1. Ecuaciones

Ejercicio 1. Resolver la siguiente ecuación:

$$(8x-2)(3x+4) = (4x+3)(6x-1).$$

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}
&(8x-2)(3x+4) = (4x+3)(6x-1) \implies && \\
&\implies 24x^2+26x-8 = 24x^2+14x-3 && \text{Manipulación algebraica}\\
&\implies 26x-8 = 14x-3 && \text{Proposición 5-b}\\
&\implies 26x-8-14x = 14x-3-14x && \text{Proposición 5-c}\\
&\implies 12x-8 = -3 && \text{Manipulación algebraica}\\
&\implies 12x-8+8 = -3+8 && \text{Proposición 5-a}\\
&\implies 12x = 5 && \text{Manipulación algebraica}\\
&\implies \frac{12x}{12} = \frac{5}{12} && \text{Proposición 5-g}\\
&\implies x = \frac{5}{12} && \text{Manipulación algebraica}
\end{aligned}$$

En Mathematica: Input Solve[(8x - 2)(3x + 4) == (4x + 3)(6x - 1) , x] Output {{x →512}} □

Ejercicio 2. Resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{3}{2x-4} - \frac{5}{x+3} = \frac{2}{x-2}.$$

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{2x-4} - \frac{5}{x+3} = \frac{2}{x-2} \implies && \\
&\implies \frac{3(x+3)-5(2x-4)}{(2x-4)(x+3)} = \frac{2}{x-2} && \text{Manipulación algebraica}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\implies \frac{3x+9-10x+20}{(2x-4)(x+3)} = \frac{2}{x-2} && \text{Manipulación algebraica}\\
&\implies \frac{-7x+29}{2(x-2)(x+3)} = \frac{2}{x-2} && \text{Manipulación algebraica}\\
&\implies \frac{-7x+29}{2(x+3)} = 2 && \text{Proposición 5-h, con } x-2\neq 0\\
&\implies -7x+29 = 4(x+3) && \text{Proposición 5-l, con } x+3\neq 0\\
&\implies -7x+29 = 4x+12 && \text{Manipulación algebraica}\\
&\implies -7x+29-4x-29 = 4x+12-4x-29 && \text{Proposición 5-c}\\
&\implies 11x = 17 && \text{Manipulación algebraica}\\
&\implies \frac{11x}{11} = \frac{17}{11} && \text{Proposición 5-g}\\
&\implies x = \frac{17}{11}. && \text{Manipulación algebraica}
\end{aligned}
$$

En Mathematica: Input Solve[3/(2 x-4)-5/(x+3)==2/(x-2),x]
Output {{x→1711}} □

Ejercicio 3. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{3}{2x+3} + \dfrac{5}{2x-3} = \dfrac{4x+6}{4x^2-9}$

b) $\dfrac{4}{x+2} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{5x-6}{x^2-4}$

c) $\dfrac{2}{2x+5} + \dfrac{3}{2x-5} = \dfrac{10x+5}{4x^2-25}$

d) $\dfrac{2}{2x+1} - \dfrac{3}{2x-1} = \dfrac{-2x+7}{4x^2-1}$

Ejercicio 4. Despeje la variable específica:

a) $I = Prt$, despeje P

b) $F = g\dfrac{mM}{d^2}$, despeje M

c) $A = \frac{1}{2}(a+b)h$, despeje b

d) $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, despeje q

2. Sistemas de ecuaciones

Ejercicio 5. En cada caso, encuentre la solución del sistema lineal por medio del método de eliminación.

a) $$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 4, \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 2, \\ 4x & + & 2y & + & 2z & = & 8. \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 4y & - & z & = & 12, \\ 3x & + & 8y & - & 2z & = & 4. \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & -4, \\ 2x & + & 5y & = & -8, \\ x & + & 3y & = & -5. \end{array}$$

3. Matrices

Ejercicio 6. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Calcule $A + B$ y AB.

Solución. Tenemos que

$$A + B = \begin{pmatrix} a+1 & b+a & 2c \\ c+1 & 2b & a+b \\ 2 & c+1 & a+1 \end{pmatrix}$$

y

$$AB = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ac+b^2 \\ a+b+c & 2ac+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

□

EJERCICIO 7. Utilizando las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix};$$

calcule:

1. AB;
2. BC;
3. $B(C+D)$;
4. $(E+A)B$.

Solución.

1. $AB = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $BC = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $B(C+D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 9 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $(E+A)B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 8 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

□

EJERCICIO 8. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y sea $B = A - I$; donde I es la identidad. Calcule B^n para todo $n > 0$.

Solución. Para $n = 1$,

$$B^1 = B = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para $n = 2$,

$$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para $n = 3$,

$$B^3 = B^2B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

que es la matriz nula.

Para $n \geq 3$, $B^n = B^3 B^{n-3} = 0$. □

EJERCICIO 9. Determine dos elementos A y B de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $AB = 0$ y $BA \neq 0$.

Solución. Un ejemplo sencillo está dado por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En efecto, tenemos:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

EJERCICIO 10. Determine si existen valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que las matrices A y B conmutan, donde

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1+\beta \end{pmatrix}.$$

En caso de existir, determínelos.

Solución. Tenemos que

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\beta + 1 + \beta \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad BA = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 1 \\ 1 + \beta & 0 \end{pmatrix},$$

de donde se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha + \beta, \\ \alpha\beta + 1 + \beta &= 1, \\ 1 + \beta &= 1, \\ \beta &= 0. \end{aligned}$$

Observamos entonces que la única posibilidad es que $\beta = 0$ y en tal caso, todas las ecuaciones anteriores se verifican. Por ende, para $\beta = 0$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, las matrices A y B conmutan. □

1. ECUACIONES NO LINEALES

EJERCICIO 1. Resuelva, paso a paso, las siguientes ecuaciones, luego, compruebe su respuesta en un asistente computacional:

a) $|x+4| = 11$

b) $3|x+1| - 5 = -11$

c) $3|3x-2| + 3 = 7$

d) $9x^3 - 18x^2 - 4x + 8 = 0$

e) $9x^3 - 18x^2 - 4x + 8 = 0$

f) $3x^3 - 5x^2 - 12x + 20 = 0$

g) $4x^4 + 10x^3 = 6x^2 + 15x$

h) $15x^5 - 20x^4 = 6x^3 - 8x^2$

i) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$

j) $2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$

k) $5y^4 - 7y^2 + 1{,}5 = 0$

l) $3y^4 - 5y^2 + 1{,}5 = 0$

m) $x^{-4} - 13x^{-2} + 1 = 0$

n) $x^{-2} - 2x^{-1} - 35 = 0$

EJERCICIO 2. Resuelva, paso a paso, las siguientes ecuaciones, luego, compruebe su respuesta en un asistente computacional:

a) $\sqrt{7-2x} - \sqrt{5+x} = \sqrt{4+3x}$

b) $\sqrt{11+8x} + 1 = \sqrt{9+4x}$

c) $2\sqrt{x} - \sqrt{x-3} = \sqrt{5+x}$

d) $\sqrt{2\sqrt{x+1}} = \sqrt{3x-5}$

e) $\sqrt{5\sqrt{x}} = \sqrt{2x-3}$

f) $\sqrt{1+4\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1$

g) $\sqrt{x+2} = \sqrt{x-2}$

h) $\sqrt{7-5x} = 8$

i) $\sqrt{2x-9} = \frac{1}{2}$

j) $4 + \sqrt[3]{1-5t} = 0$

k) $\sqrt[3]{6-s^2} + 5 = 0$

l) $\sqrt[5]{2x^2+1} - 2 = 0$

m) $\sqrt[4]{6x^2-9} = x$

n) $\sqrt{7-x} = x - 5$

ñ) $\sqrt{3-x} - x = 3$

o) $3\sqrt{2x-3} + 2\sqrt{7-x} = 11$

p) $x - \sqrt{-7x-24} = -2$

q) $26x + \sqrt{5x+19} = -1$

2. MODELAMIENTO CON ECUACIONES

EJERCICIO 3. Un estudiante en un curso de álgebra tiene calificaciones de examen de 75, 82, 71 y 84. ¿Qué calificación en el siguiente examen subirá el promedio del estudiante a 80?

Solución. Tomemos la siguiente variable:

- x: calificación del siguiente examen para subir el promedio a 80.

Con esto planteamos la ecuación, para que el promedio sea 80, se necesita que

$$\frac{75+82+71+84+x}{5} = 80.$$

Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{75+82+71+84+x}{5} = 80 \quad &\Longrightarrow \quad 312 + x = 400\\ &\Longrightarrow \quad x = 88.\end{aligned}$$

Así, la calificación en el siguiente examen para subir el promedio a 80 debe ser de 88. □

EJERCICIO 4. Un estudiante de Matemática Aplicada de la Carrera de Contabilidad y Auditoría de la PUCE tiene notas parciales de 28, 31 y 24. ¿Qué calificación debe sacar en el Examen Final para tener una nota total de 30?

Solución. Tomemos la siguiente variable:

- x: calificación del examen final para tener una nota total de 30.

Con esto planteamos la ecuación, para que la nota total sea de 30, se necesita que

$$0{,}24(28+31+24) + 0{,}28x = 30.$$

Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned}0{,}24(28+31+24) + 0{,}28x = 30 \quad &\Longrightarrow \quad 19{,}92 + 0{,}28x = 30\\ &\Longrightarrow \quad 0{,}28x = 10{,}08\\ &\Longrightarrow \quad x = 36.\end{aligned}$$

Así, la calificación en el examen final para tener una nota total de 30 debe ser de 36. □

EJERCICIO 5. Una pareja no desea gastar más de \$70 por comer en un restaurante. Si se agrega un impuesto de venta de 8 % a la cuenta y piensan dar una propina de 15 % después de agregar el impuesto, ¿cuánto es lo más que pueden gastar en la comida?

Solución. Tomemos la siguiente variable:

- m: monto máximo que pueden gastar en comida

Con esto planteamos la ecuación, para esto, primero tenemos la representación de las siguientes cantidades:

- impuesto: $0{,}08m$
- monto más impuesto: $m + 0{,}08m$
- propina: $0{,}15(m + 0{,}08m)$
- total a pagar: $m + 0{,}08m + 0{,}15(m + 0{,}08m)$

Así, la condición del problema se traduce a

$$m + 0{,}08m + 0{,}15(m + 0{,}08m) = 70.$$

Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} m + 0{,}08m + 0{,}15(m + 0{,}08m) = 70 \quad &\Longrightarrow \quad 1{,}242m = 70 \\ &\Longrightarrow \quad m \approx 56{,}36. \end{aligned}$$

Así, el monto que se puede gastar en comida es, aproximadamente, \$56,36. □

EJERCICIO 6. El tiempo de una contadora consultora se factura a \$60 por hora y el de su asistente se factura a \$20 por hora. Un cliente recibe una cuenta de \$580 por cierto trabajo. Si el asistente trabajó 5 horas menos que la contadora, ¿cuánto tiempo facturó cada una en el trabajo?

Solución. Tomemos las siguientes variables:

- b: tiempo que facturó la contadora en horas
- a: tiempo que facturó el asistente en horas

Con esto planteamos la ecuación. Por los tiempos trabajados, sabemos que

$$a = b - 5;$$

por el costo del trabajo, sabemos que

$$60b + 20a = 580.$$

Resolvemos las ecuaciones, reemplazamos la primera ecuación en la segunda y obtenemos

$$60b + 20(b - 5) = 580.$$

Resolvemos esta ecuación:

$$\begin{aligned} 60b + 20(b-5) = 580 \quad &\Longrightarrow \quad 80b - 100 = 580 \\ &\Longrightarrow \quad 80b = 680 \\ &\Longrightarrow \quad b = 8{,}5. \end{aligned}$$

Reemplazamos en la primera ecuación:

$$a = (8{,}5) - 5 = 3{,}5.$$

Así, la contadora facturó 8.5 horas mientras que su asistente facturó 3.5 horas □

Ejercicio 7. El costo de instalar aislamiento en una casa particular de dos recámaras es \$2400. Los costos mensuales de calefacción actuales promedian \$200, pero se espera que el aislamiento reduzca los costos en 10 %. ¿Cuántos meses tardará en recuperarse el costo del aislamiento?

Ejercicio 8. Un agricultor piensa usar 180 metros de cerca para encerrar una región rectangular, usando parte de una margen recta de un río en lugar de cerca como uno de los lados del rectángulo. Encuentre el área de la región si la longitud del lado paralelo a la margen mide el doble de la longitud de un lado adyacente.

Solución. Tomemos las siguientes variables:

- x : longitud del lado paralelo en metros
- y : longitud del lado adyacente en metros.

Con esto planteamos las ecuaciones. Como la longitud del un lado paralelo es el doble de la longitud de un lado adyacente, tenemos que

$$x = 2y.$$

De donde, como el perímetro es la suma de todos sus lados

$$x + 2y = 4y = 180.$$

Por lo tanto,

$$y = 90 \quad \text{y} \quad x = 45.$$

Así, la longitud del lado adyacente es de 45 metros y la longitud del lado paralelo es de 90 metros. Finalmente, como el área está dada por el producto de un lado adyacente por un lado paralelo, se tiene que

$$45 \cdot 90 = 4050.$$

Es decir, el área de la región es de 4050 metros cuadrados. □

EJERCICIO 9. Un fabricante de latas desea construir un bote cilíndrico circular recto de altura 20 centímetros y capacidad de 3000 cm^3. Encuentre el radio de la lata.

