 180\pi;$$

por lo tanto, la nueva área tiene un valor de 180π micrómetros cuadrados. Finalmente, para obtener el valor del nuevo radio, tenemos que

$$180\pi = 4\pi r^2$$

despejando r, se tiene que

$$r = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}7082.$$

De donde, para calcular el cambio en el radio, tenemos que

$$\frac{3\sqrt{5}}{6} \cdot 100\,\% = 111{,}80.$$

Así, un cambio de un 11,80 % en el radio, genera un cambio de un 25 % en la superficie de la célula. □

2. El plano cartesiano

Ejercicio 15. ¿Para qué valor de a el punto $A = (2, a)$ está a una distancia de 3 unidades del punto $B = (1, 1)$?

Solución.

Variables: Tomamos

- a: segunda componente del punto A.

Planteamiento: Aplicamos la definición se distancia entre dos puntos.

$$3 = d(A, B) = \sqrt{(2-1)^2 + (a-1)^2}.$$

Resolución: Resolviendo la ecuación. Tenemos que

$$\begin{aligned} 3 = \sqrt{(2-1)^2 + (a-1)^2} \quad &\iff \quad 9 = 1 + (a-1)^2 \\ &\iff \quad 8 = (a-1)^2 \\ &\iff \quad \sqrt{8} = |a-1| \\ &\iff \quad \sqrt{8} = a-1 \quad \vee \quad -\sqrt{8} = a-1 \\ &\iff \quad a = 1+\sqrt{8} \quad \vee \quad a = 1-\sqrt{8}. \end{aligned}$$

Respuesta: Los valores de a para que el punto $A = (2, a)$ está a una distancia de 3 unidades del punto $B = (1, 1)$ son $1+\sqrt{8}$ y $1-\sqrt{8}$. □

EJERCICIO 16. ¿Para qué valor de b el punto $A = (b, -2)$ está a una distancia de 4 unidades del punto $B = (-1, 1)$?

Solución.

Variables: Tomamos

- b: primera componente del punto A.

Planteamiento: Aplicamos la definición de distancia entre dos puntos.

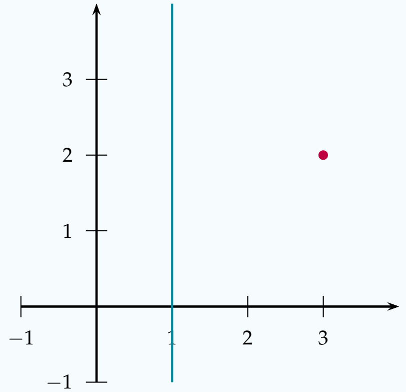
$$4 = d(A, B) = \sqrt{(b - (-1))^2 + (-2 - 1)^2}.$$

Resolución: Resolviendo la ecuación. Tenemos que

$$\begin{aligned}
4 = \sqrt{(b - (-1))^2 + (-2 - 1)^2} \quad &\Longleftrightarrow \quad 16 = (b + 1) + 9 \\
&\Longleftrightarrow \quad 7 = (b + 1)^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \sqrt{7} = |b + 1| \\
&\Longleftrightarrow \quad \sqrt{7} = b + 1 \quad \vee \quad -\sqrt{7} = b + 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad b = \sqrt{7} - 1 \quad \vee \quad b = -\sqrt{7} - 1.
\end{aligned}$$

Respuesta: Los valores de b para que el punto $A = (b, -2)$ esté a una distancia de 4 unidades del punto $B = (-1, 1)$ son $\sqrt{7} - 1$ y $-\sqrt{7} - 1$. □

EJERCICIO 17. El diagrama de un diseño se ubica sobre el plano cartesiano como se muestra en el gráfico. Sobre una varilla (azul) se desea colocar una soldadura que esté a 4 unidades de otra soldadura (rojo). Determine las coordenadas en las cuales de debería colocar la soldadura.



`https://ggbm.at/kkdggrfk`

Solución.

Variables: Tomamos

- A: el punto donde colocaremos la puerta.
- B: el punto donde se encuentra la columna.
- a: la segunda componente del punto A.

Con esto,

$$A = (1, a) \qquad \text{y} \qquad B(3, 2).$$

Planteamiento: Aplicamos la definición de distancia entre dos puntos.

$$4 = d(A, B) = \sqrt{(1-3)^2 + (a-2)^2}.$$

Resolución: Resolviendo la ecuación. Tenemos que

$$\begin{aligned} 4 = \sqrt{(1-3)^2 + (a-2)^2} &\iff 16 = 4 + (a-2)^2 \\ &\iff 12 = (a-2)^2 \\ &\iff \sqrt{12} = |a-2| \\ &\iff \sqrt{12} = a-2 \quad \vee \quad -\sqrt{12} = a-2 \\ &\iff a = 2+\sqrt{12} \quad \vee \quad a = 2-\sqrt{12}. \end{aligned}$$

Respuesta: La puerta se debe colocar en las coordenadas $(1, 2+\sqrt{12})$ o $(1, 2-\sqrt{12})$. $\square$

EJERCICIO 18. ¿Para qué valor de a y b el punto $A = (a, b)$ está a una distancia de 3 unidades del punto $B = (1, 1)$ y de 2 unidades del punto $C = (-1, 3)$?

Solución.

Variables: Tomamos

- a: primera componente del punto A.
- b: segunda componente del punto A.

Planteamiento: Aplicamos la definición de distancia entre dos puntos.

$$3 = d(A,B) = \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2} \qquad \text{y} \qquad 2 = d(A,C) = \sqrt{(-1-a)^2 + (3-b)^2}.$$

Resolución: Resolviendo la ecuación. Tenemos que

$$3 = \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2} \iff 9 = (1-a)^2 + (1-b)^2$$

y

$$2 = \sqrt{(-1-a)^2 + (3-b)^2} \iff 4 = (-1-a)^2 + (3-b)^2.$$

Para resolver estas ecuaciones podemos utilizar el programa `WolframAlpha`, con esto, obtenemos

$$a = \frac{1}{8}\left(-\sqrt{119} - 5\right) \qquad \text{y} \qquad b = \frac{1}{8}\left(21 - \sqrt{119}\right)$$

o

$$a = \frac{1}{8}\left(\sqrt{119} - 5\right) \qquad \text{y} \qquad b = \frac{1}{8}\left(\sqrt{119} + 21\right)$$

Respuesta: Los valores de a y b para que el punto $A = (a,b)$ está a una distancia de 3 unidades del punto $B = (1,1)$ y de 2 unidades del punto $C = (-1,3)$ son

$$a = \frac{1}{8}\left(-\sqrt{119} - 5\right) \qquad \text{y} \qquad b = \frac{1}{8}\left(21 - \sqrt{119}\right)$$

o

$$a = \frac{1}{8}\left(\sqrt{119} - 5\right) \qquad \text{y} \qquad b = \frac{1}{8}\left(\sqrt{119} + 21\right).$$

□

EJERCICIO 19. ¿Para qué valor de a los puntos $A = (-2,a)$ y $B = (1,2)$ forman una pendiente de 2?

Solución.

Variables: Tomamos

- a: segunda componente del punto A.

Planteamiento: Aplicamos la definición de pendiente entre dos puntos.

$$2 = m_{A,B} = \frac{2-a}{1-(-2)}.$$

Resolución: Resolviendo la ecuación. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
2 = \frac{2-a}{1-(-2)} \quad &\iff \quad 6 = 2 - a \\
&\iff \quad a = -4.
\end{aligned}
$$

Respuesta: El valor de a para que los puntos $A = (-2, a)$ y $B = (1, 2)$ tengan pendiente 2 es -4. $\square$

EJERCICIO 20. Se desea construir una rampa de 8 metros de longitud horizontal, si esta rampa debe tener una pendiente del 8 %, ¿a qué altura llega la rampa?

Solución.

Variables: Coloquemos el inicio de la rampa en el origen de un plano cartesiano. Tomamos

- O: el punto donde inicia la rampa.
- A: el punto final de la rampa.
- a: la segunda componente del punto A.

Con esto,

$$O = (0, 0), \qquad \text{y} \qquad A = (8, a).$$

Planteamiento: Aplicamos la definición de pendiente entre dos puntos, notemos que una pendiente del 8 % significa 0,08.

$$0{,}08 = m_{O,A} = \frac{a-0}{8-0}.$$

Resolución: Resolviendo la ecuación. Tenemos que

$$0{,}08 = \frac{a-0}{8-0} \iff a = 0{,}64.$$

Respuesta: La altura a la que llegaría la rampa es 0,64 metros. $\square$

EJERCICIO 21. Dado el punto $A = (1, -1)$, se desea ubicar otro punto que esté a $\sqrt{5}$ unidades de A y forme con este una pendiente de -2.

Solución.

Variables: Tomemos

- B: punto buscado.
- a: primera componente del punto B.
- b: segunda componente del punto B.

Con esto,

$$B = (a, b).$$

Planteamiento: Para cumplir las condiciones del ejercicio, necesitamos que

$$d(A, B) = \sqrt{5} \qquad \text{y} \qquad m_{A,B} = -2.$$

Aplicamos la definición de pendiente entre dos puntos y de distancia entre dos puntos, tenemos que

$$\sqrt{(1-a)^2 + (-1-b)^2} = \sqrt{5} \qquad \text{y} \qquad \frac{b-(-1)}{a-1} = -2.$$

Resolución: Resolviendo la ecuación. Despejando tenemos que

$$(1-a)^2 + (-1-b)^2 = 5 \qquad \text{y} \qquad b+1 = -2(a-1).$$

Para resolver estas ecuaciones podemos utilizar el programa `WolframAlpha` introduciendo la siguiente sintaxis:

```
solve (1-a)^2+(-1-b)^2 = 5  and  b-1 = -2(a+1)
```

con lo que obtenemos que

$$a = 0 \qquad \text{y} \qquad b = 1$$

o

$$a = 2 \qquad \text{y} \qquad b = -3.$$

Respuesta: Las coordenadas del otro punto son $(0, 1)$ o $(2, -3)$. □

EJERCICIO 22. ¿A qué altura llegará una rampa con una pendiente de 10 % si la longitud de la rampa es de 10 metros?

Solución.

Variables: Coloquemos el inicio de la rampa en el origen de un plano cartesiano. Tomamos

- O: el punto donde inicia la rampa.
- A: el punto final de la rampa.
- a: primera componente del punto B.
- b: segunda componente del punto B.

Con esto,

$$O = (0,0), \qquad \text{y} \qquad A = (a,b).$$

Planteamiento: Para cumplir las condiciones del ejercicio, necesitamos que

$$d(A,B) = 10 \qquad \text{y} \qquad m_{A,B} = 1/10.$$

Aplicamos la definición de pendiente entre dos puntos y de distancia entre dos puntos, tenemos que

$$\sqrt{(0-a)^2 + (0-b)^2} = 10 \qquad \text{y} \qquad \frac{b-0}{a-0} = \frac{1}{10}.$$

Resolución: Resolviendo la ecuación. Despejando tenemos que

$$a^2 + b^2 = 100 \qquad \text{y} \qquad 10b = a.$$

Con lo que obtenemos que

$$a = -\frac{100}{\sqrt{101}} \approx 9{,}95 \qquad \text{y} \qquad b = -\frac{10}{\sqrt{101}} \approx 0{,}99$$

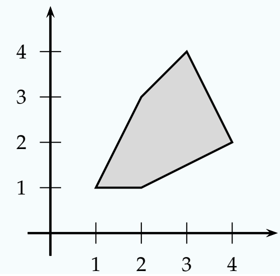
o

$$a = \frac{100}{\sqrt{101}} \approx 9{,}95 \qquad \text{y} \qquad b = \frac{10}{\sqrt{101}} \approx 0{,}99.$$

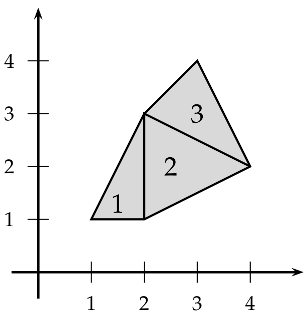
Dado que suponemos que la rampa sube, tomamos la respuesta positiva.