Solución. Tomemos las siguientes variables:

- h : altura del bote cilíndrico en centímetros
- r : radio del bote cilíndrico en centímetros

Con esto planteamos las ecuaciones. Notemos que el volumen de un bote cilíndrico está dador por:

$$V = \pi r^2 h.$$

Así, como el volumen es de 3000cm^3 y la altura es de 20cm, entonces

$$\pi r^2(20) = 3000,$$

despejando la ecuación anterior, se tiene que

$$r = \sqrt{\frac{150}{\pi}} \approx 6{,}9098.$$

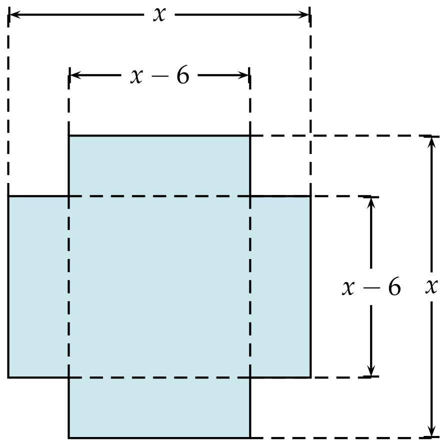
Así, el bote cilíndrico tiene un radio de aproximadamente 6,9098 centímetros. □

EJERCICIO 10. Una caja con base cuadrada y sin tapa ha de construirse de una pieza cuadrada de hojalata al cortar un cuadrado de 3 cm de cada esquina y doblar los lados. Si la caja debe contener 48 cm^3, ¿de qué tamaño debe ser la pieza de hojalata que debe usarse?

Solución. Tomemos la siguiente variable:

- x : lado de la pieza cuadrada de hojalata en centímetros

Para plantear la ecuación, consideremos la siguiente figura que ilustra el problema:



Con esto, tenemos que el volumen de la cada resultante está dado por:

$$3(x-6)^2 = 48.$$

Despejando la ecuación anterior,

$$x = 10.$$

Así, la pieza de hojalata a usarse debe ser de 10 centímetros de lado. □

EJERCICIO 11. Una hoja de papel de 24 por 36 cm se va a usar para un cartel, con el lado más corto en la parte inferior. Los márgenes de los lados y la parte superior van a tener el mismo ancho, y el margen de abajo va a tener el doble de ancho que los otros márgenes. Encuentre el ancho de los márgenes si el área impresa va a ser de 661.5 cm^2.

3. INECUACIONES

EJERCICIO 12. Resolver las siguientes inecuaciones

a) $3x - 2 > 12$

b) $-2 - 3x \geq 2$

c) $2x + 5 \leq 8$

d) $3 - 5x < 11$

e) $x - 6 > 5x + 3$

f) $2x + 5 < 3x - 7$

g) $x - 6 > 5x + 3$

h) $\frac{1}{4}x + 7 \leq \frac{1}{3}x - 2$

i) $9 + \frac{1}{3}x \geq 4 - \frac{1}{2}$

Solución.

a) Tenemos que

$$\begin{aligned} 3x - 2 > 12 \quad &\Longrightarrow \quad 3x - 2 + 2 > 12 + 2 && \text{Proposición 11a} \\ &\Longrightarrow \quad 3x > 14 \\ &\Longrightarrow \quad \frac{3}{3}x > \frac{14}{3} && \text{Proposición 11g, } 3 > 0 \\ &\Longrightarrow \quad x > \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$S = \left] \frac{14}{3}, +\infty \right[;$$

gráficamente

$10\frac{14}{3}.$

Usando Mathematica

```
In[1]:= Reduce[3x-2>12,x]
```

Out[1]= $x > \frac{14}{3}$

b) Tenemos que

$$-2 - 3x \geq 2 \quad \Longrightarrow \quad -2 - 3x + 2 \geq 2 + 2 \qquad \text{Proposición 11a}$$

$$
\begin{aligned}
&\implies \quad -3x \geq 4 \\
&\implies \quad \frac{-3}{-3}x \leq \frac{4}{-3} && \text{Proposición 11h, } -3<0 \\
&\implies \quad x \leq -\frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la solución es:

$$S = \left]-\infty, -\frac{4}{3}\right];$$

gráficamente

$01-\frac{4}{3}.$

Usando Mathematica

```
In[2]:= Reduce[- 2-3x >=  2,x]
```

Out[2]= $x \leq -\frac{4}{3}$

g) Temeos que

$$
\begin{aligned}
&x-6>5x+3 \quad \implies \\
&\qquad \implies \quad x-6+6-5x>5x+3+6-5x && \text{Proposición 11a y 11c} \\
&\qquad \implies \quad -4x>9 \\
&\qquad \implies \quad \frac{-4x}{-4}<\frac{9}{-4} && \text{Proposición 11h, } -4<0 \\
&\qquad \implies \quad x<-\frac{9}{4}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la solución es:

$$S = \left]-\infty, -\frac{9}{4}\right[;$$

gráficamente,

$00-\frac{9}{4}$

Usando Mathematica

```
In[3]:= Reduce[x-6>5 x+3,x]
```

Out[3]= $x < -\frac{9}{4}$

$\square$

EJERCICIO 13. Resuelva las siguientes inecuaciones

a) $(2x-3)(4x+5) \leq (8x+1)(x-7)$

b) $(x-3)(x+3) \geq (x+5)^2$

c) $(x-4)^2 > x(x+12)$

d) $|3x-7| \geq 5$

e) $-\frac{1}{3}|6-5x|+2 \geq 1$

f) $2|-11-7x|-2 > 10$

g) $|7x+2| > -2$

h) $|6x-5| \leq -2$

Respuesta.

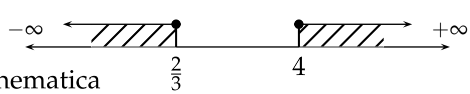
d) Tenemos que

$$
\begin{aligned}
&|3x-7| \geq 5 \quad \Longrightarrow && \\
&\Longrightarrow \quad 3x-7 \leq -5 \quad \vee \quad 3x-7 \geq 5 && \text{Teorema 12} \\
&\Longrightarrow \quad 3x-7+7 \leq -5+7 \quad \vee \quad 3x-7+7 \geq 5+7 && \text{Proposición 11c} \\
&\Longrightarrow \quad 3x \leq 2 \quad \vee \quad 3x \geq 12 && \\
&\Longrightarrow \quad x \leq \frac{2}{3} \quad \vee \quad x \geq \frac{12}{3} && \text{Proposición 11g} \\
&\Longrightarrow \quad x \leq \frac{2}{3} \quad \vee \quad x \geq 4 &&
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la solución es:

$$S = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [4, +\infty[\,;$$

gráficamente



Usando Mathematica

```
In[4]:= Reduce[Abs[3 x-7]≥5,x, Reals]
```

Out[4]= $x\leq\frac{2}{3}\,||\,x\geq 4$

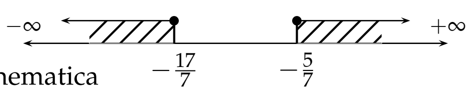
f) Tenemos que

$$
\begin{aligned}
&2|-11-7x|-2>10 \implies\\
&\implies 2|-11-7x|-2+2>10+2 && \text{Proposición 11a}\\
&\implies 2|-11-7x|>12\\
&\implies \frac{2}{2}|-11-7x|>\frac{12}{2} && \text{Proposición 11g}\\
&\implies |-11-7x|>6\\
&\implies -11-7x<-6 \quad\vee\quad -11-7x>6 && \text{Teorema 12}\\
&\implies -11-7x+11<-6+11 \quad\vee\quad -11-7x+11>6+11 && \text{Proposición 11a}\\
&\implies -7x<5 \quad\vee\quad -7x>17\\
&\implies \frac{-7}{-7}x>\frac{5}{-7} \quad\vee\quad \frac{-7}{-7}x<\frac{17}{-7} && \text{Proposición 11h}\\
&\implies x>-\frac{5}{7} \quad\vee\quad x<-\frac{17}{7}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la solución es:

$$S=\left]-\infty,-\frac{17}{7}\right[\cup\left]-\frac{5}{7},+\infty\right[;$$

gráficamente



Usando Mathematica

In[5]:= `Reduce[2 Abs[-11-7 x]-2>10,x, Reals]`

Out[5]= $x<-\frac{17}{7}\,||\,x>-\frac{5}{7}$

□

Ejercicio 14. Una empresa constructora está tratando de decidir cuál de dos modelos de grúa comprar. El modelo A cuesta \$100,000 y requiere \$8000 por año para su mantenimiento. El modelo B tiene un costo inicial de \$80,000 y su mantenimiento cuesta \$11,000 por año. ¿Durante cuántos años debe usarse el modelo A antes de que sea más económico que B?

EJERCICIO 15. Un consumidor está tratando de decidir si comprar el auto A o el B. El auto A cuesta \$20 000 y tiene un rendimiento de combustible de 30 millas por galón y el seguro cuesta \$1000 por año. El auto B cuesta \$24 000 y tiene un rendimiento de 50 millas por galón, y el seguro cuesta \$1200 por año. Suponga que el consumidor recorre 15 000 millas por año y que el precio de la gasolina permanece constante en \$3 por galón. Con base sólo en estos datos, determine cuánto tiempo tomará para que el costo total del auto B sea menor que el del auto A.

Solución. Tomemos la siguiente variable:

- x : número de años que debe usarse el modelo A antes que sea más económico que B

Con esto determinemos el costo de cada uno de los autos en función del número de años; para esto vamos a sumar el costo del auto, de la gasolina consumida y el seguro. Así, para el auto A tenemos que

$$20000 + 3\left(\frac{15000}{30}\right)x + 1000x = 20000 + 2500x;$$

por otra parte, para el auto B tenemos que

$$24000 + 3\left(\frac{15000}{50}\right)x + 1200x = 24000 + 2100x.$$

Como buscamos determinar el tiempo que tomará para que el costo del auto B sea menor que el del auto A; tenemos que resolver la siguiente inecuación

$$24000 + 2100x < 20000 + 2500x.$$

Resolviendo la inecuación, tenemos que

$$x > 10.$$

Así, tomará, al menos, 10 años para que el costo del auto B sea menor que el del auto A. □

EJERCICIO 16. Resolver las inecuaciones *a)* $(3x+1)(5-10x) > 0$

b) $(2-3x)(4x-7) \geq 0$

c) $(x+2)(x-1)(4-x) \leq 0$

d) $(x-6)(x+3)(-2-x) < 0$

e) $x^2 - x - 6 < 0$

f) $x^2 + 4x + 3 \geq 0$

g) $x^2 - 2x - 7 > 1$

h) $x^2 - 4x - 15 \leq 6$

i) $x(2x+3) \geq 5$

j) $x(3x-1) \leq 4$

k) $8x - 15 > x^2$

Solución.

a) Despejando los términos tenemos que la tabla de factores es:

	$\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$	$-\frac{1}{3}$	$\left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$	$\frac{1}{2}$	$\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$
$3x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$5-10x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
	$-$	0	$+$	0	$-$

Como buscamos valores mayores que cero, tenemos que la solución es:

$$S = \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[.$$

Usando Mathematica

```
In[6]:= Reduce[(3x+1)(5-10x)>0,x]

Out[6]= -1/3<x<1/2
```

c) Despejando los términos tenemos que la tabla de factores es:

	$]-\infty, -2[$	-2	$]-2, 1[$	1	$]1, 4[$	4	$]4, +\infty[$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$4-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Como buscamos valores menores o iguales que cero, tenemos que la solución es

$$S = [-2, 1] \cup [4, +\infty[.$$

Usando Mathematica

```
In[7]:= Reduce[(x+2)(x-1)(4-x)<= 0,x]

Out[7]= -2≤x≤1||x≥4
```

j) Tenemos que

$$\begin{aligned} x(3x-1) \leq 4 &\implies 3x^2 - x - 4 \leq 4 - 4 \\ &\implies 3x^2 - x - 4 \leq 0 \\ &\implies (3x-4)(x+1) \leq 0. \end{aligned}$$

Con esto, realizamos la tabla de factores:

	$\left]-\infty,-1\right[$	-1	$\left]-1,\frac{4}{3}\right[$	$\frac{4}{3}$	$\left]\frac{4}{3},+\infty\right[$
$3x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
	$-$	0	$-$	0	$+$

Como buscamos valores menores o iguales que cero, tenemos que la solución es

$$S = \left[-1, \frac{4}{3}\right].$$

Usando Mathematica

```
In[8]:= Reduce[x(3x-1) <= 4,x]

Out[8]= -1≤x ≤4/3
```

□

EJERCICIO 17. Resuelva las siguientes inecuaciones

a) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \geq 0$

b) $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 \leq 0$

c) $\dfrac{x^2(x+2)}{(x+2)(x+1)} \leq 0$

d) $\dfrac{(x^2+1)(x-3)}{x^2-9} \geq 0$

e) $\dfrac{x^2-x}{x^2+2x} \leq 0$

f) $\dfrac{(x+3)^2(2-x)}{(x+4)(x^2-4)} \leq 0$

EJERCICIO 18. Resuelva las inecuaciones *a)* $\dfrac{x+1}{2x-3} > 2$

b) $\dfrac{x-2}{3x+5} \leq 4$

c) $\dfrac{1}{x-2} \geq \dfrac{3}{x+1}$

d) $\dfrac{2}{2x+3} \leq \dfrac{2}{x-5}$

e) $\dfrac{4}{3x-2} \leq \dfrac{2}{x+2}$

f) $\dfrac{3}{5x+1} \geq \dfrac{1}{x-3}$

g) $\dfrac{x}{3x-5} \leq \dfrac{2}{x-1}$

Solución.

a) Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{2x-3} > 2 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{x+1}{2x-3} - 2 > 0 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{x+1-2(2x-3)}{2x-3} > 0 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{x+1-4x+6}{2x-3} > 0 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{-3x+7}{2x-3} > 0.
\end{aligned}$$

Con esto, realizamos la tabla de factores:

	$\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$	$\frac{3}{2}$	$\left]\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\right[$	$\frac{7}{3}$	$\left]\frac{7}{3}, +\infty\right[$
$-3x+7$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$2x-3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
	$-$	0	$+$	0	$-$

Como buscamos valores mayores que cero, tenemos que la solución es

$$S = \left]\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\right[.$$

Usando Mathematica

```
In[9]:= Reduce[(x+1)/(2x-3)>2,x]
```

Out[9]= $\frac{3}{2}<x<\frac{7}{3}$

e) Tenemos que

$$\frac{4}{3x-2} \leq \frac{3}{x+2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{4}{3x-2} - \frac{3}{x+2} \leq 0$$

$$\begin{aligned}
&\implies \quad \frac{4(x+2)-3(3x-2)}{(3x-2)(x+2)} \leq 0\\
&\implies \quad \frac{4x+8-9x+6}{(3x-2)(x+2)} \leq 0\\
&\implies \quad \frac{-5x+14}{(3x-2)(x+2)} \leq 0.
\end{aligned}$$

Con esto, realizamos la tabla de factores:

	$]-\infty,-2[$	-2	$\left]-2,\frac{2}{3}\right[$	$\frac{2}{3}$	$\left]\frac{2}{3},\frac{14}{5}\right[$	$\frac{14}{5}$	$\left]\frac{14}{5},+\infty\right[$
$-5x+14$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$3x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Como buscamos valores menores o iguales que cero, tenemos que la solución es

$$S = \left[-2, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{4}{5}, +\infty\right[.$$

Usando Mathematica

```
In[10]:= Reduce[4/(3 x-2)<=3/(x+2),x]
```

Out[10]= $-2<x<\frac{2}{3} \,||\, x \geq \frac{14}{5}$

g) Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3x-5} \leq \frac{2}{x-1} \quad &\implies \quad \frac{x}{3x-5} - \frac{2}{x-1} \leq 0\\
&\implies \quad \frac{x(x-1)-2(3x-5)}{(3x-5)(x-1)} \leq 0\\
&\implies \quad \frac{x^2-x-6x+10}{(3x-5)(x-1)} \leq 0\\
&\implies \quad \frac{x^2-7x+10}{(3x-5)(x-1)} \leq 0\\
&\implies \quad \frac{(x-2)(x-5)}{(3x-5)(x-1)} \leq 0.
\end{aligned}$$

Con esto, realizamos la tabla de factores:

	$]-\infty,1[$	1	$\left]1,\frac{5}{3}\right[$	$\frac{5}{3}$	$\left]\frac{5}{3},2\right[$	2	$]2,5[$	5	$]5,+\infty[$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$3x-5$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$

Como buscamos valores menores o iguales que cero, tenemos que la solución es

$$S = \left]1, \frac{5}{3}\right[\cup [2, 5].$$

Usando Mathematica

```
In[11]:= Reduce[x/(3 x-5)<=2/(x-1),x]

Out[11]= 1<x<5/3||2≤x≤5
```

□

EJERCICIO 19. Para una población particular de salmón, la relación entre el número S de peces hembra y el número R de descendientes que sobreviven hasta la edad adulta está dada por la fórmula $R = 4500S/(S + 500)$. ¿En qué condiciones es $R > S$?

EJERCICIO 20. Resolver la siguiente inecuación:

$$\frac{1}{3-2x} \geq \frac{2}{2+x}.$$

Solución. Para resolver la inecuación, primero debemos dejar todos los términos en un solo lado de la inecuación y luego separarla en factores:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3-2x} \geq \frac{2}{2+x} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{3-2x} - \frac{2}{2+x} \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1(2+x) - 2(3-2x)}{(3-2x)(2+x)} \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{5x-4}{(3-2x)(2+x)} \geq 0. \end{aligned}$$

Con esto, realizamos la tabla de factores:

	$]-\infty, -2[$	-2	$\left]-2, \frac{4}{5}\right[$	$\frac{4}{5}$	$\left]\frac{4}{5}, \frac{3}{2}\right[$	$\frac{3}{2}$	$\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$
$5x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3-2x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$2+x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

Como buscamos los mayores o iguales que 0, tenemos que la solución es

$$S =]-\infty, -2[\cup \left[\frac{4}{5}, \frac{3}{2}\right[.$$

□

1. Determinantes

Ejercicio 1. Calcule el determinante de las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Solución.

a) Para la primera matriz, usando la fórmula del determinante para una matriz de orden 4×4, tenemos que para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

su determinante está dado por:

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 8 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 7 & 9 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 7 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Así, para el primer término, se sigue que, usando la fórmula para el determinante de una matriz de orden 3×3

$$\begin{aligned} 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 8 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} &= 1 \left(5 \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= 1\left(5(9 \cdot 3 - 2 \cdot 1) - 6(8 \cdot 3 - 1 \cdot 1) - 2(8 \cdot 2 - 1 \cdot 9)\right) \\ &= 1(5(27-2) - 6(24-1) - 2(16-9)) \\ &= 1(125 - 138 - 14) \\ &= -27. \end{aligned}$$

Análogamente, para los términos restantes tenemos que

$$-2\begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 7 & 9 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 156, \quad 3\begin{vmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 7 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -144 \quad \text{y} \quad -(-1)\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Sumando los términos obtenidos

$$\det(A) = -27 + 156 - 144 + 3 = -12.$$

Usando Mathematica, tenemos que

```
In[1]:= Det[{{1,2,3,-1},{4,5,6,-2},{7,8,9,1},{-1,1,2,3}}]

Out[1]= -12.
```

b) Para la segunda matriz, usando la fórmula del determinante para una matriz de orden 4×4, tenemos que para la matriz

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 10 \end{vmatrix}$$

su determinante está dado por:

$$\det(B) = 1\begin{vmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 10 & 11 & 5 \\ 3 & 2 & 10 \end{vmatrix} - 15\begin{vmatrix} 12 & 7 & 9 \\ 8 & 11 & 5 \\ 13 & 2 & 10 \end{vmatrix} + 14\begin{vmatrix} 12 & 6 & 9 \\ 8 & 10 & 5 \\ 13 & 3 & 10 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 12 & 6 & 7 \\ 8 & 10 & 11 \\ 13 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Así, para el primer término, se sigue que, usando la fórmula para el determinante de una matriz de orden 3×3

$$\begin{aligned} 1\begin{vmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 10 & 11 & 5 \\ 3 & 2 & 10 \end{vmatrix} &= 1\left(6\begin{vmatrix} 11 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right) \\ &= 1\,(6(11 \cdot 10 - 2 \cdot 5) - 7(10 \cdot 10 - 3 \cdot 5) + 9(10 \cdot 2 - 3 \cdot 11)) \\ &= 1(6(100) - 7(85) + 9(-13)) \\ &= 1(600 - 595 - 117) \\ &= -112. \end{aligned}$$

Análogamente, para los términos restantes tenemos que

$$-15\begin{vmatrix}12 & 7 & 9\\ 8 & 11 & 5\\ 13 & 2 & 10\end{vmatrix} = 720, \quad 14\begin{vmatrix}12 & 6 & 9\\ 8 & 10 & 5\\ 13 & 3 & 10\end{vmatrix} = -336 \quad \text{y} \quad -4\begin{vmatrix}12 & 6 & 7\\ 8 & 10 & 11\\ 13 & 3 & 2\end{vmatrix} = 544.$$

Sumando los términos obtenidos

$$\det(B) = -112 + 720 - 336 + 544 = 816.$$

Usando Mathematica, tenemos que

In[2]:= `Det[{{1,15,14,4},{12,6,7,9},{8,10,11,5},{13,3,2,10}}]`

Out[2]= `816.` □

2. Método de Gauss

Ejercicio 2. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & -3 & 4\\ 3 & 9 & -12\end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 2 & 8\end{pmatrix}$$

y

$$C = \begin{pmatrix}-2 & 3 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -1 & -2\end{pmatrix},$$

hallar su rango.

Solución. a) Vamos a hallar el rango de A, para ello reduciremos la matriz A por filas.

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & -3 & 4\\ 3 & 9 & -12\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 3\\ -1 & -3 & 4\\ 3 & 9 & -12\end{pmatrix} \qquad F_1 \leftrightarrow F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -6 \\ -1 & -3 & 4 \\ 3 & 9 & -12 \end{pmatrix} \qquad -3F_1 + F_2 \to F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & 7 \\ 3 & 9 & -12 \end{pmatrix} \qquad F_1 + F_3 \to F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & -21 \end{pmatrix} \qquad -3F_1 + F_4 \to F_4$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & 3 & -21 \end{pmatrix} \qquad -F_3 \leftrightarrow F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -41 \\ 0 & 3 & -21 \end{pmatrix} \qquad 5F_2 + F_3 \to F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -41 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad -3F_2 + F_4 \to F_4$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad -\frac{1}{41}F_3 \to F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 7F_3 + F_2 \to F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad -3F_3 + F_1 \to F_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad -2F_2 + F_1 \to F_1$$

Así la matriz escalonada reducida por filas, equivalente a A es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\operatorname{rang}(A) = 3$.

b) Para encontrar el rango de B hallaremos la matriz escalonada reducida por filas equivalente a B.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & 10 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad 3F_1 - F_2 \to F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & 10 \\ 0 & -6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad 4F_1 - F_3 \to F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -2 \\ 0 & -6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{5}F_2 \to F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -4 \end{pmatrix} \qquad 6F_2 + F_3 \to F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad -\frac{5}{2}F_3 \to F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad \frac{2}{5}F_3 + F_2 \to F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad F_1 - F_3 \to F_1$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad F_1 + F_2 \to F_1$$

Así la matriz escalonada reducida por filas, equivalente a B es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $\operatorname{rang}(B) = 3$.

c) Para encontrar el rango de C hallaremos la matriz escalonada reducida por filas equivalente a C.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F_1 \leftrightarrow F_2$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 9 & -1 & -4 \end{pmatrix} \qquad 2F_1 + F_2 \to F_2$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{9}F_2 \to F_2$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \end{pmatrix} \qquad F_1 - 3F_2 \to F_1$$

Así la matriz escalonada reducida por filas equivalente a C es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $\operatorname{rang}(C) = 2$.

$\square$

EJERCICIO 3. Dado el sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 5y - 4z = 0 \\ x - 2y + \ \ z = 0 \\ 3x + \ \ y - 2z = 0 \end{cases}$$

utilizar la eliminación de Gauss-Jordan para determinar el conjunto de soluciones del sistema.

Solución. La forma matricial del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz ampliada correspondiente es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora, podemos aplicar la aliminación de Gauss-Jordan a la matriz ampliada:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & -14 & 10 & 0 \end{array}\right) && -1F_1 + F_2 \to F_2 \\
& && -3F_1 + F_3 \to F_3 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) && -2F_2 + F_3 \to F_3 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) && -\frac{1}{7}F_2 \to F_2 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) && -5F_2 + F_1 \to F_1
\end{aligned}$$

Como la matriz equivalente a la matriz de los coeficientes ya es escalonada reducida por filas, comparamos los rangos $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b) = 2$ y es menor que el número de incógnitas (3) entonces, el sistema tiene infinitas soluciones. Como los sistemas

$$\begin{cases} x + 5y - 4z = 0 \\ x - 2y + \ \ z = 0 \\ 3x + \ \ y - 2z = 0 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} x \quad - \frac{3}{7}z = 0 \\ \quad y - \frac{5}{7}z = 0 \end{cases}$$

son equivalentes, por ende, tienen las mismas soluciones

$$\begin{cases} x \quad = \frac{3}{7}t \\ \quad y \ = \frac{5}{7}t \\ \qquad z = t \end{cases}$$

Es decir, el conjunto de soluciones del sistema es

$$\left\{ \frac{3}{7}t, \frac{5}{7}t, t : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

EJERCICIO 4. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + \ \ y - 3z = -1 \\ 2x + \ \ y - 2z = 1 \\ x + \ \ y + \ \ z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

utilizar la eliminación de Gauss-Jordan para determinar si el sistema es consistente.

Solución. Tenemos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, el sistema en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De donde, la matriz ampliada $(A|b)$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 2 & 1 & -2 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & -3 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos la eliminación de Gauss-Jordan sobre la matriz ampliada, así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 2 & 1 & -2 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & -3 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & -1 & 4 & | & 3 \\ 0 & 0 & 4 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \qquad -2F_1 + F_2 \to F_2$$

$$-1F_1 + F_3 \to F_3$$
$$-1F_1 + F_4 \to F_4$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 5 \\ 0 & 0 & 4 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \qquad F_4 + F_2 \to F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 4 & | & 4 \\ 0 & 0 & 4 & | & 5 \end{pmatrix} \qquad F_2 \leftrightarrow F_4$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 4 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \qquad -1F_3 + F_4 \to F_4$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{4}F_4 \to F_4$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \qquad -1F_2 + F_1 \to F_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \qquad 3F_3 + F_1 \to F_1$$

Con esto, tenemos que $\operatorname{rang}(A) = 3 < \operatorname{rang}(A|b) = 4$, entonces el sistema es inconsistente; es decir, no tiene solución. □

EJERCICIO 5. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$; y considere el sistema lineal

$$\begin{cases} x + \ \ y + \alpha z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = \alpha \\ 2x + 3y - \ \ z = 1 \end{cases}$$

a) Utilizando la eliminación de Gauss-Jordan, determine las condiciones sobre α tales que el sistema tenga solución.

b) Para las condiciones sobre α en que el sistema tiene solución, escriba el conjunto de soluciones del sistema.