Respuesta: La altura a la que llega la rampa es de 0,99 metros, aproximadamente. □

EJERCICIO 23. Determinar el área de la región representada en la siguiente figura:



Solución. Dividimos la figura en tres triángulos:



Para el triángulo 1, sus vértices son $(1,1)$, $(2,1)$ y $(2,3)$, por lo tanto, primero calculamos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

para esto, podemos utilizar en Wolfra|Alpha la siguiente sintaxis:

```
det {{1,2,1},{2,1,1},{2,3,1}}
```

Con esto, tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

por lo tanto, el área del triángulo 1 es 1.

Para el triángulo 2, sus vértices son $(2,1)$, $(4,2)$ y $(2,3)$, con esto, calculamos

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

por lo tanto, el área del triángulo 2 es 2.

Para el triángulo 3, sus vértices son $(4,2)$, $(3,4)$ y $(2,3)$, con esto, calculamos

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

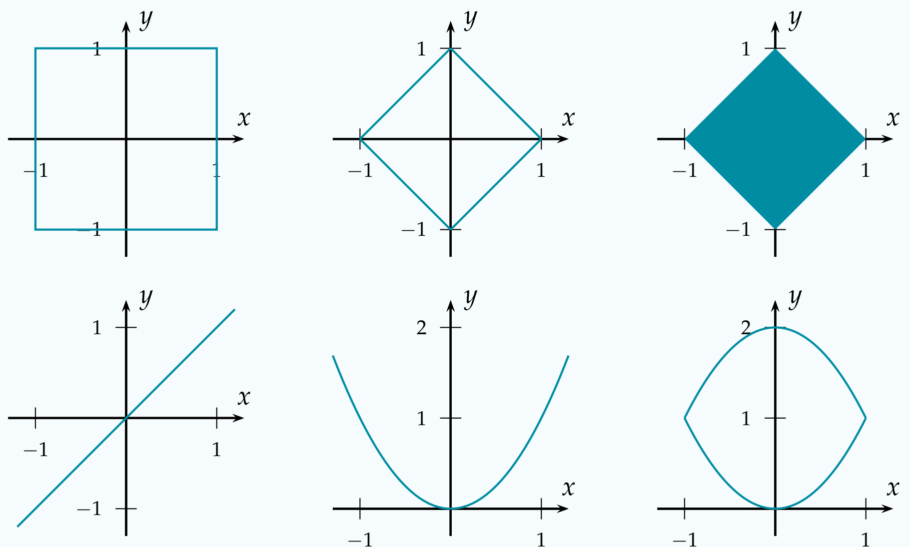
por lo tanto, el área del triángulo 3 es $3/2$.

Con esto, el área de la figura es

$$1 + 2 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}.$$ □

3. Funciones

Ejercicio 24. Determine cuáles de las siguientes gráficas pueden representar una función, de las que sean función, determine su dominio y su imagen.



Ejercicio 25. Determine si el conjunto

$$f = \{(x,y) : x \in [-1,1],\ x^2 + y^2 = 1\}$$

es una función.

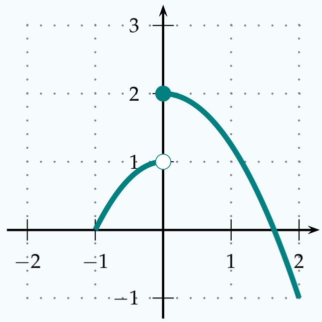
EJERCICIO 26. Determine si el conjunto

$$f = \left\{(x,y) : x \in [-1,1],\ y = \sqrt{1-x^2}\right\}$$

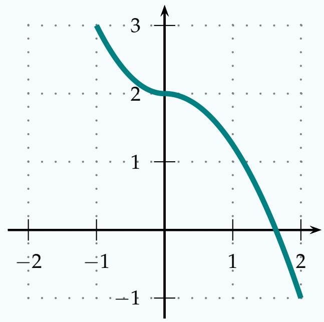
es una función.

EJERCICIO 27. Dadas las siguientes funciones:

$f\colon [-1,2] \to [-1,3]$



$g\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$



a) Determine la imagen de f y la imagen de g.

b) ¿Cuál es el valor de $f(0)$?, ¿de $f(2)$?, ¿de $g(-1)$?, ¿de $g(2)$?

EJERCICIO 28. Dadas

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x+1 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2-x+1, \end{aligned}$$

determinar $f(0)$, $g(1)$, $f(x+2)$, $f(x+h)$, $g(x+h)$, $f(g(x))$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$, para $x,h \in \mathbb{R}$ con $h \neq 0$.

Solución.

- Para $f(0)$:

$$f(0) = 3(0)+1 = 1.$$

- Para $f(x+2)$:

$$f(x+2) = 3(x+2)+1 = 3x+7.$$

- Para $f(x+h)$:

$$f(x+h) = 3(x+h) + 1 = 3x + 3h + 1.$$

- Para $g(x+h)$:

$$g(x+h) = (x+h)^2 - (x+h) + 1 = x^2 + 2hx + h^2 - h - x + 1.$$

- Para $f(g(x))$:

$$f(g(x)) = f(x^2 - x + 1) = 3(x^2 - x + 1) + 1 = 3x^2 - 3x + 4.$$

- Para $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{3(x+h) + 1 - (3x+1)}{h} = \frac{3h}{h} = 3.$$

□

EJERCICIO 29. Resolver los ejercicios del 5 al 14 de la sección de 3.4 del libro "Álgebra y trigonometría con Geometría analítica" de Jeffery.
`https://bit.ly/3dAjZ2b`

EJERCICIO 30. Determine la razón de cambio promedio de las siguientes funciones

a) $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -x^3 - 1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x - x^2 + 2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^4 - 2x^2 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2}{2-x} \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2}{2+x^2} \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{2+x^2} \end{aligned}$

Solución.

a) Tenemos que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-(x+h)^3 - 1 - (-x^3 - 1)}{h}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-1+x^3+1}{h}\\
&= \frac{-x^3-3x^2h-3xh^2-h^3+x^3}{h}\\
&= \frac{-3x^2h-3xh^2-h^3}{h}\\
&= \frac{h(-3x^2-3xh-h^2)}{h}\\
&= -3x^2-3xh-h^2.
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que la razón de cambio promedio es:

$$-3x^2-3xh-h^2.$$

b) Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)-(x+h)^2+2-(x-x^2+2)}{h}\\
&= \frac{x+h-(x^2+2xh+h^2)+2-x+x^2-2}{h}\\
&= \frac{x+h-x^2-2xh-h^2+2-x+x^2-2}{h}\\
&= \frac{h-2xh-h^2}{h}\\
&= \frac{h(1-2x-h)}{h}\\
&= 1-2x-h.
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que la razón de cambio promedio es:

$$1-2x-h.$$

e) Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{(x+h)^2}{2+(x+h)^2}-\frac{x^2}{2+x^2}}{h}\\
&= \frac{\frac{(x+h)^2(2+x^2)-x^2(2+(x+h)^2)}{(2+(x+h)^2)(2+x^2)}}{h}\\
&= \frac{\frac{(x^2+2xh+h^2)(2+x^2)-x^2(2+x^2+2xh+h^2)}{((2+(x+h)^2)(2+x^2))}}{h}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{2x^2+4xh+2h^2+x^4+2x^3h+x^2h^2-2x^2-x^4-2x^3h-x^2h^2}{(2+(x+h)^2)(2+x^2)}}{h} \\
&= \frac{\frac{4xh+2h^2}{(2+(x+h)^2)(2+x^2)}}{h} \\
&= \frac{\frac{h(4x+2h)}{(2+(x+h)^2)(2+x^2)}}{h} \\
&= \frac{h(4x+2h)}{h(2+(x+h)^2)(2+x^2)} \\
&= \frac{4x+2h}{(2+(x+h)^2)(2+x^2)} \\
&= \frac{2(2x+h)}{(2+x^2+2xh+h^2)(2+x^2)}.
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que la razón de cambio promedio es:

$$
\frac{2(2x+h)}{(2+x^2+2xh+h^2)(2+x^2)}.
$$

□

4. Composición de funciones

Ejercicio 31. Dadas

$$
\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 - x + 1 \end{aligned}
\qquad \text{y} \qquad
\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x + 1, \end{aligned}
$$

determinar $(f \circ g)(-1)$, $(f \circ g)(2)$ y $(g \circ f)(2)$.

Solución.

- Calculando $(f \circ g)(-1)$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(-1) &= f(g(-1)) \\
&= f(3(-1)+1) \\
&= f(-2) \\
&= (-2)^2 - (-2) + 1 \\
&= 9.
\end{aligned}
$$

- Calculando $(f \circ g)(2)$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(2) &= f(g(2)) \\
&= f(3(2)+1) \\
&= f(7) \\
&= (7)^2 - (7) + 1 \\
&= 43.
\end{aligned}
$$

- Calculando $(g \circ f)(2)$ tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(2) &= g(f(2))\\ &= g((2)^2 - (2) + 1)\\ &= g(3)\\ &= 3(3) + 1\\ &= 10.\end{aligned}$$

□

Ejercicio 32. Dadas

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 - x + 1 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x + 1, \end{aligned}$$

determinar $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

Solución.

- Para $f \circ g$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(3x+1)\\ &= (3x+1)^2 - (3x+1) + 1\\ &= 9x^2 + 3x + 1.\end{aligned}$$

- Para $g \circ f$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g\left(x^2 - x + 1\right)\\ &= 3(x^2 - x + 1) + 1\\ &= 3x^2 - 3x + 4.\end{aligned}$$

□

Ejercicio 33. Dadas

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x - 3 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x^2 + 2}, \end{aligned}$$

determinar $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

Solución.

- Para $f \circ g$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f\left(\tfrac{1}{x^2+2}\right)\\ &= \left(\tfrac{1}{x^2+2}\right) - 3\\ &= \frac{-3x^2 - 5}{x^2 + 2}.\end{aligned}$$

- Para $g \circ f$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x-3) \\ &= \frac{1}{(x-3)^2+2} \\ &= \frac{1}{x^2-6x+11}. \quad \square\end{aligned}$$

EJERCICIO 34. Dadas

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{x^2+1} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x^2+2}, \end{aligned}$$

determinar $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

Solución.

- Para $f \circ g$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\tfrac{1}{x^2+2}\right) \\ &= \frac{\frac{1}{x^2+2}}{\left(\frac{1}{x^2+2}\right)^2+1} \\ &= \frac{x^2+2}{x^4+4x^2+5}.\end{aligned}$$

- Para $g \circ f$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g\left(\tfrac{x}{x^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2+2} \\ &= \frac{(x^2+1)^2}{2+5x^2+2x^4}. \quad \square\end{aligned}$$

EJERCICIO 35. Encuentre $(f \circ g)(x)$, $(f \circ f)(x)$ y $(g \circ f)(x)$, donde las funciones f y g están definidas por:

a) $f(x) = \sqrt{3-x}$ $\qquad$ $g(x) = \sqrt{x^2-16}$

b) $f(x) = x^3+5$ $\qquad$ $g(x) = \sqrt[2]{x-5}$

c) $f(x) = \dfrac{2x+3}{5}$ $\qquad$ $g(x) = \dfrac{5x-3}{2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ $\qquad$ $g(x) = x-1$

e) $f(x) = x^2$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{x^3}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ $\qquad$ $g(x) = \frac{3}{x}$

g) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ $\qquad$ $g(x) = \dfrac{x-3}{x-4}$

h) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ $\qquad g(x) = \dfrac{x-5}{x+4}$

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA

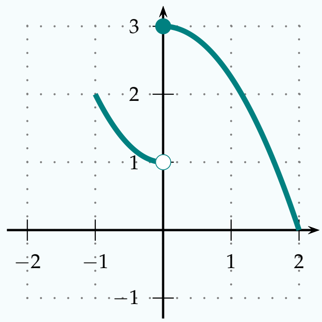
LÓGICA DEL DIS. DE PRODUCTOS • EJERCICIOS NO. 03

Semestre 2020-2 | Mat. Andrés Merino

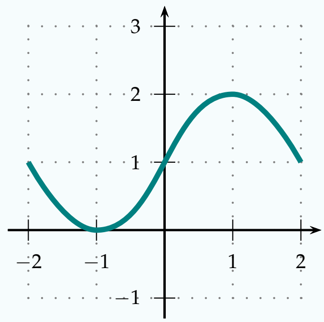
1. MONOTONÍA, PARIDAD, EXTREMOS Y GRÁFICA

EJERCICIO 1. Dadas las siguientes funciones:

$f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$



$g\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$



Determine los intervalos de monotonía de la función.