Solución. *a*) Tenemos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, el sistema en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De donde, la matriz ampliada $(A|b)$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & | & 2 \\ 3 & 4 & 2 & | & \alpha \\ 2 & 3 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos la eliminación de Gauss-Jordan sobre la matriz ampliada, así:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & | & 2 \\ 3 & 4 & 2 & | & \alpha \\ 2 & 3 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & | & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\alpha & | & \alpha-6 \\ 0 & 1 & -1-2\alpha & | & -3 \end{pmatrix} & \quad -3F_1 + F_2 \to F_2 \\
& \quad -2F_1 + F_3 \to F_3 \\
\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & | & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\alpha & | & \alpha-6 \\ 0 & 0 & \alpha-3 & | & 3-\alpha \end{pmatrix} & \quad -1F_2 + F_3 \to F_3
\end{aligned}$$

Si $\alpha \neq 3$, entonces

$$\begin{aligned}
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & | & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\alpha & | & \alpha-6 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3-\alpha}{\alpha-3} \end{pmatrix} & \frac{1}{\alpha-3}F_3 \to F_3 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2\alpha-4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} & -(2-3\alpha)F_3 + F_2 \to F_2 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & \alpha+2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2\alpha-4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} & -\alpha F_3 + F_1 \to F_1 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3\alpha+6 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2\alpha-4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} & -1F_2 + F_1 \to F_1
\end{aligned}$$

De donde, tenemos que el $\operatorname{rang}(A) = 3 = \operatorname{rang}(A|b)$. Entonces el sistema tiene una solución única si $\alpha \neq 3$. Ahora, analizamos el sistema lineal cuando $\alpha = 3$;es decir, regresamos a la matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & | & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\alpha & | & \alpha-6 \\ 0 & 0 & \alpha-3 & | & 3-\alpha \end{pmatrix}$$

Reemplazamos $\alpha = 3$, realizamos la eliminación de Gauss-Jordan y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & | & 5 \\ 0 & 1 & -7 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Si comparamos los rangos, tenemos que, $\operatorname{rang}(A) = 2 = \operatorname{rang}(A|b)$, pero es menor que el número de incógnitas (3), entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

b) Si $\alpha \neq 3$, la matriz ampliada asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3\alpha+6 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2\alpha-4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}.$$

entonces el conjunto de soluciones del sistema es

$$\{(3\alpha+6, -2\alpha-4, -1) : \alpha \neq 3\}. \qquad \square$$

Si $\alpha = 3$, la matriz ampliada asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & | & 5 \\ 0 & 1 & -7 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Así, tenemos que

$$\begin{cases} x & = 5 - 10r \\ y & = -3 + 7r \\ z = r \end{cases}$$

es una solución del sistema lineal para todo $r \in \mathbb{R}$. Entonces el conjunto de soluciones del sistema, cuando $\alpha = 3$, es

$$\{(5-10r, -3+7r, r) : r \in \mathbb{R}\}.$$

EJERCICIO 6. Sea $p \in \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R}$; y considere el sistema lineal

$$\begin{cases} \quad x + z = q \\ 2w + y = 0 \\ 3w + x + 2z = 0 \\ pw + 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

Determine las condiciones sobre p y q para que el sistema tenga una única solución.

Solución. La representación matricial del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

de donde, la matriz ampliada asociada al sistema es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & p & 3 \end{array}\right)$$

Luego de aplicar la eliminación de Gauss-Jordan a la matriz ampliada, tenemos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2pq-17q+9}{p-13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-6q-6}{p-13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-pq+4q-9}{p-13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3q+3}{p-13} \end{array}\right)$$

De donde, tenemos que, si $p \neq 13$ y para todo $q \in \mathbb{R}$, $\text{rang}(A) = 4 = \text{rang}(A|b)$; y ademas es igual al número de incógnitas (4). Entonces, el sistema es consistente y tiene una única solución si $p \neq 13$ y para todo $q \in \mathbb{R}$. Es fácil verificar que cuando $p = 13$ el sistema o bien no tiene solución o tiene infinitas soluciones, por lo que este caso queda excluido de este análisis. $\square$

EJERCICIO 7. Sea $a \in \mathbb{R}$; y considere el sistema homogéneo

$$\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases}$$

Determine los valores de a tales que el sistema tenga una solución única.

Solución. Buscamos una matriz escalonada reducida por filas equivalente a la matriz ampliada del sistema homogéneo. La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora, la vamos a escalonar y reeducir por filas

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 0 \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ a & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 0 \end{array}\right) && F_1 \leftrightarrow F_2 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1-3a & -1-a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) && -aF_1 + F_2 \to F_2 \\
& && -3F_1 + F_3 \to F_3 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-3a & -1-a & 0 \end{array}\right) && F_3 \leftrightarrow F_2 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a-2 & 0 \end{array}\right) && (3a-1)F_2 + F_3 \to F_3
\end{aligned}$$

Si $2a - 2 \neq 0$, es decir, $a \neq 1$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \frac{1}{2a-2}F_3 \to F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad -1F_3 + F_1 \to F_1$$

$$-1F_3 + F_2 \to F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad -3F_2 + F_1 \to F_1$$

Hemos encontrado la matriz escalonada reducida por filas equivalente a la matriz ampliada del sistema. Comparamos el rango, $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b) = 3$; y es igual al número de incógnitas, entonces el sistema tiene solución única. Nos falta analizar que pasa con el sistema si $a = 1$. Si $a = 1$, todas nuestras operaciones elementales de fila tienen sentido hasta antes de efectuar la operación $\frac{1}{2a-2}F_3$. Es decir, commo $a = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2a-2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad -3F_2 + F_1 \to F_1$$

La cual ya es una matriz escalonada por filas. Comparamos el rango, $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b) = 2$ y éste es menor que el número de incógnitas, por lo tanto tiene infinitas soluciones. Es decir el sistema tiene una solución única, si $a \neq 1$ $\square$

1. Ecuaciones no lineales

Ejercicio 1. Resuelva, paso a paso, las siguientes ecuaciones, luego, compruebe su respuesta en un asistente computacional:

a) $|x+4| = 11$

b) $3|x+1| - 5 = -11$

c) $3|3x-2| + 3 = 7$

d) $9x^3 - 18x^2 - 4x + 8 = 0$

e) $9x^3 - 18x^2 - 4x + 8 = 0$

f) $3x^3 - 5x^2 - 12x + 20 = 0$

g) $4x^4 + 10x^3 = 6x^2 + 15x$

h) $15x^5 - 20x^4 = 6x^3 - 8x^2$

i) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$

j) $2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$

k) $5y^4 - 7y^2 + 1{,}5 = 0$

l) $3y^4 - 5y^2 + 1{,}5 = 0$

m) $x^{-4} - 13x^{-2} + 1 = 0$

n) $x^{-2} - 2x^{-1} - 35 = 0$

Ejercicio 2. Resuelva, paso a paso, las siguientes ecuaciones, luego, compruebe su respuesta en un asistente computacional:

a) $\sqrt{7-2x} - \sqrt{5+x} = \sqrt{4+3x}$

b) $\sqrt{11+8x} + 1 = \sqrt{9+4x}$

c) $2\sqrt{x} - \sqrt{x-3} = \sqrt{5+x}$

d) $\sqrt{2\sqrt{x+1}} = \sqrt{3x-5}$

e) $\sqrt{5\sqrt{x}} = \sqrt{2x-3}$

f) $\sqrt{1+4\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 1$

g) $\sqrt{x+2} = \sqrt{x-2}$

h) $\sqrt{7-5x} = 8$

i) $\sqrt{2x-9} = \frac{1}{2}$

j) $4 + \sqrt[3]{1-5t} = 0$

k) $\sqrt[3]{6-s^2} + 5 = 0$

l) $\sqrt[5]{2x^2+1} - 2 = 0$

m) $\sqrt[4]{6x^2-9} = x$

n) $\sqrt{7-x} = x - 5$

ñ) $\sqrt{3-x} - x = 3$

o) $3\sqrt{2x-3} + 2\sqrt{7-x} = 11$

p) $x - \sqrt{-7x-24} = -2$

q) $26x + \sqrt{5x+19} = -1$

2. Modelamiento con ecuaciones

Ejercicio 3. Un estudiante en un curso de álgebra tiene calificaciones de examen de 75, 82, 71 y 84. ¿Qué calificación en el siguiente examen subirá el promedio del estudiante a 80?

Ejercicio 4. Un estudiante de Matemática Aplicada de la Carrera de Contabilidad y Auditoría de la PUCE tiene notas parciales de 28, 31 y 24. ¿Qué calificación debe sacar en el Examen Final para tener una nota total de 30?

Ejercicio 5. Una pareja no desea gastar más de \$70 por comer en un restaurante. Si se agrega un impuesto de venta de 8 % a la cuenta y piensan dar una propina de 15 % después de agregar el impuesto, ¿cuánto es lo más que pueden gastar en la comida?

Ejercicio 6. El tiempo de una contadora consultora se factura a \$60 por hora y el de su asistente se factura a \$20 por hora. Un cliente recibe una cuenta de \$580 por cierto trabajo. Si el asistente trabajó 5 horas menos que la contadora, ¿cuánto tiempo facturó cada una en el trabajo?

Ejercicio 7. El costo de instalar aislamiento en una casa particular de dos recámaras es \$2400. Los costos mensuales de calefacción actuales promedian \$200, pero se espera que el aislamiento reduzca los costos en 10 %. ¿Cuántos meses tardará en recuperarse el costo del aislamiento?

Ejercicio 8. Un agricultor piensa usar 180 metros de cerca para encerrar una región rectangular, usando parte de una margen recta de un río en lugar de cerca como uno de los lados del rectángulo. Encuentre el área de la región si la longitud del lado paralelo a la margen mide el doble de la longitud de un lado adyacente.

Ejercicio 9. Un fabricante de latas desea construir un bote cilíndrico circular recto de altura 20 centímetros y capacidad de 3000 cm^3. Encuentre el radio de la lata.

EJERCICIO 10. Una caja con base cuadrada y sin tapa ha de construirse de una pieza cuadrada de hojalata al cortar un cuadrado de 3 cm de cada esquina y doblar los lados. Si la caja debe contener 48 cm^3, ¿de qué tamaño debe ser la pieza de hojalata que debe usarse?

EJERCICIO 11. Una hoja de papel de 24 por 36 cm se va a usar para un cartel, con el lado más corto en la parte inferior. Los márgenes de los lados y la parte superior van a tener el mismo ancho, y el margen de abajo va a tener el doble de ancho que los otros márgenes. Encuentre el ancho de los márgenes si el área impresa va a ser de 661.5 cm^2.

3. INECUACIONES

EJERCICIO 12. Resolver las siguientes inecuaciones

a) $3x - 2 > 12$

b) $-2 - 3x \geq 2$

c) $2x + 5 \leq 8$

d) $3 - 5x < 11$

e) $x - 6 > 5x + 3$

f) $2x + 5 < 3x - 7$

g) $x - 6 > 5x + 3$

h) $\frac{1}{4}x + 7 \leq \frac{1}{3}x - 2$

i) $9 + \frac{1}{3}x \geq 4 - \frac{1}{2}$

EJERCICIO 13. Resuelva las siguientes inecuaciones

a) $(2x - 3)(4x + 5) \leq (8x + 1)(x - 7)$

b) $(x - 3)(x + 3) \geq (x + 5)^2$

c) $(x - 4)^2 > x(x + 12)$

d) $|3x - 7| \geq 5$

e) $-\frac{1}{3}|6 - 5x| + 2 \geq 1$

f) $2|-11 - 7x| - 2 > 10$

g) $|7x + 2| > -2$

h) $|6x - 5| \leq -2$

EJERCICIO 14. Resolver las inecuaciones

a) $(3x+1)(5-10x) > 0$
b) $(2-3x)(4x-7) \geq 0$
c) $(x+2)(x-1)(4-x) \leq 0$
d) $(x-6)(x+3)(-2-x) < 0$
e) $x^2 - x - 6 < 0$
f) $x^2 + 4x + 3 \geq 0$
g) $x^2 - 2x - 7 > 1$
h) $x^2 - 4x - 15 \leq 6$
i) $x(2x+3) \geq 5$
j) $x(3x-1) \leq 4$
k) $8x - 15 > x^2$

EJERCICIO 15. Resuelva las siguientes inecuaciones

a) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \geq 0$
b) $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 \leq 0$
c) $\dfrac{x^2(x+2)}{(x+2)(x+1)} \leq 0$
d) $\dfrac{(x^2+1)(x-3)}{x^2-9} \geq 0$
e) $\dfrac{x^2-x}{x^2+2x} \leq 0$
f) $\dfrac{(x+3)^2(2-x)}{(x+4)(x^2-4)} \leq 0$

EJERCICIO 16. Resuelva las inecuaciones

a) $\dfrac{x+1}{2x-3} > 2$
b) $\dfrac{x-2}{3x+5} \leq 4$
c) $\dfrac{1}{x-2} \geq \dfrac{3}{x+1}$
d) $\dfrac{2}{2x+3} \leq \dfrac{2}{x-5}$
e) $\dfrac{4}{3x-2} \leq \dfrac{2}{x+2}$
f) $\dfrac{3}{5x+1} \geq \dfrac{1}{x-3}$
g) $\dfrac{x}{3x-5} \leq \dfrac{2}{x-1}$

EJERCICIO 17. Resolver la siguiente inecuación:

$$\frac{1}{3-2x} \geq \frac{2}{2+x}.$$

EJERCICIO 18. Una empresa constructora está tratando de decidir cuál de dos modelos de grúa comprar. El modelo A cuesta \$100,000 y requiere \$8000 por año para su mantenimiento. El modelo B tiene un costo inicial de \$80,000 y su mantenimiento cuesta \$11,000 por año. ¿Durante cuántos años debe usarse el modelo A antes de que sea más económico que B?