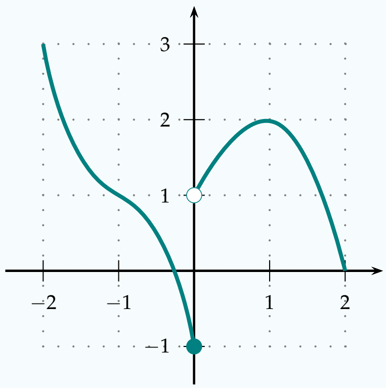
Solución. Para f:

- estrictamente decreciente en $[-1,0[$;
- estrictamente decreciente en $[0,2]$.

Para g:

- estrictamente decreciente en $[-2,-1]$;
- estrictamente creciente en $[-1,1]$;
- estrictamente decreciente en $[1,2]$. □

EJERCICIO 2. Considere la función $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ cuya gráfica se muestra a continuación.



a) Determine los intervalos donde es creciente.

b) Determine los intervalos donde es decreciente.

Solución.

a) La función es creciente en el intervalo $[0, 1]$.

b) La función es decreciente en el intervalo $[-2, 0]$ y en el intervalo $[1, 2]$. $\square$

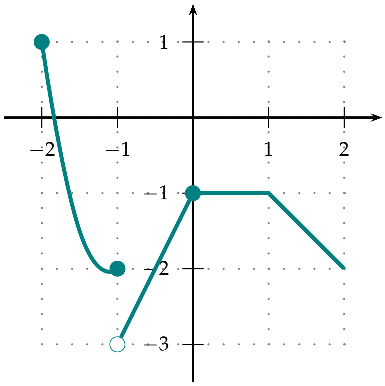
EJERCICIO 3. Dibuje una función $f\colon [-2, 2] \to \mathbb{R}$ tal que

- sea creciente en $[-2, -1]$;
- sea decreciente en $[-1, 1]$;
- sea constante en $[1, 2]$.

EJERCICIO 4. Dibuje una función $f\colon [-2, 2] \to \mathbb{R}$ tal que

- $f(-2) = 1$, $f(-1) = -2$, $f(0) = -1$;
- sea decreciente en $[-2, -1]$;
- sea creciente en $]-1, 0]$;
- sea constante en $[0, 1]$;
- sea decreciente en $[1, 2]$.

Solución. Una posible gráfica para la función es:



□

Ejercicio 5. Utilizando algún asistente computacional, determine los intervalos de monotonía de las siguientes funciones:

a) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -x^3-1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x-x^2+2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^4-2x^2 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} f:\mathbb{R}\setminus\{2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2}{2-x} \end{aligned}$

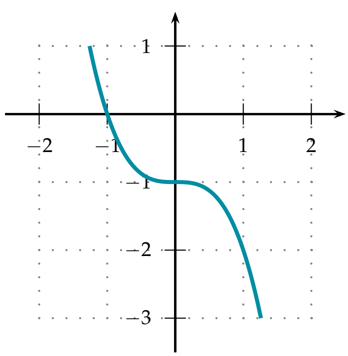
e) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2}{2+x^2} \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{2+x^2} \end{aligned}$

Solución.

a) Usando Geogebra tenemos que la gráfica de la función está dada por:

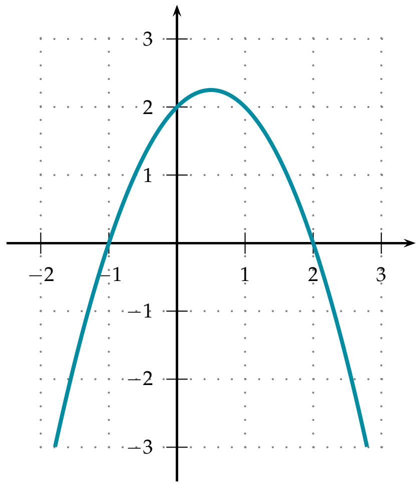
```
f(x):= -x^3-1
```



Así, la función f es decreciente en todo su dominio; es decir en $\mathbb{R}$.

b) Usando Geogebra tenemos que la gráfica de la función está dada por:

```
f(x):= x−x^2+2
```

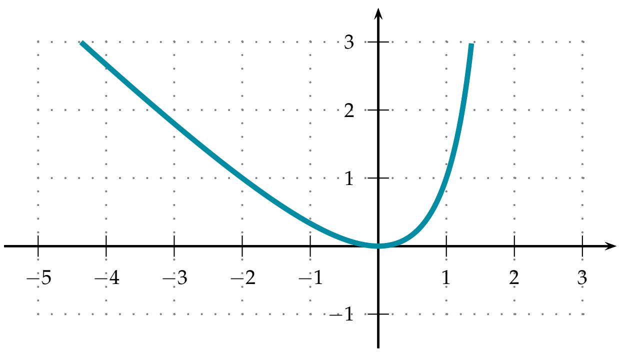


Así:

- la función f es creciente en el intervalo $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$;
- la función f es decreciente en el intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

d) Usando Geogebra tenemos que la gráfica de la función está dada por:

```
f(x):= x^2/(2−x)
```



Así:

- la función f es decreciente en el intervalo $]-\infty, 0[$;
- la función f es creciente en el intervalo $]0, +\infty[$. $\square$

2. Transformación de funciones

Ejercicio 6. Use la gráfica de la función definida por $f(x) = x^2$ para graficar las funciones definidas por

a) $g(x) = x^2 + 1$

b) $g(x) = (x-1)^2$

c) $g(x) = -x^2$

d) $g(x) = (x-1)^2 + 3$

Ejercicio 7. Considere la función f definida en cada literal. Si las transformaciones indicadas se aplican a su gráfica (en el orden dado), escriba la ecuación para la gráfica final.

a) $f(x) = x^2$; desplazar hacia arriba 3 unidades.

b) $f(x) = |x|$; desplazar 3 unidades a la derecha y desplazar 1 unidad hacia arriba.

c) $f(x) = x^2$; desplazar 2 unidades a la izquierda y reflejar en el eje x.

d) $f(x) = x^2$; desplazar 2 unidades hacia arriba y reflejar en el eje x.

e) $f(x) = x^2$; reflejar en el eje x y desplazar 2 unidades a la izquierda.

f) $f(x) = x^2$; alargar verticalmente en un factor de 2, desplazar hacia abajo 2 unidades y desplazar 3 unidades a la derecha.

g) $f(x) = |x|$; contraer verticalmente en un factor de $\frac{1}{2}$; desplazar a la izquierda 1 unidad y desplazar hacia arriba 3 unidades.

Ejercicio 8. Dibujar, en un mismo gráfico, las funciones definidas por:

a) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

b) $g(x) = \sqrt[4]{x+5}$

c) $h(x) = 2\sqrt[4]{x+5}$

d) $k(x) = 4 + 2\sqrt[4]{x+5}$

3. Modelamiento con funciones

Ejercicio 9. Se quiere construir una caja sin tapa de base cuadrada que tenga $1000\ \text{cm}^3$ de capacidad.

a) Modele el área lateral de la caja en función de la longitud de su base.

b) Si la base de la caja mide 5 centímetros, ¿cuál es el área de la caja?

c) ¿Cuál es el área mínima que puede tener la caja?

Solución.

a) Para el modelamiento, consideremos lo siguiente:

Variables:

- h: altura de la caja, en cm;
- x: longitud del lado de la base de la caja, en cm;
- $A(x)$: área lateral de la caja, en función de la longitud del lado de la base, en cm^2.

Planteamiento: Tenemos que la función del área es:

$$\begin{aligned} A :]0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 4xh. \end{aligned}$$

Ahora, para que la caja tenga $1000\ \text{cm}^3$ es necesario que

$$x^2 h = 1000,$$

de donde

$$h = \frac{1000}{x^2},$$

con esto, la función A nos queda

$$\begin{aligned} A :]0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 4x\left(\frac{1000}{x^2}\right) = x^2 + \frac{4000}{x}. \end{aligned}$$

b) Evaluemos la función A en 5,

$$A(5) = 5^2 + \frac{4000}{5} = 825.$$

Por lo tanto, el área de la caja cuando el lado de la base mide 5 cm es de 825 cm^2.

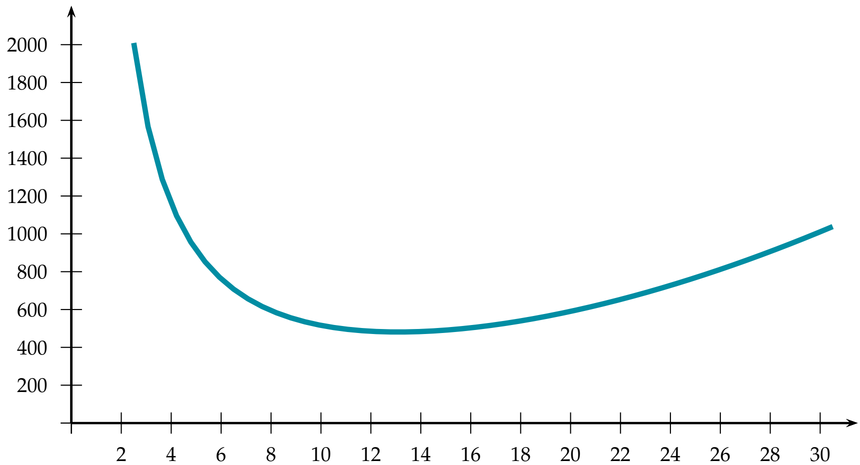
c) Utilizando GeoGebra, definamos la función y busquemos sus extremos:

```
A(x):= x^2 + 4000/x
Extremo(A(x))
```

Obtenemos:

```
{(12.6,476.22)}
```

junto con el gráfico



Con esto, tenemos que A alcanza un mínimo en 12,6 y el mínimo es 476,22. Así, el área mínima que puede tener la caja es de 476,22 centímetros cuadrados.

□

EJERCICIO 10. El gerente de una fábrica de muebles encontró que cuesta \$2200 fabricar 100 sillas en un día y \$4800 producir 300 sillas en un solo día. Exprese el costo en función del número de sillas producidas, suponiendo que es lineal. A continuación trace la gráfica.

EJERCICIO 11. En la superficie del océano, la presión del agua es la misma que la presión del aire por encima del agua, 1,0 atm. Debajo de la superficie, la presión del agua aumenta 0,02 atm por cada 3 m de descenso.

a) Exprese la presión del agua en función de la profundidad bajo la superficie del océano.

b) ¿A qué profundidad la presión es de 2 atm?

EJERCICIO 12. El costo mensual de conducir un coche depende del número de kilómetros recorridos. Se encontró que en mayo le costó \$380 conducir 700 km y en junio le costó \$460 conducir 1200 km.

a) Exprese el costo como una función de la distancia recorrida, suponiendo que en una relación lineal da un modelo adecuado.

b) Utilice el inciso *a*) para predecir el costo de conducir 3000 km por mes.

c) Dibuje la gráfica de la función lineal. ¿Qué representa la pendiente?

d) ¿Por qué una función lineal es un modelo adecuado en esta situación?