EJERCICIO 19. Un consumidor está tratando de decidir si comprar el auto A o el B. El auto A cuesta \$20 000 y tiene un rendimiento de combustible de 30 millas por galón y el seguro cuesta \$1000 por año. El auto B cuesta \$24 000 y tiene un rendimiento de 50 millas por galón, y el seguro cuesta \$1200 por año. Suponga que el consumidor recorre 15 000 millas por año y que el precio de la gasolina permanece constante en \$3 por galón. Con base sólo en estos datos, determine cuánto tiempo tomará para que el costo total del auto B sea menor que el del auto A.

EJERCICIO 20. Para producir una unidad de un producto nuevo, una compañía determina que el costo del material es de \$2,50 y el de mano de obra de \$4. El costo fijo constante, sin importar el volumen de ventas, es de \$5000. Si el precio para un mayorista es de \$7,40 por unidad, determine el número mínimo de unidades que deben venderse para que la compañía obtenga utilidades.

EJERCICIO 21. Una mujer de negocios quiere determinar la diferencia entre el costo de comprar un automóvil y el de arrendarlo con opción a compra. Puede rentar un automóvil por \$420 al mes (cotizado anualmente). Bajo este plan, el costo por km (gasolina y aceite) es \$0,06. Si comprara el automóvil, el gasto fijo anual sería de \$4700, y los otros costos ascenderían a \$0,08 por km. ¿Cuál es el mínimo de kilómetros que tendría que conducir por año para que el arrendamiento no fuese más caro que la compra?

EJERCICIO 22. Suponga que una compañía le ofrece un puesto en ventas en el que usted elige entre dos métodos para determinar su salario anual. Un método paga \$35 000 más un bono del 3 % sobre sus ventas del año. El otro método paga una comisión directa del 5 % sobre sus ventas. ¿Para qué nivel de ventas anuales es mejor seleccionar el primer método?

EJERCICIO 23. La razón de circulante de una empresa es 3,8. Si sus activos circulantes son de \$570 000, ¿cuáles son sus pasivos circulantes? Para elevar sus fondos de reserva, ¿cuál es la cantidad máxima que puede pedir prestada a corto plazo si quiere que su razón de circulante no sea menor que 2,6?

EJERCICIO 24. La razón de la prueba del ácido (o razón rápida) de un negocio es la razón de sus activos líquidos –efectivo y valores más cuentas por cobrar– sobre sus pasivos circulantes. La mínima razón para que una compañía tenga finanzas sólidas es de 1,0 aproximadamente, pero, por lo general, esto varía un poco de una industria a otra. Si una compañía tiene \$450 000 en efectivo y valores, y tiene \$398 000 en pasivos circulantes, ¿cuánto necesita tener en cuentas por cobrar para mantener la razón rápida en 1,3 o por arriba de este valor?

PUCE

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA

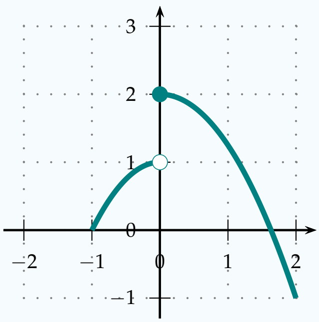
MATEMÁTICA APLICADA • EJERCICIOS NO. 05

Semestre 2020-2 | Mat. Andrés Merino

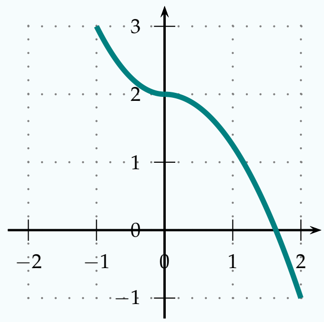
1. FUNCIONES

EJERCICIO 1. Dadas las siguientes funciones:

$f\colon [-1,2] \to [-1,3]$



$g\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$



a) Determine la imagen de f y la imagen de g.

b) ¿Cuál es el valor de $f(0)$?, ¿de $f(2)$?, ¿de $g(-1)$?, ¿de $g(2)$?

EJERCICIO 2. Dadas

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x+1 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2-x+1, \end{aligned}$$

determinar $f(0)$, $g(1)$, $f(x+2)$, $f(x+h)$, $g(x+h)$, $f(g(x))$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$, para $x, h \in \mathbb{R}$ con $h \neq 0$.

Solución.

- Para $f(0)$:

$$f(0) = 3(0) + 1 = 1.$$

- Para $f(x+2)$:

$$f(x+2) = 3(x+2) + 1 = 3x + 7.$$

- Para $f(x+h)$:

$$f(x+h) = 3(x+h) + 1 = 3x + 3h + 1.$$

- Para $g(x+h)$:

$$g(x+h) = (x+h)^2 - (x+h) + 1 = x^2 + 2hx + h^2 - h - x + 1.$$

- Para $f(g(x))$:

$$f(g(x)) = f(x^2 - x + 1) = 3(x^2 - x + 1) + 1 = 3x^2 - 3x + 4.$$

- Para $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{3(x+h) + 1 - (3x+1)}{h} = \frac{3h}{h} = 3.$$

$\square$

EJERCICIO 3. Resolver los ejercicio 29, 31, 33, y 35 de la sección de problemas 2.1 del libro "Matemática para Administración y Economía" de Haeussler.
`https://bit.ly/2WPXNL5`

EJERCICIO 4. Determine la razón de cambio promedio de las siguientes funciones

a) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -x^3 - 1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x - x^2 + 2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^4 - 2x^2 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} \setminus \{2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2}{2-x} \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2}{2+x^2} \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{2+x^2} \end{aligned}$

Solución.

a) Tenemos que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-(x+h)^3 - 1 - (-x^3 - 1)}{h}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-1+x^3+1}{h}\\
&= \frac{-x^3-3x^2h-3xh^2-h^3+x^3}{h}\\
&= \frac{-3x^2h-3xh^2-h^3}{h}\\
&= \frac{h(-3x^2-3xh-h^2)}{h}\\
&= -3x^2-3xh-h^2.
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que la razón de cambio promedio es:

$$-3x^2-3xh-h^2.$$

Usando Mathematica

```
In[1]:= f[x_]=-x^3-1;
        Expand[(f[x+h]-f[x])/h]

Out[1]= -3 x^2-3 x h-h^2
```

b) Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)-(x+h)^2+2-(x-x^2+2)}{h}\\
&= \frac{x+h-(x^2+2xh+h^2)+2-x+x^2-2}{h}\\
&= \frac{x+h-x^2-2xh-h^2+2-x+x^2-2}{h}\\
&= \frac{h-2xh-h^2}{h}\\
&= \frac{h(1-2x-h)}{h}\\
&= 1-2x-h.
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que la razón de cambio promedio es:

$$1-2x-h.$$

Usando Mathematica

```
In[2]:= f[x_]=x-x^2+2;
        Expand[(f[x+h]-f[x])/h]
```

```
Out[2]=  1-2 x-h
```

e) Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{(x+h)^2}{2+(x+h)^2}-\frac{x^2}{2+x^2}}{h}\\
&= \frac{\frac{(x+h)^2(2+x^2)-x^2(2+(x+h)^2)}{(2+(x+h)^2)(2+x^2)}}{h}\\
&= \frac{\frac{(x^2+2xh+h^2)(2+x^2)-x^2(2+x^2+2xh+h^2)}{((2+(x+h)^2)(2+x^2))}}{h}\\
&= \frac{\frac{2x^2+4xh+2h^2+x^4+2x^3h+x^2h^2-2x^2-x^4-2x^3h-x^2h^2}{(2+(x+h)^2)(2+x^2)}}{h}\\
&= \frac{\frac{4xh+2h^2}{(2+(x+h)^2)(2+x^2)}}{h}\\
&= \frac{\frac{h(4x+2h)}{(2+(x+h)^2)(2+x^2)}}{h}\\
&= \frac{h(4x+2h)}{h(2+(x+h)^2)(2+x^2)}\\
&= \frac{4x+2h}{(2+(x+h)^2)(2+x^2)}\\
&= \frac{2(2x+h)}{(2+x^2+2xh+h^2)(2+x^2)}.
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que la razón de cambio promedio es:

$$\frac{2(2x+h)}{(2+x^2+2xh+h^2)(2+x^2)}.$$

Usando Mathematica

```
In[3]:=  f[x_]=x^2/(2+x^2);
           Simplify[(f[x+h]-f[x])/h]
```

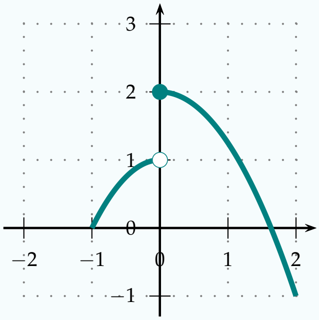
$$\text{Out[3]=}\quad \frac{2\ (2\ x+h)}{(2+x^2)\ (2+x^2+2xh+h^2)}$$

□

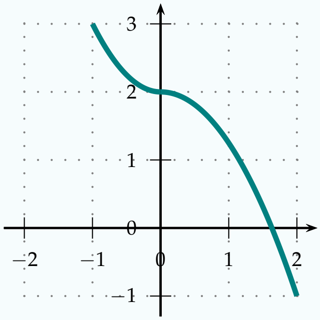
1. MONOTONÍA

EJERCICIO 1. Dadas las siguientes funciones:

$f\colon [-1,2] \to [-1,3]$



$g\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$



Determine los intervalos de monotonía de la función.

Solución. Para f:

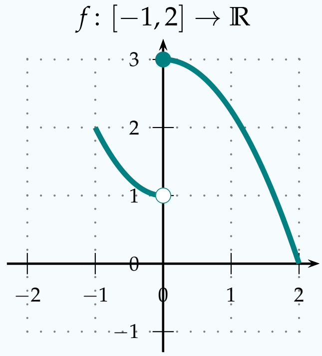
- estrictamente creciente en $[-1,0]$;
- estrictamente decreciente en $[0,2]$.

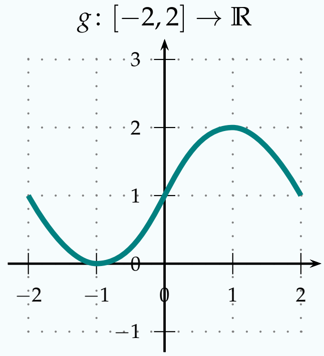
Para g:

- estrictamente decreciente en $[-1,2]$.

□

EJERCICIO 2. Dadas las siguientes funciones:





Determine los intervalos de monotonía de la función.

Solución. Para f:

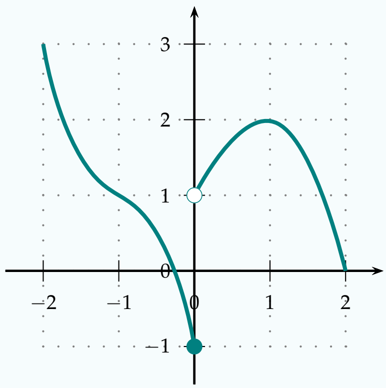
- estrictamente decreciente en $[-1,0[$;
- estrictamente decreciente en $[0,2]$.

Para g:

- estrictamente decreciente en $[-2,-1]$;
- estrictamente creciente en $[-1,1]$;
- estrictamente decreciente en $[1,2]$.

□

EJERCICIO 3. Considere la función $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ cuya gráfica se muestra a continuación.



a) Determine los intervalos donde es creciente.

b) Determine los intervalos donde es decreciente.

Solución.

a) La función es creciente en el intervalo $[0, 1]$.

b) La función es decreciente en el intervalo $[-2, 0]$ y en el intervalo $[1, 2]$. $\square$

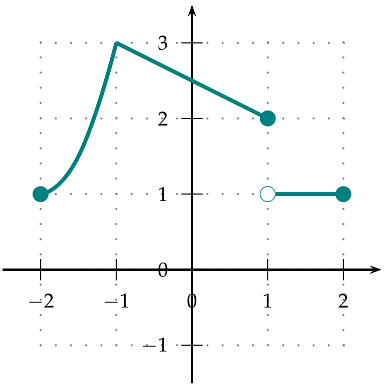
EJERCICIO 4. Dibuje una función $f: [-2, 2] \to \mathbb{R}$ tal que

- sea creciente en $[-2, -1]$;
- sea decreciente en $[-1, 1]$;
- sea constante en $[1, 2]$.