Solución.

a) Para el modelamiento, consideremos lo siguiente:

Variables:

- x : distancia recorrida en kilómetros;
- $C(x)$: costo en función de la distancia recorrida, en dólares.

Planteamiento: Tenemos que

$$C(700) = 380 \qquad \text{y} \qquad C(1200) = 460; \tag{1}$$

además, al ser una relación lineal, se tiene que

$$C(x) = ax + b,$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son los parámetros a determinar. Así, por (1) y dado que es una relación lineal tenemos que

$$C(700) = a(700) + b = 380 \qquad \text{y} \qquad C(1200) = a(1200) + b = 460.$$

Con esto, tenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} 700a + b & = 380, \\ 1200a + b & = 460; \end{cases}$$

cuya solución es $a = \frac{4}{25}$ y $b = 268$. Por lo tanto, la función afín tal que $C(700) = 380$ y $C(1200) = 460$ es

$$\begin{aligned} C\colon [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto C(x) = \frac{4}{25}x + 268. \end{aligned}$$

b) Usando el inciso *a*), tenemos que el costo en función de la distancia recorrida está dado por:

$$C(x) = \frac{4}{25}x + 268.$$

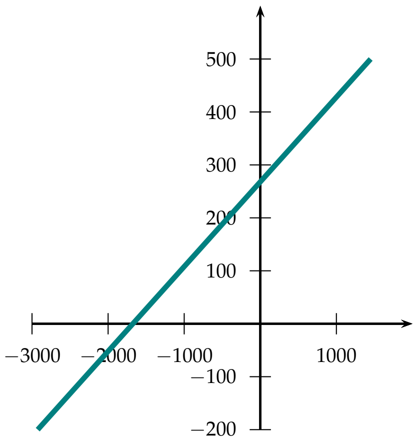
Así, recorriendo 3000km por mes tenemos que

$$C(3000) = \frac{4}{25}(3000) + 268 = 748.$$

Por lo tanto, el costo de conducir 3000km por mes es de $748.

c) Usando Geogebra, tenemos que la gráfica está dada por:

```
C(x):=4/25x+268
```



La pendiente representa la razón de cambio entre la distancia recorrida y el costo por recorrer la misma; es decir, el costo por kilómetro recorrido.

d) Notemos que el costo está únicamente en función de la distancia recorrida; de esta manera, la razón de cambio es constante y la función que modela una situación con una razón de cambio constante es un modelo lineal. □

EJERCICIO 13. El costo en dólares por producir x metros de cierta tela está dado por la función:

$$C(x) = 1500 + 3x + 0{,}02x^2 + 0{,}0001x^3.$$

a) Encuentre $C(10)$ y $C(100)$.

b) ¿Qué representan sus respuestas a la parte *a*)?

c) Encuentre $C(0)$. (Este número representa los costos fijos).

Solución.

a) Usando Geogebra, tenemos que

```
C(x):=1500+3x+0.02x^2+0.0001x^3
```
$\rightarrow \mathbf{C(x)} := \frac{1}{10000}\,\mathbf{x^3} + \frac{1}{50}\,\mathbf{x^2} + \mathbf{3\,x} + \mathbf{1500}$

```
ValorNumerico(C(10))
```
$\rightarrow$ **1532,1**

```
ValorNumerico(C(100))
```
$\rightarrow$ **2100**

Así, tenemos que

$$C(10) = 1532{,}1 \qquad \text{y} \qquad C(100) = 2100.$$

b) Tenemos que las respuestas de la parte *a)* representan los costos, en dólares, de producir 10 y 100 metros de tela respectivamente. Es decir, producir 10 metros de tela cuesta \$1532.1 y producir 100 metros de tela cuesta \$2100.

c) Tenemos que

$$C(0) = 1500 + 3(0) + 0{,}02(0) + 0{,}0001(0) = 1500.$$

Así, tenemos que los costos fijos son iguales a \$1500. □

EJERCICIO 14. Carol tiene 700 metros de cerca para cercar un corral rectangular para caballos.

a) Encuentre una función que modele el área del corral en términos del ancho del corral.

b) Encuentre las dimensiones del rectángulo que lleve al máximo el área del corral.

Solución.

a) Para el modelamiento, consideremos lo siguiente:

Variables:

- x : ancho del corral;
- y : largo del corral;
- $A(x)$: área del corral.

Planteamiento: Tenemos que el perímetro es igual a 700 metros y está dado por la suma de los lados del corral rectangular

$$700 = 2x + 2y. \tag{2}$$

Por otra parte, el área del corral está dada por

$$x \cdot y;$$

despejando el largo de la ecuación (2), se tiene que

$$y = \frac{700 - 2x}{2}.$$

Reemplazando la expresión anterior, se tiene que el área del corral en términos del ancho está dada por

$$A(x) = \frac{700x - 2x^2}{2}.$$

b) Usando Geogebra, encontramos el extremo de la función

```
A(x):=(700x-2x^2)/2
```
$\rightarrow \mathbf{A(x)\ :=\ -x^2 + 350\ x}$

```
Extremo(A(x))
```
$\rightarrow \{(\mathbf{175, 30625})\}$

Así, para $x = 175\,\text{m}$ y $y = 175\,\text{m}$ se tiene la máxima área del corral y esta es igual a $30\,625\text{m}^2$. $\square$

EJERCICIO 15. Un canal para agua llovediza se forma doblando hacia arriba los lados de una lámina metálica rectangular de 75 cm de ancho.

a) Encuentre una función que modele el área de sección transversal del canal en términos de la longitud del doblez.

b) Encuentre el valor de la longitud del doblez que lleve al máximo el área de sección transversal del canal.

c) ¿Cuál es la máxima área de sección transversal del canal?

EJERCICIO 16. Un cobertizo almacén rectangular abierto, formado por dos lados verticales de cuatro pies de ancho y un techo plano, se va a construir adjunto a una estructura ya existente. El techo plano está hecho de hojalata y cuesta \$5 por pie cuadrado, y los dos lados están hechos de madera contrachapada que cuesta \$2 por pie cuadrado.

a) Si se dispone \$400 para la construcción, exprese la longitud como función de la altura

b) Exprese el volumen dentro del cobertizo como función de la altura

Solución.

a) Consideremos lo siguiente:

Variables:

- x : altura del cobertizo en pies;
- y : longitud del cobertizo en pies;
- V : volumen del cobertizo en pies cúbicos.

Planteamiento: Tenemos que el área de cada lado está dada por

$$4 \cdot x;$$

de donde, como tenemos 2 lados y costo por pie cuadrado del material es de \$2; entonces, se tiene que el costo del material necesario para los lados es de

$$2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot x = 16x.$$

Por otra parte, el costo del material para el techo está dado por

$$5 \cdot 4 \cdot y = 20y.$$

Por lo tanto, como el presupuesto total para la construcción es de \$400; se tiene que

$$400 = 16x + 20y.$$

Despejando, tenemos que la longitud en función de la altura está dada por:

$$y(x) = 20 - \frac{4}{5}x.$$

b) Notemos que el volumen del cobertizo, está dado por el producto de su ancho, altura y longitud. Por lo tanto, se tiene que

$$V = 4 \cdot x \cdot y.$$

Por el literal anterior, sabemos que $y = 20 - \frac{4}{5}x$, reemplazando esto en la expresión anterior; tenemos que, el volumen en función de la altura está dador por:

$$V(x) = 4x\left(20 - \frac{4}{5}x\right). \qquad \square$$

EJERCICIO 17. Se quiere construir una caja sin tapa de base cuadrada que tenga 1000 cm^3 de capacidad de tal forma que su área lateral sea mínima. ¿Qué dimensiones debe tener?

Solución. Consideremos lo siguiente:

- x: longitud del lado de la base de la caja, en cm;
- $A(x)$: área lateral de la caja, en función de la longitud del lado de la base, en cm^2.

Tenemos que la función del área es:

$$\begin{aligned} A\colon]0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 4x\left(\frac{1000}{x^2}\right) = x^2 + \frac{4000}{x}. \end{aligned}$$

Derivando esta función, tenemos, para $x \in \,]0, +\infty[$:

$$A'(x) = 2x - \frac{8000}{x^2}.$$

Buscamos puntos críticos, para esto, resolvemos la ecuación $A'(x) = 0$, con lo cual tenemos que

$$x = \sqrt[3]{4000} \approx 15{,}874.$$

Además, tenemos que la altura es aproximadamente 3,968, por lo tanto, las dimensiones para tener área lateral mínima son 3,968 cm de alto y 15,874 cm del lado de la base. □

EJERCICIO 18. Un comerciante encuentra que puede vender 4 000 metros de cierta tela cada mes. El precio normal es de 6 dólares por metro. El comerciante calcula que las ventas mensuales aumentan 250 metros por cada 15 centavos de dólar de descuento en el precio por metro. Encuentre el precio por metro que daría el máximo ingreso al comerciante.

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- x: descuento en dólares;
- $I(x)$: ingresos en función del descuento en dólares.

Tenemos que la función del ingreso es:

$$\begin{aligned} I\colon [0,6] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \left(4000 + 250 \cdot \frac{x}{15}\right)(6 - x). \end{aligned}$$

Derivando esta función, tenemos, para $x \in \,]0, 6[$:

$$I'(x) = \frac{50(6-x)}{3} - \frac{50x}{3} - 4000.$$

Buscamos puntos críticos, para esto, resolvemos la ecuación $I'(x) = 0$, con lo cual tenemos que

$$x = -117.$$

Sin embargo, este valor no es parte del dominio de la función. Así, lo descartamos y consideramos los extremos del dominio como se muestra en la siguiente tabla:

x	$I(x)$
0	24000
6	0

Por lo tanto, el precio por metro de tela para obtener ingreso máximo es de \$6. □

> **EJERCICIO 19.** Con el propósito de tener mayor seguridad, un fabricante planea cercar un área de almacenamiento rectangular de 18 000 metros cuadrados, que es adyacente a un edificio, el cual se utilizará como uno de los lados del área cercada. La cerca paralela al edificio colinda con una carretera y costará \$3 por metro instalado, mientras que de los otros dos lados la cerca costará \$2 por metro instalado. Encuentre la cantidad de cada tipo de cerca, de manera que el costo total sea mínimo. ¿Cuál es el costo mínimo?

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- x: longitud de la cerca en metros;
- y: ancho de la cerca en metros;
- $C(x)$: costo de construir la cerca en función de la longitud de la cerca.

Tenemos que la función del costo de la cerca es:

$$\begin{aligned} C\colon [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x+2x+2y. \end{aligned} \tag{3}$$

Por otra parte, para que el área sea de 18 000 m necesitamos que

$$\begin{aligned} xy &= 18000 \\ y &= \frac{18000}{x}. \end{aligned} \tag{4}$$

Así, reemplazando (4) en (3), tenemos que:

$$\begin{aligned} C\colon [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 5x+5\frac{18000}{x} \end{aligned}$$

de donde; derivando esta función, para $x \in]0,+\infty[$:

$$C'(x) = 5 - \frac{36000}{x^2}.$$

Buscamos puntos críticos, para esto, resolvemos la ecuación $C'(x) = 0$, con lo cual tenemos que

$$x_1 \approx -84{,}8528 \qquad \text{y} \qquad x_2 \approx 84{,}8528.$$

Notemos que x_1 está fuera del dominio de la función; así, lo descartamos y trabajamos con x_2. Derivando nuevamente la función, tenemos que

$$C''(x) = \frac{72000}{x^3}.$$

Evaluando en x_2

$$C''(84{,}8528) \approx 0{,}117851.$$

Como el resultado es positivo, entonces C alcanza un mínimo local en $x \approx 84{,}8528$, es decir, se requieren aproximadamente 84,85 m del tipo de material que da a la calle. Por otra parte, reemplazando en (4), tenemos que

$$y = \frac{18000}{84{,}85} \approx 212{,}139$$

es decir, se requieren 212,13 m del otro tipo de material, aproximadamente. □

4. Concepto de derivada

Ejercicio 20. Determinar

a) $\left(x^2 + x\right)'$

b) $\left(x^2\sqrt{x}\right)'$

c) $\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)'$

d) $\left(5x^{-3}\right)'$

e) $\left(x^3 - 2x - 3\right)'$

f) $\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)'$

Solución.

a) $\left(x^2 + x\right)' = 2x + 1.$

b) $\left(x^2\sqrt{x}\right)' = (x^2)'\sqrt{x} + x^2(\sqrt{x})' = 2x\sqrt{x} + x^2\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

c) $\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)' = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}.$

d) $\left(5x^{-3}\right)' = 5\left(x^{-3}\right)' = 5(-3x^{-4}) = -15x^{-4}.$

e) $\left(x^3 - 2x - 3\right)' = 3x^2 - 2x.$

f) $\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)' = \dfrac{(x)'(x^2+1) - (x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(x^2+1) - (x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$

□

EJERCICIO 21. Determinar

a) $\left(3x^3 - 5x^2 + 2x - 3\right)'$

b) $\left((x^3 + 7x - 3)(x^2 - 4x + 1)\right)'$

c) $\left(\dfrac{1}{x^3 + x^2}\right)'$

d) $\left(\dfrac{5}{x^4 + 3}\right)'$

e) $\left(x^3 - 2x^{-3} + \dfrac{4}{x^2}\right)'$

f) $\left(\dfrac{x^2 - 3}{x^3 - 2x}\right)'$

Solución.

a) $\left(3x^3 - 5x^2 + 2x - 3\right)' = 9x^2 - 10x + 2.$

b) $\left((x^3 + 7x - 3)(x^2 - 4x + 1)\right)' = (3x^2 + 7)(x^2 - 4x + 1) + (x^3 + 7x - 3)(2x - 4).$

c) $\left(\dfrac{1}{x^3 + x^2}\right)' = \dfrac{-2x - 3x^2}{(x^3 + x^2)^2}.$

d) $\left(\dfrac{5}{x^4 + 3}\right)' = -\dfrac{5}{(x^4 + 3)^2}.$

e) $\left(x^3 - 2x^{-3} + \dfrac{4}{x^2}\right)' = 3x + 6x^{-4} - 8x^{-3}.$

f) $\left(\dfrac{x^2 - 3}{x^3 - 2x}\right)' = \dfrac{-x^4 + 7x^2 - 6}{(x^3 - 2x)^2}.$ □

EJERCICIO 22. Determinar

a) $\left((x^3 + 2x - 1)^2\right)'$

b) $\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)'$

c) $\left(\dfrac{1}{(x^2 + 3)^3}\right)'$

d) $\left(x\sqrt{x^4 + 1}\right)'$

Solución.

a)
$$\begin{aligned}\left((x^3 + 2x - 1)^2\right)' &= 2(x^3 + 2x - 1)(x^3 + 2x - 1)' \\ &= 2(x^3 + 2x - 1)(3x^2 + 2)\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}(x^2 + 1)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}(2x)\end{aligned}$$

c) $$\left(\frac{1}{(x^2+3)^3}\right)' = \left((x^2+3)^{-3}\right)'$$
$$= -3(x^2+3)^{-4}(2x)$$

d) $$\left(x\sqrt{x^4+1}\right)' = (x)'\sqrt{x^4+1} + x(\sqrt{x^4+1})'$$
$$= \sqrt{x^4+1} + x\frac{1}{2\sqrt{x^4+1}}(x^4+1)'$$
$$= \sqrt{x^4+1} + x\frac{1}{2\sqrt{x^4+1}}(4x^3)$$
$$= \sqrt{x^4+1} + \frac{2x^4}{\sqrt{x^4+1}}$$

□

EJERCICIO 23. Determinar

a) $\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^3\right)'$

b) $\left((1-\sqrt{x})^{-1}\right)'$

c) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'$

d) $\left(\sqrt{3x^2+1} - x^2(x^2-3x+1)\right)'$

Solución.

a) $$\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^3\right)' = 3\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\left(1+\frac{1}{x}\right)'$$
$$= 3\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

b) $$\left((1-\sqrt{x})^{-1}\right)' = -(1-\sqrt{x})^{-2}(1-\sqrt{x})'$$
$$= -(1-\sqrt{x})^{-2}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'$$

c) $$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{(x)'\sqrt{x^2+1} - x(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1}$$
$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - x\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)'}{x^2+1}$$
$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}(2x)}{x^2+1}$$

d) $$\left(\sqrt{3x^2+1} - x^2(x^2-3x+1)\right)' = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} - x^2(2x-3) - 2x(x^2-3x+1)$$

$\square$

EJERCICIO 24. Determinar

a) $\left(\operatorname{sen}\left(x^2+3x+1\right)\right)'$

b) $\left(\cos\left((x+1)(x^3+1)\right)\right)'$

c) $\left(\ln\left(x^2+3x+1\right)\right)'$

d) $\left(\exp\left(x^2+3x+1\right)\right)'$

e) $\left(e^{x^2+3x}\right)'$

f) $(\cos(\operatorname{sen}(x)))'$

g) $(\cos(\ln(x)))'$

h) $(\cos(\ln(x^2+1)))'$

i) $\left(\exp\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)'$

5. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

EJERCICIO 25. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2+3x-2 \end{aligned}$$

en el punto $(0,-2)$.

Solución. Primero, determinemos la derivada de la función: para $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$f'(x) = 2x+3$$

evaluamos en el punto requerido:

$$f'(0) = 3.$$

Con esto, la ecuación de la recta tangente es

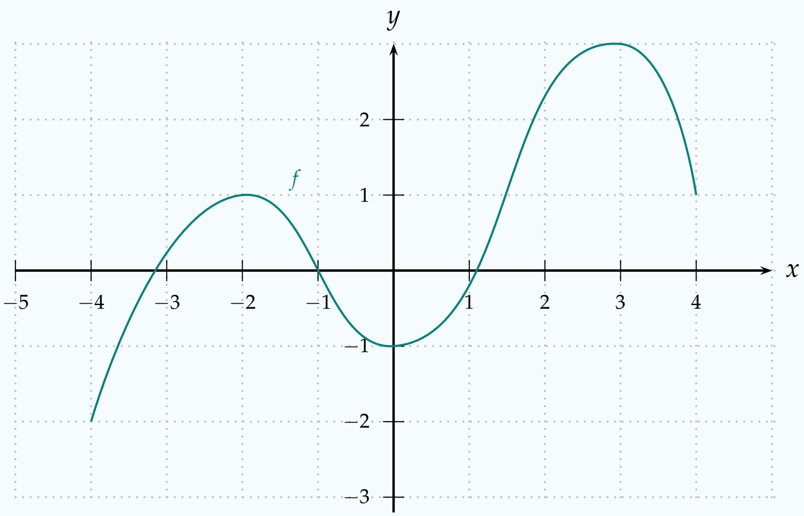
$$y = -2+3(x-0),$$

que equivale a

$$y = 3x-2.$$

$\square$

EJERCICIO 26. Suponga que la gráfica de una función derivable $f\colon [-4,4] \to \mathbb{R}$ es:



Conjeture los intervalos para los que la derivada es positiva. Además, conjeture los valores de x tal que $f'(x) = 0$.

Solución. Sabemos que la derivada de f es positiva implica que la función es creciente, dado que la función es creciente en $[-4, -2]$ y en $[0, 2]$, por lo tanto $f(x) > 0$ para $x \in \,]-4, -2[$ o $x \in \,]0, 2[$. □

6. Concepto de antiderivada

Ejercicio 27. Determine

$$\int x^3 \, dx.$$

Solución. Tenemos

$$\int x^3 \, dx = \frac{1}{4}x^4 + c$$

con $c \in \mathbb{R}$. Podemos comprobar esto en Geogebra:

```
Integral(x^3, x)
```

$\to \frac{1}{4}\mathbf{x^4} + \mathbf{c_1}$

□

EJERCICIO 28. Determine
$$\int (x^3 + e^x)\, dx.$$

Solución. Tenemos

$$\int (x^3 + e^x)\, dx = \int x^3\, dx + \int e^x\, dx = \frac{1}{4}x^4 + e^x + c$$

con $c \in \mathbb{R}$. Podemos comprobar esto en Geogebra:

```
Integral(x^3+e^x, x)
```
$\rightarrow \mathbf{e^x + \frac{1}{4}x^4 + c_1}$

$\square$

EJERCICIO 29. Determine

$$\int \left(\frac{1}{x^2} + 3\cos(x) \right) dx.$$

Solución. Tenemos

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{x^2} + 3\cos(x) \right) dx &= \int \frac{1}{x^2}\, dx + \int 3\cos(x)\, dx \\
&= \int x^{-2}\, dx + 3\int \cos(x)\, dx \\
&= -x^{-1} + 3\operatorname{sen}(x) + c \\
&= 3\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{x} + c
\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$. Podemos comprobar esto en Geogebra:

```
Integral(1/x^2+3cos(x), x)
```
$\rightarrow \mathbf{c_1 - \frac{1}{x} + 3}\operatorname{sen}(\mathbf{x})$

$\square$

EJERCICIO 30. Calcule $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\, dx$.

Solución. Tomemos el cambio de variable

$$u = 2x, \quad du = 2dx,$$

con el cual, obtenemos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(2x)\,dx &= \int \frac{\operatorname{sen}(u)}{2}\,du \\ &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(u)\,du \\ &= -\frac{1}{2}\cos(u) + c\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$. Finalmente, como $u = 2x$, se tiene que

$$\int \operatorname{sen}(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + c$$

con $c \in \mathbb{R}$. $\square$

EJERCICIO 31. Calcule $\int x\operatorname{sen}(x)\,dx$.

Demostración. Usemos integración por partes tomando

$$u = x, \quad du = dx$$

y

$$dv = \operatorname{sen}(x), \quad v = -\cos(x),$$

entonces

$$\begin{aligned}\int x\operatorname{sen}(x)\,dx &= -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx \\ &= -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + c \\ &= \operatorname{sen}(x) - x\cos(x) + c\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$\int x\operatorname{sen}(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) - x\cos(x) + c$$

con $c \in \mathbb{R}$. $\square$

EJERCICIO 32. Calcule $\int \operatorname{sen}^5(x)\cos^5(x)\,dx$.

Solución. Tenemos que

$$\int \operatorname{sen}^5(x)\cos^5(x)\,dx = \int \operatorname{sen}^5(x)\cos^4(x)\cos(x)\,dx;$$

así, como $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$ tenemos que

$$\int \operatorname{sen}^5(x)\cos^4(x)\cos(x)\,dx = \int \operatorname{sen}^5(x)(1-\operatorname{sen}^2(x))^2\cos(x)\,dx.$$

De donde, tomando

$$u = \operatorname{sen}(x) \qquad \text{y} \qquad du = \cos(x)dx$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5(x)(1-\operatorname{sen}^2(x))^2\cos(x)\,dx &= \int u^5(1-u^2)^2\,du\\ &= \int u^5 - 2u^7 + u^9\,du\\ &= \frac{u^6}{6} - \frac{2u^8}{8} + \frac{u^{10}}{10} + c\\ &= \frac{u^{10}}{10} - \frac{u^8}{4} + \frac{u^6}{6} + c\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$. Finalmente, como $u = \operatorname{sen}(x)$, se tiene que

$$\int \operatorname{sen}^5(x)\cos^5(x)\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{10}(x)}{10} - \frac{\operatorname{sen}^8(x)}{4} + \frac{\operatorname{sen}^6(x)}{6} + c$$

con $c \in \mathbb{R}$. □

EJERCICIO 33. Calcule $\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx$.