EJERCICIO 5. Dibuje una función $f: [-2, 2] \to \mathbb{R}$ tal que

- $f(-2) = 1$, $f(-1) = 3$, $f(1) = 2$;
- sea creciente en $[-2, -1[$;
- sea decreciente en $[-1, 1]$;
- sea constante en $[1, 2]$.

Solución. Una posible gráfica para la función es:



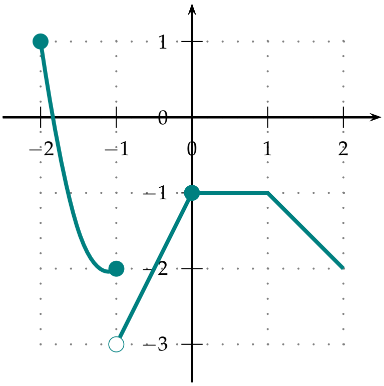
$\square$

EJERCICIO 6. Dibuje una función $f: [-2, 2] \to \mathbb{R}$ tal que

- $f(-2) = 1$, $f(-1) = -2$, $f(0) = -1$;

- sea decreciente en $[-2,-1]$;
- sea creciente en $]-1,0]$;
- sea constante en $[0,1]$;
- sea decreciente en $[1,2]$.

Solución. Una posible gráfica para la función es:



□

Ejercicio 7. Utilizando algún asistente computacional, determine los intervalos de monotonía de las siguientes funciones:

a) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -x^3-1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x-x^2+2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^4-2x^2 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} f:\mathbb{R}\setminus\{2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2}{2-x} \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2}{2+x^2} \end{aligned}$

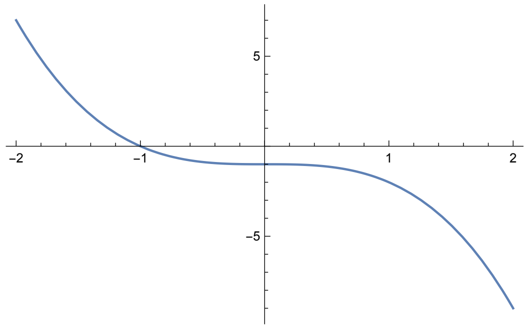
f) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{2+x^2} \end{aligned}$

Solución.

a) Usando Mathematica tenemos que la gráfica de la función está dada por:

```
In[1]:= Plot[-x^3-1,{x,-2,2}]
```

Out[1]=

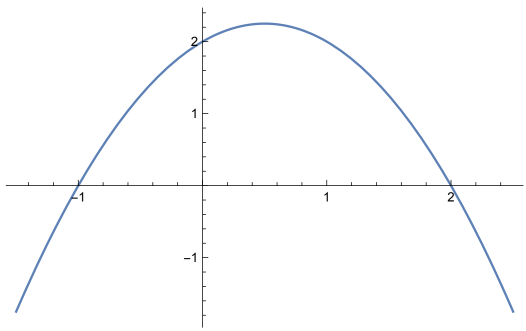


Así, la función f es decreciente en todo su dominio; es decir en $\mathbb{R}$.

b) Usando Mathematica tenemos que la gráfica de la función está dada por:

In[2]:=
```
Plot[x-x^2+2,{x,-5,5}]
```

Out[2]=



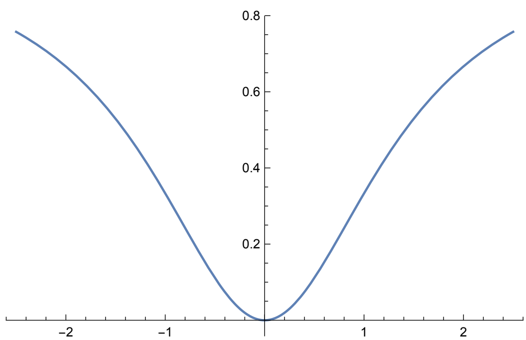
Así:

- la función f es creciente en el intervalo $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$;
- la función f es decreciente en el intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

d) Usando Mathematica tenemos que la gráfica de la función está dada por:

In[3]:=
```
Plot[x^2/(2+x^2),{x,-2.5,2.5}]
```

Out[3]=



Así:

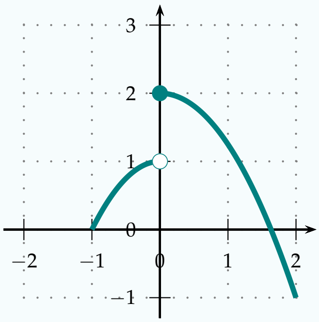
- la función f es decreciente en el intervalo $]-\infty, 0[$;
- la función f es creciente en el intervalo $]0, +\infty[$.

$\square$

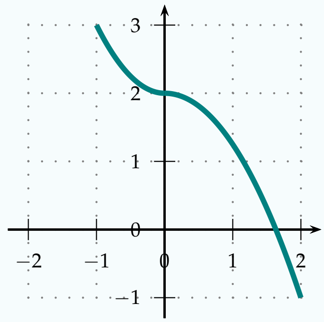
2. Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Ejercicio 8. Dadas las siguientes funciones:

$f\colon [-1,2] \to [-1,3]$



$g\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$

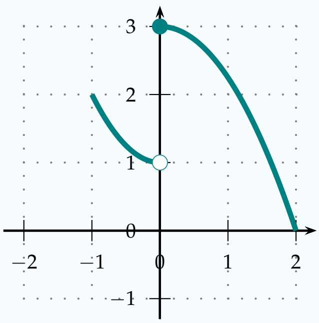


Determine si las funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

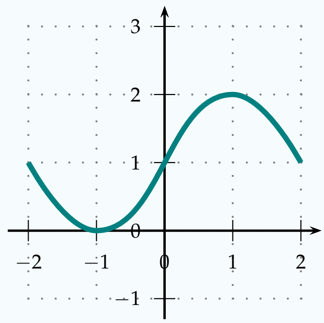
Solución. Tenemos que f no es inyectiva ya que, por ejemplo, existen dos valores distintos u, v tal que $f(u) = f(v) = 0$. Por otro lado, g sí es inyectiva. $\square$

Ejercicio 9. Dadas las siguientes funciones:

$f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$



$g\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$



Determine si las funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

Solución. Tenemos que f no es inyectiva ya que, por ejemplo, existen dos valores distintos u, v tal que $f(u) = f(v) = 2$. Por otro lado, g tampoco es inyectiva ya que, por ejemplo, existen dos valores distintos u, v tal que $g(u) = g(v) = 1$. $\square$

EJERCICIO 10. Utilizando algún asistente computacional para graficar las siguientes funciones, determine si son inyectivas o sobreyectivas:

a) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -x^3 - 1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x - x^2 + 2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^4 - 2x^2 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} f:\mathbb{R}\setminus\{2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2}{2-x} \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2}{2+x^2} \end{aligned}$

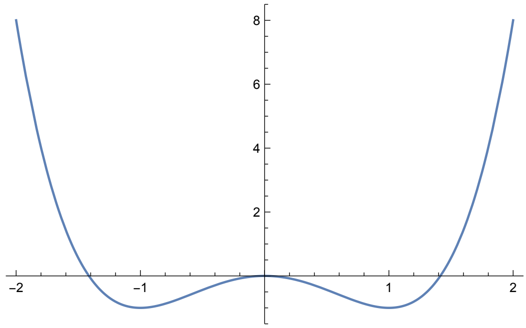
f) $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{2+x^2} \end{aligned}$

Solución.

c) Usando Mathematica, tenemos que la gráfica de la función es:

In[4]:=
```
Plot[x^4-2x^2,{x,-2,2}]
```

Out[4]=

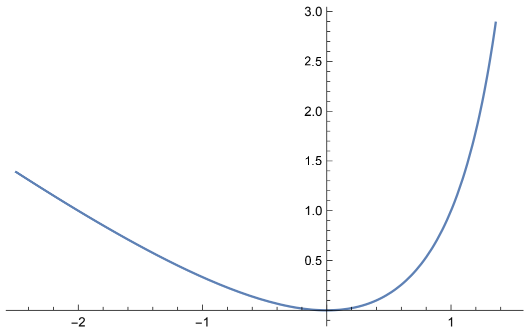


Así, puesto que $f(-1) = f(1) = -1$ entonces f no es inyectiva.

d) Usando Mathematica, tenemos que la gráfica de la función es:

In[5]:=
```
Plot[x^2/(2-x),{x,-2.5,1.5}]
```

Out[5]=

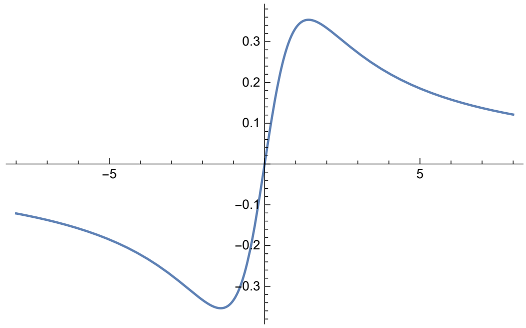


Así, puesto que $f(-2) = f(1) = 1$ entonces f no es inyectiva.

f) Usando Mathematica, tenemos que la gráfica de la función es:

In[6]:=
```
Plot[x/(2+x^2),{x,-8,8}]
```

Out[6]=



Así, puesto que existen u, v tales que $f(u) = f(v) = 0{,}2$ entonces f no es inyectiva. $\square$

3. Composición de funciones y función inversa

Ejercicio 11. Dadas

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 - x + 1 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x + 1, \end{aligned}$$

determinar $(f \circ g)(-1)$, $(f \circ g)(2)$ y $(g \circ f)(2)$.

Solución.

- Calculando $(f \circ g)(-1)$ tenemos:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(-1) &= f(g(-1)) \\ &= f(3(-1)+1) \\ &= f(-2) \\ &= (-2)^2 - (-2) + 1 \\ &= 9.\end{aligned}$$

- Calculando $(g \circ f)(2)$ tenemos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(2) &= g(f(2)) \\ &= g((2)^2 - (2) + 1) \\ &= g(3) \\ &= 3(3) + 1 \\ &= 10.\end{aligned}$$

- Calculando $(f \circ g)(2)$ tenemos:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(2) &= f(g(2)) \\ &= f(3(2)+1) \\ &= f(7) \\ &= (7)^2 - (7) + 1 \\ &= 43.\end{aligned}$$

□

EJERCICIO 12. Dadas

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 - x + 1 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x + 1, \end{aligned}$$

determinar $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

Solución.

- Para $f \circ g$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(3x+1) \\ &= (3x+1)^2 - (3x+1) + 1 \\ &= 9x^2 + 3x + 1.\end{aligned}$$

- Para $g \circ f$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g\left(x^2 - x + 1\right) \\ &= 3(x^2 - x + 1) + 1 \\ &= 3x^2 - 3x + 4.\end{aligned}$$

□

EJERCICIO 13. Dadas

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x-3 \quad \text{y} \quad x \longmapsto \frac{1}{x^2+2},$$

determinar $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$ para $x\in\mathbb{R}$.

Solución.

- Para $f\circ g$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f\left(\tfrac{1}{x^2+2}\right)\\ &= \left(\tfrac{1}{x^2+2}\right)-3\\ &= \frac{-3x^2-5}{x^2+2}.\end{aligned}$$

- Para $g\circ f$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g(x-3)\\ &= \frac{1}{(x-3)^2+2}\\ &= \frac{1}{x^2-6x+11}.\end{aligned}$$

□

EJERCICIO 14. Dadas

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{x^2+1} \quad \text{y} \quad x \longmapsto \frac{1}{x^2+2},$$

determinar $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$ para $x\in\mathbb{R}$.

Solución.