Solución. Notemos que

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

De donde, con la identidad anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx &= \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx\\ &= \int \frac{dx}{2} - \int \frac{\cos(2x)}{2}\,dx\\ &= \frac{x}{2} - \int \frac{\cos(2x)}{2}\,dx.\end{aligned}$$

Tomando el siguiente cambio de variable

$$u = 2x \qquad \text{y} \qquad du = 2dx;$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{cos(2x)}{2}\,dx &= \int \frac{\cos(u)}{4}\,du\\ &= \frac{1}{4}\operatorname{sen}(u)+c\end{aligned}$$

con $x \in \mathbb{R}$. Así, como $u = 2x$,

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + c$$

con $c \in \mathbb{R}$. □

EJERCICIO 34. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - 27x}$.

Solución. Comencemos factorando el denominador, de manera que obtenemos

$$\int \frac{dx}{x^4 - 27x} = \int \frac{dx}{x(x-3)(x^2+3x+9)}.$$

y descompongamos la fracción en fracciones parciales:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x-3)(x^2+3x+9)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{Cx+D}{x^2+3x+9}\\ &= \frac{A(x-3)(x^2+3x+9) + Bx(x^2+3x+9)}{x(x-3)(x^2+3x+9)}\\ &\quad + \frac{x(Cx+D)(x-3)}{x(x-3)(x^2+3x+9)}\\ &= \frac{(A+B+C)x^3 + (3B+D-3C)x^2}{x(x-3)(x^2+3x+9)}\\ &\quad + \frac{(9B-3D)x - 27A}{x(x-3)(x^2+3x+9)}.\end{aligned}$$

Con lo que, igualando los coeficientes, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 0 = A + B + C\\ 0 = 3B + D - 3C\\ 0 = 9B - 3D\\ 1 = -27A.\end{cases}$$

Resolviendo este sistema, se obtiene:

$$A = -\frac{1}{27}, \quad B = \frac{1}{81}, \quad C = \frac{2}{81}, \quad \text{y} \quad D = \frac{1}{27}.$$

Luego,

$$\frac{1}{x(x-3)(x^2+3x+9)} = -\frac{1}{27x} + \frac{1}{81(x-3)} + \frac{2x+3}{81(x^2+3x+9)},$$

de manera que

$$\int \frac{dx}{x(x-3)(x^2+3x+9)} = -\frac{1}{27}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{81}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{1}{81}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+9}\,dx.$$

Con esto, aplicando las fórmulas presentadas en el resumen anterior, tenemos finalmente que

$$\int \frac{dx}{x^4-27x} = -\frac{1}{27}\ln|x| + \frac{1}{81}\ln|x-3| + \frac{1}{81}\ln|x^2+3x+9| + K,$$

con $K \in \mathbb{R}$. □

EJERCICIO 35. Calcular $\displaystyle\int_0^\pi x\cos(x)\,dx$.

Solución. Tomando

$$u = x, \qquad du = dx$$

y

$$v = \operatorname{sen}(x) \qquad dv = \cos(x)\,dx$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x\cos(x)\,dx &= x\operatorname{sen}(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\,dx \\
&= \pi\operatorname{sen}(\pi) - 0\operatorname{sen}(0) + \cos(x)\Big|_0^\pi \\
&= \cos(\pi) - \cos(0) \\
&= -2.
\end{aligned}$$

□

EJERCICIO 36. Calcular $\displaystyle\int_{-1}^1 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$.

Solución. Tomemos el cambio de variable

$$u = x^3+1, \qquad du = 3x^2\,dx$$

con lo cual se tiene

x	u
-1	0
1	2

con esto

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx &= \int_0^2 \sqrt{u}\,du\\ &= \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^2\\ &= \frac{2}{3}(2)^{3/2}-\frac{2}{3}(0)^{3/2}\\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$ $\square$

7. Interpretación geométrica de la antiderivada

Ejercicio 37. Dadas las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [-1,3] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2+1 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} g\colon [-1,3] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -x^4, \end{aligned}$$

determine el área comprendida entre las gráficas de estas funciones.

Ejercicio 38. Encontrar el área de la región acotada por la parábola de ecuación $y = 2 - x^2$ y la recta de ecuación $y = -x$.

Ejercicio 39. Encontrar el área de la región en el primer cuadrante, que está acotada por arriba por la curva de ecuación $y = \sqrt{x}$ y por abajo por el eje x y la recta de ecuación $y = x - 2$.

Ejercicio 40. Dadas las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [-3,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2-4 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} g\colon [-3,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -x^2-2x, \end{aligned}$$

determine el área comprendida entre las gráficas de estas funciones.

EJERCICIO 41. Dadas las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [-2,3] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^3}{3} - x \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [-2,3] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{3}, \end{aligned}$$

determine el área comprendida entre las gráficas de estas funciones.

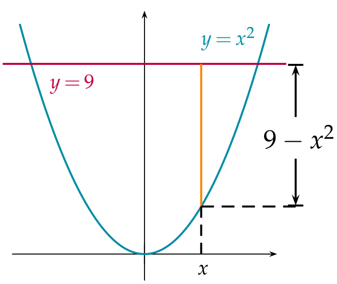
1. CÁLCULO DE ÁREAS Y VOLÚMENES

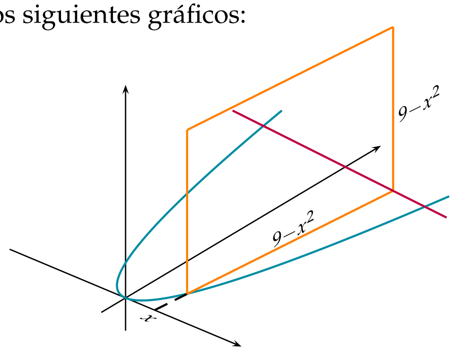
EJERCICIO 1. Calcular el volumen del sólido cuya base está en el plano xy y es limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$, $y = 9$, y sus secciones transversales perpendiculares al eje x tienen la forma de un cuadrado.

Solución. Se realiza un corte al sólido a una altura x, la sección transversal que se obtiene es un cuadrado cuya base mide $9 - x^2$, por lo tanto, el área de la sección transversal es:

$$A(x) = (9 - x^2)^2.$$

Para ilustrar esto, consideremos los siguientes gráficos:





Además, los cortes del sólido se pueden realizar desde $x = -3$ hasta $x = 3$, por lo tanto, el volumen del sólido es

$$\int_{-3}^{3} A(x)\,dx = \int_{-3}^{3} (9 - x^2)^2\,dx = \frac{1296}{5} = 259{,}2.$$

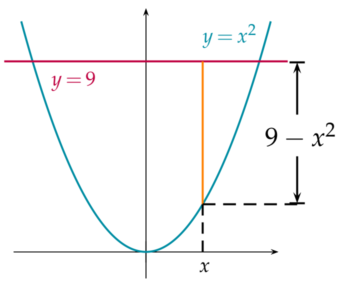
Así, el volumen del sólido es de aproximadamente 259,2 unidades cúbicas. □

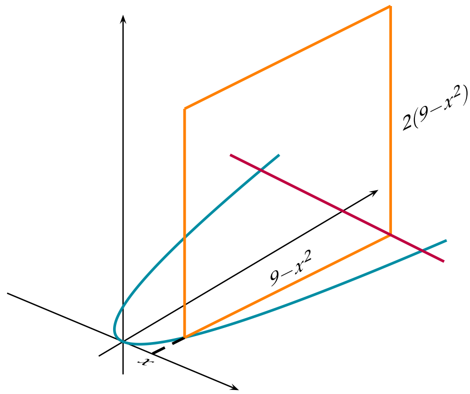
EJERCICIO 2. Calcular el volumen del sólido cuya base está en el plano xy y es limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$, $y = 9$, y sus secciones transversales son perpendiculares al eje x y tienen la forma de un rectángulo cuya altura es el doble de su base.

Solución. Se realiza un corte al sólido a una altura x, la sección transversal que se obtiene es un rectángulo cuya altura es igual al doble de su base que mide $2(9-x^2)$, por lo tanto, el área de la sección transversal es:

$$A(x) = 2(9-x^2)^2.$$

Para ilustrar esto, consideremos los siguientes gráficos:





Además, los cortes del sólido se pueden realizar desde $x = -3$ hasta $x = 3$, por lo tanto, el volumen del sólido es

$$\int_{-3}^{3} A(x)\,dx = \int_{-3}^{3} 2(9-x^2)^2\,dx \approx \frac{2592}{5} = 518{,}4.$$

Así, el volumen del sólido es de aproximadamente 518,4 unidades cúbicas. □

EJERCICIO 3. Calcular el volumen del sólido cuya base está en el plano xy y es limitada por las gráficas de las ecuaciones $x = y^2$, $x = 9$, y sus secciones transversales son perpendiculares al eje x y tienen la forma de un semicírculo.

EJERCICIO 4. Determinar el volumen de una pirámide de base elipsoidal con semieje mayor 3 y semieje menor 5, y altura 10.

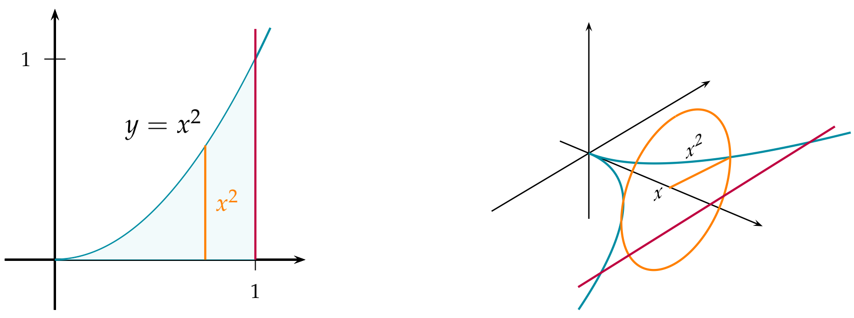
EJERCICIO 5. Determinar el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región plana limitada por la parábola de ecuación $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$ al rededor del eje x.

Ver: `https://www.geogebra.org/m/BZWTCPfd`

Solución. Se realiza un corte al sólido a una altura x, la sección transversal que se obtiene es un círculo cuyo radio mide x^2, por lo tanto, el área de la sección transversal es:

$$A(x) = \pi(x^2)^2.$$

Para ilustrar esto, consideremos los siguientes gráficos:



Además, los cortes del sólido se pueden realizar desde $x = 0$ hasta $x = 1$, por lo tanto, el volumen del sólido es

$$\int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2)^2\,dx = \frac{\pi}{5} \approx 0{,}63.$$

Así, el volumen del sólido es de aproximadamente 0,63 unidades cúbicas. □

EJERCICIO 6. Determinar el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región plana limitada por la parábola de ecuación $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$ al rededor del eje y.

EJERCICIO 7. Determinar el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región plana limitada por la parábola de ecuación $y = \operatorname{sen}(x)$, entre $x = 0$ y $x = \pi$, al rededor del eje x.

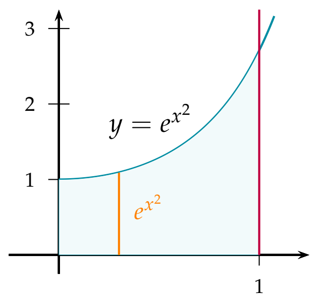
EJERCICIO 8. Determinar el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región plana limitada por la parábola de ecuación $y = x^2$ y la recta de ecuación $y = x$, entre $x = 0$ y $x = 1$, al rededor del eje x.

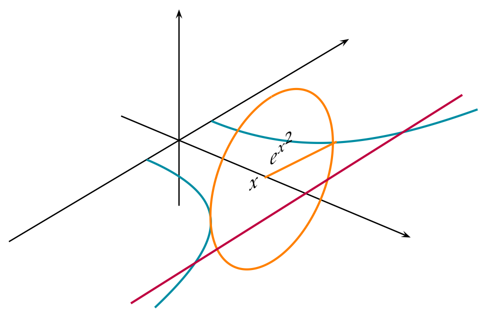
EJERCICIO 9. Determinar el volumen del sólido de revolución generado al hacer rotar la región plana limitada por las curvas de ecuación: $y = e^{x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, al rededor del eje x.