- Para $f\circ g$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f\left(\tfrac{1}{x^2+2}\right)\\ &= \frac{\frac{1}{x^2+2}}{\left(\frac{1}{x^2+2}\right)^2+1}\\ &= \frac{x^2+2}{x^4+4x^2+5}.\end{aligned}$$

- Para $g\circ f$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g\left(\tfrac{x}{x^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2+2}\\ &= \frac{(x^2+1)^2}{2+5x^2+2x^4}.\end{aligned}$$

□

EJERCICIO 15. Encuentre $(f \circ g)(x)$, $(f \circ f)(x)$ y $(g \circ f)(x)$, donde las funciones f y g están definidas por:

a) $f(x) = \sqrt{3-x}$ $\quad g(x) = \sqrt{x^2-16}$

b) $f(x) = x^3+5$ $\quad g(x) = \sqrt[2]{x-5}$

c) $f(x) = \dfrac{2x+3}{5}$ $\quad g(x) = \dfrac{5x-3}{2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ $\quad g(x) = x-1$

e) $f(x) = x^2$ $\quad g(x) = \frac{1}{x^3}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ $\quad g(x) = \frac{3}{x}$

g) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ $\quad g(x) = \dfrac{x-3}{x-4}$

h) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ $\quad g(x) = \dfrac{x-5}{x+4}$

EJERCICIO 16. Encuentre la función inversa de f, donde la función f está definida por:

a) $f(x) = 3x+5$

b) $f(x) = 7-2x$

c) $f(x) = \dfrac{3}{2x-5}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

e) $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-5}$

f) $f(x) = \dfrac{4x}{x-2}$

g) $f(x) = 2-3x^2$, con $x \leq 0$

h) $f(x) = 5x^2+2$, con $x \geq 0$

Semestre 2020-2 Mat. Andrés Merino

1. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

EJERCICIO 1. Trace la gráfica de las funciones definidas por

a) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$

b) $f(x) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 3$

c) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 4$

d) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 8$

e) $f(x) = 2^{|x|}$

f) $f(x) = 3^{1-x^2}$

g) $f(x) = 3^x + 3^{-x}$

EJERCICIO 2. Trace la gráfica de las funciones definidas por

a) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

b) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

c) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

EJERCICIO 3. Trace la gráfica de las funciones definidas por

a) $f(x) = \log(x + 10)$

b) $f(x) = \log(x + 100)$

c) $f(x) = \ln|x|$

d) $f(x) = \ln|x - 1|$

e) $f(x) = \ln(e) + x$

f) $f(x) = \ln(e + x)$

EJERCICIO 4. Trace la gráfica de las funciones definidas por

a) $f(x) = 2\log(x + 2)$

b) $f(x) = x\ln(x)$

c) $f(x) = \ln(x)$

d) $f(x) = 3e^{x^2}$

e) $f(x) = 3e^{x^3}$

f) $f(x) = \ln(x) - e^x$

EJERCICIO 5. Exprese en términos de logaritmos de x, y, z o w.

a) $\log_4(xz)$

b) $\log_4(y/x)$

c) $\log_4\left(\sqrt[3]{z}\right)$

d) $\log_3(xyz)$

e) $\log_3(xz/y)$

f) $\log_3\left(\sqrt[5]{y}\right)$

g) $\log_a\left(\dfrac{x^3w}{y^2z^4}\right)$

h) $\log_a\left(\dfrac{y^5w^2}{x^4z^3}\right)$

i) $\log\left(\dfrac{\sqrt[3]{z}}{x\sqrt{y}}\right)$

j) $\log\left(\dfrac{\sqrt{y}}{x^4\sqrt[3]{z}}\right)$

k) $\ln\left(\sqrt[4]{\dfrac{x^7}{y^5z}}\right)$

l) $\ln\left(x\sqrt{\dfrac{y^4}{z^5}}\right)$

2. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Ejercicio 6. Resuelva la ecuación.

a) $7^{x+6} = 7^{3x-4}$

b) $6^{7-x} = 6^{2x+1}$

c) $9^{\left(x^2\right)} = 3^{3x+2}$

d) $\left(3^3\right)^{2x+3} = 3^{\left(x^7\right)}$

e) $2^{-100x} = (0{,}5)^{x-4}$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-x} = 2$

g) $25^{x-3} = 125^{4-x}$

h) $27^{x-1} = 9^{2x-3}$

i) $4^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x} = 8 \cdot \left(2^x\right)^2$

j) $9^{2x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = 27 \cdot \left(3^x\right)^{-2}$

Solución.

a) Tenemos que

$$\begin{aligned} 7^{x+6} = 7^{3x-4} &\implies x+6 = 3x-4 && \text{Proposición 3d} \\ &\implies 10 = 2x \\ &\implies x = \frac{10}{2}. \end{aligned}$$

Así, tenemos que la solución de la ecuación

$$7^{x+6} = 7^{3x-4}$$

es $x = 5$.

d) Tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(3^3\right)^{2x+3} = 3^{(x^7)} &\implies 3^{3(2x+3)} = 3^{x^7} \\
&\implies 3^{6x+9} = 3^{(x^7)} \\
&\implies 6x + 9 = x^7 && \text{Proposición 3d} \\
&\implies x^7 - 6x - 9 = 0.
\end{aligned}$$

Usando Mathematica, tenemos que

```
In[1]:= Solve[x^7-6x-9==0,x, Reals] // N

Out[1]= {{x→1.5120769829063654`}}
```

Así, tenemos que la solución de la ecuación

$$\left(3^3\right)^{2x+3} = 3^{(x^7)}$$

es $x \approx 1{,}51$.

j) Tenemos que

$$\begin{aligned}
9^{2x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = 27 \cdot \left(3^x\right)^{-2} &\implies \left(3^2\right)^{2x} \cdot \left(3^{-1}\right)^{x+2} = 3^3 \cdot 3^{-2x} \\
&\implies 3^{4x} \cdot 3^{-x-2} = 3^{3-2x} \\
&\implies 3^{3x-2} = 3^{3-2x} \\
&\implies 3x - 2 = 3 - 2x && \text{Proposición 3d} \\
&\implies x = 1.
\end{aligned}$$

Así, tenemos que la solución de la ecuación

$$9^{2x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = 27 \cdot \left(3^x\right)^{-2}$$

es $x = 1$. □

EJERCICIO 7. Resuelva la ecuación.

a) $\log_4(x+10) = \log_4(8-x)$

b) $\log_3(x+4) = \log_3(1-x)$

c) $\log_5(x-2) = \log_5(3x+7)$

d) $\log_7(x-5) = \log_7(6x)$

e) $\log(x^2) = \log(-3x-2)$

f) $\ln(x^2) = \ln(12-x)$

g) $\log_3(x-4) = 2$

h) $\log_2(x-5) = 4$

i) $\log_9(x) = -\frac{3}{2}$

j) $\log_4(x) = -\frac{3}{2}$

k) $\ln(x^2) = -2$

l) $\log(x^2) = -4$

m) $e^{2\ln(x)} = 9$

n) $e^{-\ln(x)} = 0{,}2$

ñ) $e^{x\ln(3)} = 27$

o) $e^{x\ln(2)} = 0{,}25$

Solución.

a) Tenemos que

$$\begin{aligned} &\log_4(x+10) = \log_4(8-x) \implies \\ &\implies \quad x+10 = 8-x && \text{Proposición 4f, con } x+10>0 \text{ y } 8-x>0 \\ &\implies \quad 2x = -2 \\ &\implies \quad x = -1. \end{aligned}$$

Comprobando las condiciones, tenemos:

- $(-1)+10 = 9 > 0$
- $8-(-1) = 9 > 0$

Así, tenemos que la solución de la ecuación

$$\log_4(x+10) = \log_4(8-x)$$

es $x = -1$.

e) Tenemos que

$$\begin{aligned} &\log(x^2) = \log(-3x-2) \implies \\ &\implies \quad x^2 = -3x-2 && \text{Proposición 4f, con } x^2>0 \text{ y } -3x-2>0 \\ &\implies \quad x^2+3x+2 = 0 \\ &\implies \quad x = -2 \quad \vee \quad x = -1. \end{aligned}$$

Comprobando las condiciones, para $x = -1$, tenemos:

- $(-1)^2 = 1 > 0$,
- $-3(-1) - 2 = 1 > 0$,

por lo tanto, sí es solución. Para $x = -1$, tenemos:

- $(-2)^2 = 4 > 0$,
- $-3(-2) - 2 = 4 > 0$,

por lo tanto, sí es solución. Así, tenemos que las soluciones de la ecuación

$$\log(x^2) = \log(-3x - 2)$$

son $x = -2$ y $x = -1$.

g) Tenemos que

$$\begin{aligned} \log_3(x-4) = 2 \quad &\Longrightarrow \quad \exp_3\left(\log_3(x-4)\right) = \exp_3(2) \quad && \text{Proposición 2 b} \\ &\Longrightarrow \quad x - 4 = 9 \\ &\Longrightarrow \quad x = 13 \end{aligned}$$

Así, tenemos que la solución de la ecuación

$$\log_3(x-4) = 2$$

es $x = 13$.

m) Tenemos que

$$\begin{aligned} e^{2\ln(x)} = 0{,}2 \quad &\Longrightarrow \quad e^{\ln(x^2)} = 0{,}2 \quad && \text{Proposición 2 e} \\ &\Longrightarrow \quad x^2 = 0{,}2 && \text{Proposición 2 b} \\ &\Longrightarrow \quad x = \sqrt{0{,}2} \end{aligned}$$

Así, tenemos que la solución de la ecuación

$$e^{2\ln(x)} = 0{,}2$$

es $x = \sqrt{0{,}2}$.

□

EJERCICIO 8. Resuelva la ecuación.

a) $\log x = 1 - \log(x - 3)$

b) $\log(5x + 1) = 2 + \log(2x - 3)$

c) $\log\left(x^2+4\right)-\log(x+2)=2+\log(x-2)$

d) $\log(x+3)+\log(x-3)=\log\left(x^2+5\right)-2$

e) $\log(x-1)=\log(2/x)+\log(3x-5)$

f) $\log(x-4)-\log(3x-10)=\log(1/x)$

g) $5^x+125\left(5^{-x}\right)=30$

h) $3\left(3^x\right)+9\left(3^{-x}\right)=28$

i) $4^x-3\left(4^{-x}\right)=8$

j) $2^x-6\left(2^{-x}\right)=6$

Solución.

a) Tenemos que

$$\begin{aligned}
\log(x)=1-\log(x-3) \quad &\Longrightarrow \quad \log(x)+\log(x-3)=1 \\
&\Longrightarrow \quad \log\left(x(x-3)\right)=1 \\
&\Longrightarrow \quad \exp\left(\log(x(x-3)\right)=\exp(1) \qquad \text{Proposición 2 c} \\
&\Longrightarrow \quad x(x-3)=10 \qquad \text{Proposición 2 b} \\
&\Longrightarrow \quad x^2-3x=10 \\
&\Longrightarrow \quad x^2-3x-10=0 \\
&\Longrightarrow \quad x=-2 \quad \vee \quad x=5.
\end{aligned}$$

Notemos que el logaritmo solo puede tomar números positivos como argumentos; así, descartamos $x=-2$ y tenemos que la solución de la ecuación

$$\log(x)=1-\log(x-3)$$

es $x=5$.

d) Tenemos que

$$\begin{aligned}
&\log(x+3)+\log(x-3)=\log(x^2+5)-2 \\
&\qquad \Longrightarrow \quad \log((x+3)(x-3))=\log(x^2+5)-2 \qquad \text{Proposición 2 c} \\
&\qquad \Longrightarrow \quad \log(x^2+5)-\log(x^2-9)=2 \\
&\qquad \Longrightarrow \quad \log\left(\frac{x^2+5}{x^2-9}\right)=2 \qquad \text{Proposición 2 d}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\implies && \exp\left(\log\left(\frac{x^2+5}{x^2-9}\right)\right) = \exp(2) && \text{Proposición 3 a}\\
&\implies && \frac{x^2+5}{x^2-9} = 100 && \text{Proposición 2 b}\\
&\implies && x^2+5 = 100(x^2-9)\\
&\implies && x^2+5 = 100x^2-900\\
&\implies && 99x^2-995 = 0
\end{aligned}
$$

De donde, tenemos que

$$x = \pm\sqrt{\frac{995}{99}} \approx 3{,}1702.$$

Dado que el logaritmo solo admite argumentos positivos, descartamos la solución negativa y por lo tanto la solución de la ecuación

$$\log(x+3) + \log(x-3)$$

es $x \approx 3{,}17$.

g) Tenemos que, tomando

$$u = 5^x, \tag{1}$$

se sigue que

$$
\begin{aligned}
5^x + 125(5^{-x}) = 30 \quad &\implies \quad u + \frac{125}{u} = 30\\
&\implies \quad \frac{u^2+125}{u} = 30\\
&\implies \quad u^2 + 125 = 30u\\
&\implies \quad u^2 - 30u + 125 = 0\\
&\implies \quad u = 5 \quad \vee \quad u = 25.
\end{aligned}
$$

De donde, por (1) y con los resultados encontrados, tenemos que

$$5 = 5^x \quad \text{y} \quad 25 = 5^x;$$

resolviendo las ecuaciones, tenemos que las soluciones de la ecuación

$$5^x + 125(5^{-x}) = 30$$

son $x = 1$ y $x = 2$.

j) Tenemos que, tomando

$$u = 2^x, \tag{2}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} 2^x - 6(2^{-x}) = 6 \quad &\implies \quad u - \frac{6}{u} = 6 \\ &\implies \quad \frac{u^2 - 6}{u} = 6 \\ &\implies \quad u^2 - 6 = 6u \\ &\implies \quad u^2 - 6u - 6 = 0. \end{aligned}$$

Usando la fórmula general, tenemos que

$$u = 3 \pm \sqrt{15},$$

notemos que $\sqrt{15} > 3$; así, descartamos la solución negativa y tenemos que

$$u = 3 + \sqrt{15}.$$

Así, junto con (2) se tiene que

$$3 + \sqrt{15} = 2^x \quad \implies \quad x = \log_2(3 + \sqrt{15}).$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación

$$2^x - 6(2^{-x}) = 6$$

es $x = \log_2(3 + \sqrt{15})$. $\square$

1. MODELOS

EJERCICIO 1. Se quiere construir una caja sin tapa de base cuadrada que tenga 1000 cm^3 de capacidad.

a) Modele el área lateral de la caja en función de la longitud de su base.

b) Si la base de la caja mide 5 centímetros, ¿cuál es el área de la caja?

Solución.

a) Para el modelamiento, consideremos lo siguiente:

Variables:

- h: altura de la caja, en cm.
- x: longitud del lado de la base de la caja, en cm.
- $A(x)$: área lateral de la caja, en función de la longitud del lado de la base, en cm^2.