Solución. Se realiza un corte al sólido a una altura x, la sección transversal que se obtiene es un círculo cuyo radio mide e^{x^2}, por lo tanto, el área de la sección transversal es:

$$A(x) = \pi \left(e^{x^2}\right)^2.$$

Para ilustrar esto, consideremos los siguientes gráficos:





Además, los cortes del sólido se pueden realizar desde $x = 0$ hasta $x = 1$, por lo tanto, el volumen del sólido es

$$\int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi \left[e^{x^2}\right]^2 dx = \int_0^1 \pi e^{2x^2}\,dx \approx 7{,}43.$$

Así, el volumen del sólido es de aproximadamente 7,43 unidades cúbicas. □

2. Vectores

Ejercicio 10. Determine el módulo y la dirección de los siguientes vectores:

a) $(2,3)$

b) $(-2,3)$

c) $(2,-1)$

d) $(-2,-4)$

e) $(0,3)$

f) $(-4,0)$

g) $(4,-5)$

h) $(3,-1)$

i) $3\vec{i} - 2\vec{j}$

j) $-3\vec{i} - 2\vec{j}$

k) $-4\vec{i} + 3\vec{j}$

l) $2\vec{i} + 3\vec{j}$

m) $2\vec{i}$

n) $-2\vec{j}$

ñ) $7\vec{i} - 4\vec{j}$

o) $\vec{i} - 4\vec{j}$

Solución.

a) Notemos por A al vector $(2,3)$. Así, su módulo está dado por:

$$|\vec{A}| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}61;$$

y su dirección está dada por

$$\theta = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56{,}31^\circ.$$

c) Notemos por B al vector $(2,-1)$. Así, su módulo está dado por:

$$|\vec{B}| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}24.$$

y su dirección está dada por

$$\theta = \arctan\left(\frac{-1}{2}\right) \approx -26{,}57^\circ.$$

m) Notemos por C al vector $2\vec{i} = (2,0)$. Así, su módulo está dado por:

$$|\vec{C}| = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2.$$

y su dirección está dada por

$$\theta = \arctan\left(\frac{0}{2}\right) = 0^\circ.$$

o) Notemos por D al vector $\vec{i} - 4\vec{j} = (1,-4)$. Así, su módulo está dado por:

$$|\vec{D}| = \sqrt{1^2+(-4)^2} = \sqrt{17} = 4{,}12.$$

y su dirección está dada por

$$\theta = \arctan\left(-\frac{4}{1}\right) = -75{,}96^\circ. \qquad \square$$

EJERCICIO 11. Expresar los siguientes vectores en forma polar:

a) $(2,3)$
b) $(-2,3)$
c) $(0,3)$
d) $(-4,0)$
e) $(4,-5)$
f) $(3,-1)$
g) $3\vec{i}-2\vec{j}$
h) $-3\vec{i}-2\vec{j}$
i) $2\vec{i}$
j) $-2\vec{j}$
k) $7\vec{i}-4\vec{j}$
l) $\vec{i}-4\vec{j}$

Solución.

a) Notemos por A al vector $(-2,3)$. Así, su módulo está dado por:

$$|\vec{A}| = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}61;$$

y su dirección está dada por

$$\theta = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + 180^\circ \approx 123{,}69^\circ.$$

Por lo tanto, el vector $\vec{A}$ expresado en coordenadas polares está dado por:

$$(3{,}61; 123{,}69^\circ).$$

d) Notemos por B al vector $(-4,0)$. Así, su módulo está dado por:

$$|\vec{B}| = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4;$$

y su dirección está dada por

$$\theta = \arctan\left(-\frac{0}{4}\right) + 180^\circ = 180^\circ.$$

Por lo tanto, el vector $\vec{B}$ expresado en coordenadas polares está dado por:

$$(4; 180^\circ).$$

i) Notemos por C al vector $2\vec{i} = (2,0)$. Así, su módulo está dado por:

$$|\vec{C}| = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2;$$

y su dirección está dada por

$$\theta = \arctan\left(\frac{0}{2}\right) = 0^\circ.$$

Por lo tanto, el vector $\vec{C}$ expresado en coordenadas polares está dado por:

$$(2; 0^\circ).$$

l) Notemos por D al vector $\vec{i} - 4\vec{j} = (1, -4)$. Así, su módulo está dado por:

$$|\vec{D}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17} = 4{,}12;$$

y su dirección está dada por

$$\theta = \arctan\left(-\frac{4}{1}\right) = -75{,}96^\circ.$$

Por lo tanto, el vector $\vec{D}$ expresado en coordenadas polares está dado por:

$$(4{,}12; -75{,}96^\circ).$$ □

Ejercicio 12. Expresar los siguientes vectores en forma cartesiana:

a) $(2; 0)$

b) $(5; \pi)$

c) $(1; 120^\circ)$

d) $(5; 60^\circ)$

e) $(3; 90^\circ)$

f) $(2; 45^\circ)$

g) $(1; 0^\circ)$

h) $(1; 100^\circ)$

i) $(2; -45^\circ)$

j) $(1; -25^\circ)$

k) $(4; -120^\circ)$

l) $(3; 10^\circ)$

Solución.

c) Notemos por A al vector de coordenadas polares $(1; 120^\circ)$; así, notemos que

$$A_x = 1\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad A_y = 1\,\mathrm{sen}(120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87.$$

Por lo tanto, la forma cartesiana del vector A está dada, aproximadamente, por $(-0{,}5, 0{,}87)$.

d) Notemos por B al vector de coordenadas polares $(5; 60^\circ)$; así, notemos que

$$B_x = 5\cos(60^\circ) = \frac{5}{2} = 2{,}5 \qquad \text{y} \qquad B_y = 1\,\mathrm{sen}(60^\circ) = \frac{5\sqrt{3}}{2} \approx 4{,}33.$$

Por lo tanto, la forma cartesiana del vector B está dada, aproximadamente, por $(2{,}5, 4{,}33)$. $\square$

1. OPERACIONES CON VECTORES

EJERCICIO 1. Un excursionista inicia un viaje primero caminando 25.0 km 45.0° al sureste desde su campamento base. En el segundo día camina 40,0 km en una dirección de 60.0° al noreste, punto en el cual descubre la torre de un guardabosque. a) Determine las componentes de los desplazamientos del excursionista en el primer y el segundo días. b) Determine las componentes del desplazamiento total del excursionista para el viaje. c) Encuentre la magnitud y la dirección del desplazamiento desde el campamento base.

Solución. Para el modelamiento, consideremos lo siguiente:

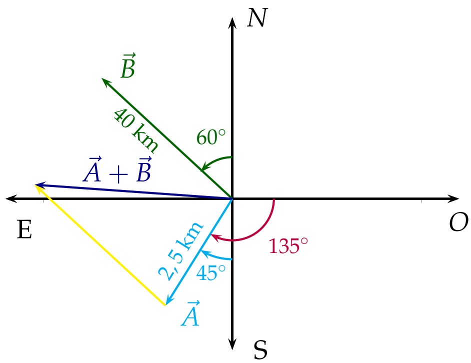
Variables: Llamemos:

- $\vec{A}$: desplazamiento del primer día;
- $\vec{B}$: desplazamiento del segundo día.

Con esto

$$\vec{A} = (25; -135^\circ) \qquad \text{y} \qquad \vec{B} = (40; 150^\circ).$$

Adicionalmente, consideremos el siguiente gráfico que ilustra los desplazamientos realizados por el excursionista durante su viaje:



a) Calculamos las componentes de cada vector. Para el desplazamiento del primer día:

$$\begin{aligned} A_x &= 25\cos(-135^\circ) \approx -17{,}68 \\ A_y &= 25\operatorname{sen}(-135^\circ) \approx -17{,}68. \end{aligned}$$

Para el desplazamiento del segundo día:

$$\begin{aligned} B_x &= 40\cos(150^\circ) \approx -34{,}64 \\ B_y &= 40\operatorname{sen}(150^\circ) \approx 20 \end{aligned}$$

b) El desplazamiento total es igual a la suma de los vectores de los desplazamientos de cada día; es decir,

$$\begin{aligned} \vec{A} + \vec{B} &= (-17{,}68 - 34{,}64)\vec{\imath} + (-17{,}68 + 20)\vec{\jmath} \\ &= -52{,}32\vec{\imath} + 2{,}32\vec{\jmath}. \end{aligned}$$

Así, el desplazamiento total es el vector cuyas componentes son $-54{,}32$ y $2{,}32$.

c) Por el apartado *b*), sabemos que el vector $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ está dado por $-52{,}32\vec{\imath} + 2{,}32\vec{\jmath} = (-52{,}32, 2{,}32)$. Así, su módulo está dado por:

$$|\vec{C}| = \sqrt{(-52{,}32)^2 + 2{,}32^2} \approx 52{,}37;$$

y su dirección está dada por

$$\theta = \arctan\left(-\frac{52{,}37}{2{,}32}\right) \approx 177{,}46.$$

Por lo tanto, el vector $\vec{C}$ expresado en coordenadas polares está dado por:

$$(52{,}37; 177{,}46^\circ).$$ □

EJERCICIO 2. Una persona camina a 25.0° al noreste durante 3,10 km. ¿Qué tan lejos al norte y qué tan lejos al este tendría que caminar para llegar a la misma ubicación?

EJERCICIO 3. Un excursionista parte de su campamento y se mueve las distancias siguientes mientras explora sus alrededores: 75,0 m al norte, 250 m hacia el este, 125 m en un ángulo de 30,0° al noreste, y 150 m al sur. Encuentre su desplazamiento resultante desde su campamento (tome el este como la dirección x positiva y el norte como la dirección y positiva).

EJERCICIO 4. Resolver los ejercicio 35 y 39 de la sección de problemas del capítulo 3 del libro “Física para ciencias e ingeniría” de Serway.
`https://bit.ly/2S5Uu0a`

2. MOVIMIENTO EN UNA DIMENSIÓN

EJERCICIO 5. Una partícula se mueve de acuerdo a la función posición dada por $r(t) = 10t^2$, donde $r(t)$ está en metros y t en segundos. a) Encuentre la velocidad promedio para el intervalo de tiempo de 2,00 s a 3,00 s. b) Encuentre la velocidad promedio para el intervalo de tiempo de 2,00 s a 2,10 s.

EJERCICIO 6. Una atleta parte desde un extremo de una piscina de longitud 100 m en $t = 0$ y llega en el otro extremo en 50 s. Nada de regreso y llega a la posición de partida luego de 60 s. Si ella está nadando inicialmente en la dirección x positiva, determine sus velocidades promedio simbólicamente en la primera parte del nado, la segunda mitad del nado, y el recorrido redondo. ¿Cuál es su rapidez promedio para el recorrido redondo?

EJERCICIO 7. Se observa una partícula. Un segundo luego de iniciada la observación, se tiene que la partícula está a 5 cm del punto de referencia. Si se conoce que la partícula tiene velocidad constante de 2 cm/s, determinar su función de posición.

Solución. Tomemos $t_1 = 0$ el instante en el que se inicia la observación de la partícula y $t_2 = 1$ un segundo luego de iniciada la observación; así, tenemos que

$$r(t_2) = 5.$$

Por otra parte, como la velocidad es constante, entonces esta es igual a la velocidad promedio y, más aún,

$$2 = \overline{v}(t_1, t_2) = \frac{5 - r(t_1)}{1} \quad \Longrightarrow \quad r(t_1) = 3.$$

Así, como la posición de una partícula en el tiempo t está dada por

$$r(t) = r(t_1) + \int_{t_1}^{t} v(\tau)\, d\tau;$$

entonces, reemplazando e integrando la expresión anterior tenemos que

$$r(t) = 3 + 2t.$$

Por lo tanto, la función que determina la posición de la partícula en el tiempo $t \in [0, +\infty[$ está dada por

$$r(t) = 3 + 2t. \qquad \square$$

EJERCICIO 8. La posición de una partícula está dada por $r(t) = 10t^2 - 50t$. Determine la velocidad. ¿Qué rapidez tiene en el tiempo $t = 1$? Determine su aceleración promedio entre $t = 1$ y $t = 5$.

Solución. Para determinar la velocidad de la partícula, derivamos la posición en función del tiempo; así, tenemos que

$$v(t) = r'(t) = 20t - 50.$$

Por otra parte, para determinar la rapidez en el instante $t = 1$, evaluamos la expresión anterior y obtenemos su módulo:

$$|v(1)| = |20(1) - 50| = |-30| = 30.$$

Por lo tanto, la rapidez en el instante $t = 1$ es de $30\,\mathrm{cm/s}$. Finalmente, para calcular la aceleración promedio, tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{a}(1,5) &= \frac{v(5) - v(1)}{5 - 1}\\ &= \frac{20(5) - 50 - (20(1) - 50)}{5 - 1}\\ &= 20.\end{aligned}$$

Así, la aceleración promedio es de $20\ \mathrm{cm/s^2}$. $\square$

EJERCICIO 9. La velocidad de una partícula está dada por $v(t) = 10t^2 - 50t$. Determine su posición si se sabe que al inicio estaba en el origen del sistema de referencia. ¿Donde está ubicada en el tiempo $t = 5$? Determine su aceleración.

EJERCICIO 10. La velocidad de una partícula está dada por $a(t) = 10t^2 - 50t$. Determine su posición si se sabe que al inicio estaba en el origen del sistema de referencia y partió del reposo. ¿Donde está ubicada en el tiempo $t = 5$? Determine su desplazamiento y la distancia total recorrida entre $t = 1$ y $t = 5$.

EJERCICIO 11. Se observa una partícula. Un segundo luego de iniciada la observación, se tiene que la partícula está a 5 cm del punto de referencia y tiene una rapidez de 2 cm/s en dirección al punto de referencia. Si se conoce que la partícula tiene aceleración constante de 2 $\mathrm{cm/s^2}$, determinar su desplazamiento y la distancia total recorrida entre el inicio de la observación y 5 segundos después.

EJERCICIO 12. Resolver los ejercicio 9 y 11 de la sección de problemas del capítulo 2 del libro "Física para ciencias e ingeniría" de Serway.
`https://bit.ly/2S5Uu0a`

Semestre 2020-2 Mat. Andrés Merino

1. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

EJERCICIO 1. Una kinesióloga está estudiando la biomecánica del cuerpo humano. Ella determina la velocidad de un sujeto experimental mientras corre a lo largo de una línea recta con una rapidez constante. La kinesióloga activa el cronómetro cuando el corredor pasa por un punto dado y lo detiene después de que el corredor pasa por otro punto a 20 m de distancia. El intervalo de tiempo que indica el cronómetro es 4,0 s. ¿Cuál es la velocidad del corredor? Si el corredor continúa su movimiento después de desactivar el cronómetro, ¿cuál es su posición después de transcurridos 10 s?

2. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

EJERCICIO 2. Un automóvil de carreras que parte del reposo acelera a un ritmo constante de 5,00 m/s^2. ¿Cuál es la velocidad del automóvil después de que ha recorrido 30 m? ¿Cuánto tiempo ha transcurrido? Calcule la velocidad promedio.

EJERCICIO 3. Un automóvil que viaja a una rapidez constante de 24,0 m/s pasa frente a un oficial escondido detrás de una valla publicitaria. Un segundo después de que el automóvil que pasa la valla, el oficial sale en su persecución con una aceleración constante de 3,00 m/s^2. ¿Cuánto tiempo toma al oficial alcanzar al automóvil que excede el límite de velocidad? ¿Qué tan rápido va el oficial en ese tiempo?

EJERCICIO 4. Un avión de pasajeros aterriza a una rapidez de 71 m/s y desacelera a un ritmo de 5 m/s^2. ¿Cuál es el desplazamiento total del avión entre el momento de tocar pista y alcanzar el reposo?

EJERCICIO 5. Un objeto que se mueve con aceleración uniforme tiene una velocidad de 12,0 cm/s en la dirección positiva cuando su coordenada es 3,00 cm. Si su coordenada 2,00 s después es 5,00 cm, ¿cuál es su aceleración?

EJERCICIO 6. Resolver los ejercicio 20 y 23 de la sección de problemas del capítulo 2 del libro “Física para ciencias e ingeniría” de Serway.
`https://bit.ly/2S5Uu0a`

3. CAÍDA LIBRE

EJERCICIO 7. Una pelota se lanza desde la parte superior de un edificio con una velocidad inicial de 20,0 m/s directamente hacia arriba, a una altura inicial de 50,0 m por encima del suelo. Determine a) el tiempo necesario para que la pelota alcance su altura máxima, b) la altura máxima, c) el tiempo necesario para que la pelota regrese a la altura desde la que se lanzó y su velocidad en ese instante, d) el tiempo necesario para que la pelota llegue al suelo y e) la velocidad y posición de la pelota en $t = 5$ 5,00 s. Ignore la resistencia al avance del aire.

EJERCICIO 8. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez de 25,0 m/s. a) ¿Cuánto sube? b) ¿Cuánto tiempo le toma alcanzar su punto más alto? c) ¿Cuánto tiempo toma a la pelota chocar con el suelo después de que alcanza su punto más alto? d) ¿Cuál es su velocidad cuando regresa al nivel de donde partió?

EJERCICIO 9. Un jugador de tenis lanza una pelota directamente hacia arriba y luego la atrapa después de 2,00 s a la misma altura que el punto de liberación. a) ¿Cuál es la aceleración de la pelota mientras está en vuelo? b) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando alcanza su altura máxima? Encuentre c) la velocidad inicial de la pelota y d) la altura máxima que alcanza.

EJERCICIO 10. Resolver los ejercicio 53 y 54 de la sección de problemas del capítulo 2 del libro “Física para ciencias e ingeniría” de Serway.
`https://bit.ly/2S5Uu0a`

1. Movimiento uniformemente acelerado

Ejercicio 1. Una moto de nieve está originalmente en el punto con el vector de posición 29,0 m a 95,0° medidos en sentido contrario a las agujas del reloj desde con el eje horizontal, se mueve con velocidad 4,50 m/s a 40,0°. Se mueve con aceleración constante 1.90 m/s^2 a 200°. Después de que han transcurrido 5,00 s, encuentre (a) su velocidad y (b) su vector de posición.

2. Movimiento parabólico

Ejercicio 2. En un bar local, un cliente desliza sobre la barra un tarro de cerveza vacío para que lo vuelvan a llenar. La altura de la barra es 120 cm. El cantinero está momentáneamente distraído y no ve el tarro, que se desliza de la barra y golpea el suelo a 50 cm de la base de la barra. (a) ¿Con qué velocidad el tarro dejó la barra? (b) ¿Cuál fue la dirección de la velocidad del tarro justo antes de golpear el suelo?

Ejercicio 3. Un bombero, a una distancia 60 m de un edificio en llamas, dirige un chorro de agua desde una manguera en un ángulo de 30° sobre la horizontal. Si la rapidez inicial del chorro es de 30 m/s, ¿a qué altura el agua golpea al edificio?

Ejercicio 4. La distancia récord en el deporte de lanzar discos es de 81,14 m. Este lanzamiento de discos fue establecido por Steve Urner de Estados Unidos en 1981. Suponiendo que el ángulo de lanzamiento inicial fue de 45° y despreciando la resistencia del aire, determine (a) la rapidez inicial del proyectil y (b) el intervalo de tiempo total que voló el proyectil.

Ejercicio 5. Resolver los ejercicio 15 y 16 de la sección de problemas del capítulo 4 del libro "Física para ciencias e ingeniría" de Serway.

```
https://bit.ly/2S5Uu0a
```

3. Leyes de Newton

Ejercicio 6. Dos fuerzas, $\vec{F}_1 = -6{,}00\vec{\imath} - 4{,}00\vec{\jmath}$ N y $\vec{F}_2 = -3{,}00\vec{\imath} + 7{,}00\vec{\jmath}$ N, actúan sobre una partícula de masa 2,00 kg que inicialmente está en reposo en las coordenadas $(22{,}00\ ,\ 4{,}00)$. (a) ¿Cuáles son las componentes de la velocidad de la partícula en $t = 10{,}0$ s? (b) ¿En qué dirección se mueve la partícula en el instante $t = 10{,}0$ s? (c) ¿Qué desplazamiento experimenta la partícula durante los primeros 10,0 s? (d) ¿Cuáles son coordenadas de la partícula en $t = 10{,}0$ s?

Ejercicio 7. La fuerza ejercida por el viento sobre las velas de un bote es de 390 N hacia el norte. El agua ejerce una fuerza de 180 N hacia el este. Si el bote (incluyendo su tripulación) tiene una masa de 270 kg, ¿cuáles son la magnitud y dirección de su aceleración?

Ejercicio 8. Un tornillo de hierro de 65,0 g de masa cuelga de una cuerda de 35,7 cm de largo. El extremo superior de la cuerda está fijo. Sin tocarlo, un imán atrae el tornillo de modo que permanece fijo, desplazado horizontalmente 28,0 cm a la derecha desde la línea vertical previa de la cuerda. El imán está ubicado a la derecha del tornillo y al mismo nivel vertical que el tornillo en la configuración final. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre del tornillo. (b) Encuentre la tensión en la cuerda. c) Encuentre la fuerza magnética sobre el tornillo.

Ejercicio 9. Se observa que un objeto de masa 1,00 kg tiene una aceleración de 10,0 $\mathrm{m/s^2}$ en una dirección $60{,}0^\circ$ al noreste. Si sobre este actúan dos fuerzas, una de ellas de 5 N que se dirige al norte y otra que se dirige al este. Determinar la magnitud de la segunda fuerza.

1. Tercera ley de Newton

Ejercicio 1. Un semáforo que pesa 122 N cuelga de un cable unido a otros dos cables sostenidos a un soporte. Los cables superiores forman ángulos de $\theta_1 = 37{,}0°$ y $\theta_2 = 53{,}0°$ con la horizontal. Estos cables superiores no son tan fuertes como el cable vertical y se romperán si la tensión en ellos supera los 100 N. ¿El semáforo permanecerá colgado en esta situación, o alguno de los cables se romperá?

Ejercicio 2. Un trineo está sujeto a un árbol sobre una colina cubierta de nieve sin fricción. Si el trineo pesa 77,0 N, encuentre la magnitud de la fuerza de tensión ejercida por la cuerda sobre el trineo y la de la fuerza normal ejercida por la colina sobre el trineo.

Ejercicio 3. Un automóvil de masa 1000 kg está sobre un camino cubierto con hielo inclinado en un ángulo 20°. Encuentre la aceleración del automóvil, si supone que la pista no tiene fricción.

Ejercicio 4. El peso combinado de la caja y de la plataforma rodante es $3{,}00 \times 10^2$ N. Si un el hombre jala la cuerda con una fuerza constante de 20,0 N, ¿cuál es la aceleración del sistema (caja más plataforma) y qué tan lejos se moverá en 2,00 s? Suponga que el sistema parte del reposo y que no hay fuerzas de fricción que se opongan al movimiento.

Ejercicio 5. Una mujer pesa un pez con una báscula de resorte sujeta a la parte superior de un elevador. Mientras el elevador está en reposo, ella registra un peso de 40,0 N a) ¿Cuál es la lectura del peso en la báscula si el elevador acelera hacia arriba a 2,00 $\mathrm{m/s^2}$ b) ¿Cuál es la lectura de la báscula si el elevador acelera hacia abajo a 2,00 $\mathrm{m/s^2}$? c) Si el cable del elevador se rompe, ¿cuál es la lectura en la báscula?

Ejercicio 6. Resolver los ejercicio 21 y 23 de la sección de problemas del capítulo 4 del libro “Física para ciencias e ingeniría” de Serway.
`https://bit.ly/2S5Uu0a`