Planteamiento: Tenemos que la función del área es:

$$\begin{aligned} A\colon]0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 4xh. \end{aligned}$$

Ahora, para que la caja tenga 1000 cm^3 es necesario que

$$x^2 h = 1000,$$

de donde

$$h = \frac{1000}{x^2},$$

con esto, la función A nos queda

$$\begin{aligned} A\colon]0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 4x\left(\frac{1000}{x^2}\right) = x^2 + \frac{4000}{x}. \end{aligned}$$

b) Evaluemos la función A en 5,

$$A(5) = 5^2 + \frac{4000}{5} = 825.$$

Por lo tanto, el área de la caja cuando el lado de la base mide 5 cm es de 825 cm^2. □

EJERCICIO 2. Se desea construir un silo en forma cilíndrica con capacidad máxima de 16π m^3 y una altura de 4 m.

a) Construya un modelo que represente la cantidad de metal en función del radio.

b) Determine la cantidad de metal necesario para construir el silo.

Solución.

a) Para el modelamiento, consideremos lo siguiente:

Variables:

- x: radio del silo, en m.
- $C(x)$: cantidad de metal en función del radio del silo (área superficial), en m^2.

Planteamiento: Tenemos que la cantidad de metal necesario para construir el silo es

$$\text{área superficial} = \text{área de la tapa y fondo} + \text{área costados}$$

en este sentido, podemos expresar el área de la tapa, el fondo y costados en términos del radio del silo

Representación verbal	Representación algebraica
Radio del silo	x
Altura del silo	4
Área del piso y del techo	$2\pi x^2$
Área del costado	$2\ \pi x(4) = 8\pi x$

con esto, la función C nos queda

$$\begin{aligned} C\colon]0,\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2\pi x^2 + 8\pi x. \end{aligned}$$

b) Para determinar la cantidad de material necesario, primero debemos determinar el radio que tendrá el silo. Para que el silo tengo 16π metros cúbicos de volumen, es necesario que

$$16 = \pi x^2(4),$$

con lo cual, obtenemos que $x = 2$. Esto significa que para un volumen de 16π m^3 es suficiente un radio de 2 m. Ahora, evaluamos la función de la cantidad de material en este valor:

$$C(2) = 2\pi(2^2) + 8\pi(2) = 24\pi.$$

Por lo tanto, la cantidad de metal necesario para construir un silo con capacidad de 16π metros cúbicos es de 24π m. □

EJERCICIO 3. Suponga que se invierten \$1000 al 6 % compuesto anualmente.

a) Construya un modelo que represente el monto que se obtiene en función de la cantidad de años.

b) Construya un modelo que represente el interés que se obtiene en función de la cantidad de años.

c) Utilice los modelos para determinar el monto y interés luego de 1, 5, 10 y 20 años.

Solución.

a) Para el modelamiento, consideremos lo siguiente:

Variables:

- t: el tiempo medido en años.
- $M(t)$: monto que se obtiene en función del tiempo en dólares.

Planteamiento: Utilizando el modelo del interés compuesto, tenemos que

$$\begin{aligned} M\colon [0,+\infty[&\longrightarrow [0,+\infty[\\ t &\longmapsto 1000(1+0{,}06)^t = 1000 \cdot 1{,}06^t. \end{aligned}$$

b) Para el modelamiento, consideremos lo siguiente:

Variables:

- t: el tiempo medido en años.
- $I(t)$: interés que se obtiene en función del tiempo en dólares.

Planteamiento: Utilizando el modelo del interés compuesto, tenemos que

$$\begin{aligned} I\colon [0,+\infty[&\longrightarrow [0,+\infty[\\ t &\longmapsto M(t) - 1000 = 1000 \cdot 1{,}06^t - 1000. \end{aligned}$$

c) Evaluemos en $t = 1$, $t = 5$, $t = 10$ y $t = 20$:

$$\begin{aligned} M(1) &= 1000 \cdot 1{,}06^1 = 1060 & I(1) &= 1000 \cdot 1{,}06^1 - 1000 = 60 \\ M(5) &= 1000 \cdot 1{,}06^5 \approx 1338{,}22 & I(5) &= 1000 \cdot 1{,}06^5 - 1000 \approx 338{,}22 \\ M(10) &= 1000 \cdot 1{,}06^{10} \approx 1790{,}84 & I(10) &= 1000 \cdot 1{,}06^{10} - 1000 \approx 790{,}84 \\ M(20) &= 1000 \cdot 1{,}06^{20} \approx 3207{,}14 & I(20) &= 1000 \cdot 1{,}06^{20} - 1000 \approx 2207{,}14 \end{aligned}$$ □

EJERCICIO 4. Suponga que un pueblo de 10 000 habitantes crece a una tasa del 2 % por año.

a) Construya un modelo que represente el número de habitantes en función de la cantidad de años.

b) Utilice el modelo para determinar el número de habitantes luego de 1, 5, 10 y 20 años.

Solución.

a) Para el modelamiento, consideremos lo siguiente:

Variables:

- t: el tiempo medido en años.
- $N(t)$: número de habitantes en función del tiempo.

Planteamiento: Utilizando el modelo de crecimiento poblacional, tenemos que

$$\begin{aligned} N\colon [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto 10000\cdot(1+0{,}02)^t = 10000\cdot 1{,}02^t. \end{aligned}$$

b) Evaluemos la función en $t=1$, $t=5$, $t=10$, $t=20$:

$$\begin{aligned} N(1) &= 10000\cdot 1{,}02^1 = 10200 \\ N(5) &= 10000\cdot 1{,}02^5 \approx 11041{,}8 \\ N(10) &= 10000\cdot 1{,}02^{10} \approx 12189{,}9 \\ N(20) &= 10000\cdot 1{,}02^{20} \approx 14859{,}5 \end{aligned}$$

Se tendrán 10 200, 11 042, 12 190, 14 860, habitantes, aproximadamente, en 1, 5, 10 y 20 años, respectivamente. □

EJERCICIO 5. En cierto cultivo crecen bacterias y su número se incrementa a razón de 5 % cada hora. Al inicio existían 400 bacterias.

a) Determine un modelo que proporcione el número de bacterias presentes en función del tiempo.

b) ¿Cuántas habrá al cabo de 1 hora?

c) ¿Cuántas habrá al cabo de 4 hora?

EJERCICIO 6. Suponga que se invierte \$100 al 5 % anual.

a) ¿Cuál es el monto que se obtiene luego de un año si la capitalización es anual?

b) ¿Cuál es el monto que se obtiene luego de un año si la capitalización es semestral?

c) ¿Cuál es el monto que se obtiene luego de un año si la capitalización es trimestral?

d) ¿Cuál es el monto que se obtiene luego de un año si la capitalización es mensual?

EJERCICIO 7. Suponga que se invierte \$1 al 100 % anual.

a) Construya un modelo que represente el monto que se obtiene en un año en función del número de capitalizaciones.

b) ¿Cuánto se obtiene si se realizan 365 capitalizaciones (capitalizaciones diarias)?

c) ¿Cuánto se obtiene si se realizan 8760 capitalizaciones (capitalizaciones cada hora)?

d) ¿Cuánto se obtiene si se realizan 525 600 capitalizaciones (capitalizaciones cada minuto)?

EJERCICIO 8. Suponga que se invierten \$1000 al 10 % compuesto anualmente.

a) Construya un modelo que represente el monto que se obtiene en función de la cantidad de años.

b) ¿Luego de cuántos años se tendrá \$1500?

c) ¿Luego de cuántos años el capital se duplicará?

d) Si la inversión inicial es de \$10 000, ¿luego de cuántos años el capital se duplicará?

EJERCICIO 9. Resolver los ejercicio 59, 63 de la sección de problemas 4.2 del libro "Matemática para Administración y Economía" de Haeussler (12va. edición).
`http://bit.ly/2uAqh1n`

Escuela de Ciencias Físicas y Matemática

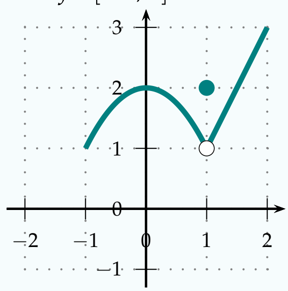
Matemática Aplicada • Ejercicios no. 09

Semestre 2020-2 | Mat. Andrés Merino

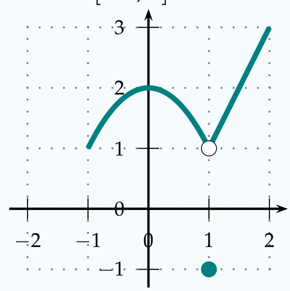
1. Límites

Ejercicio 1. Determine el limite de cada una de las funciones cuando x tiende a 1.

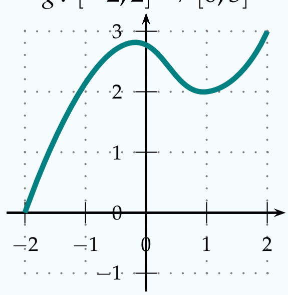
$f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$



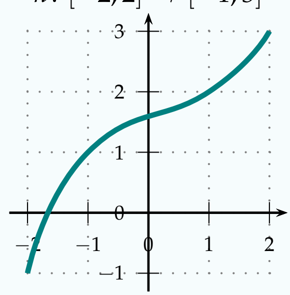
$r\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$



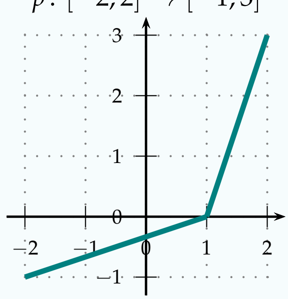
$g\colon [-2,2] \to [0,3]$



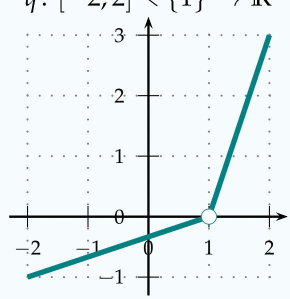
$h\colon [-2,2] \to [-1,3]$



$p\colon [-2,2] \to [-1,3]$



$q\colon [-2,2] \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$



Solución.

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$; $\quad \lim\limits_{x\to 1} r(x) = 1$.

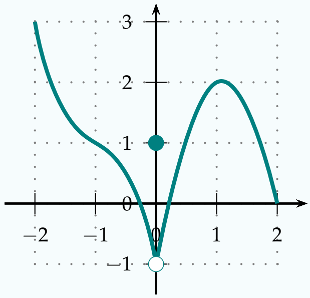
b) $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2$; $\quad \lim\limits_{x\to 1} h(x) = 2$.

c) $\lim\limits_{x\to 1} p(x) = 0$; $\quad \lim\limits_{x\to 1} q(x) = 0$.

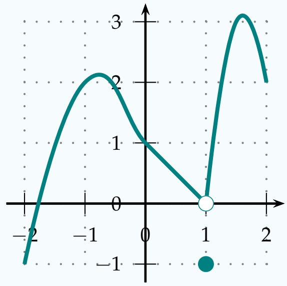
□

EJERCICIO 2. Utilice la información de las las gráficas de las funciones f y g para estimar los límites solicitados

$f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$



$g\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$



a) $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+g(x))$.

b) $\lim\limits_{x\to -1}(f(x)\cdot g(x))$.

c) $\lim\limits_{x\to 1}(2f(x)+3g(x))$.

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$.

e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Solución.

a) Para $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+g(x))$:

$$\lim_{x\to 1}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x) = 2+0 = 2.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+g(x)) = 2$.

b) Para $\lim\limits_{x\to -1}(f(x)\cdot g(x))$:

$$\lim_{x\to -1}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to -1} f(x)\cdot \lim_{x\to -1} g(x) = 1\cdot 2 = 2.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to -1}(f(x)\cdot g(x)) = 2$.

c) Para $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$, primero calculemos

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq 0.$$

Como es diferente de 0, tenemos que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}(f(x))} = \frac{1}{1} = 1.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = 1.$

d) Para $\lim\limits_{x\to 1}(2f(x) + 3g(x))$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}(2f(x) + 3g(x)) &= \lim_{x\to 1}(2f(x)) + \lim_{x\to 1}(3g(x)) \\
&= 2\lim_{x\to 1}(f(x)) + 3\lim_{x\to 1}(g(x)) \\
&= 2(2) + 3(0) \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Por lo que, $\lim\limits_{x\to 1}(2f(x) + 3g(x)) = 4.$

e) Para $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, primero calculemos

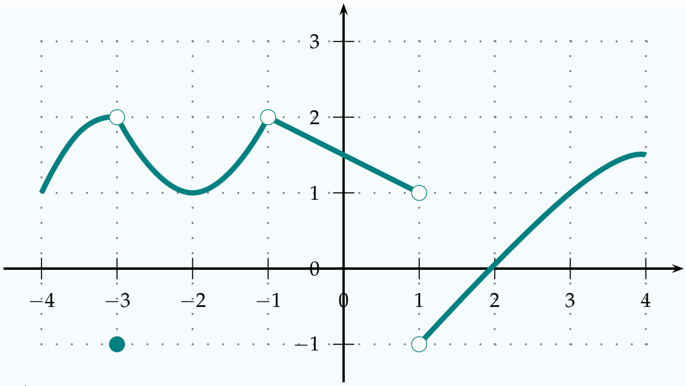
$$\lim_{x\to 0} g(x) = 2 \neq 0.$$

Como es diferente de 0, tenemos que

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to -1} f(x)}{\lim\limits_{x\to -1} g(x)} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{2}.$ $\square$

EJERCICIO 3. Considere la gráfica de la función $f\colon [-4,4] \setminus \{-1,1\} \to \mathbb{R}$, dada a continuación.



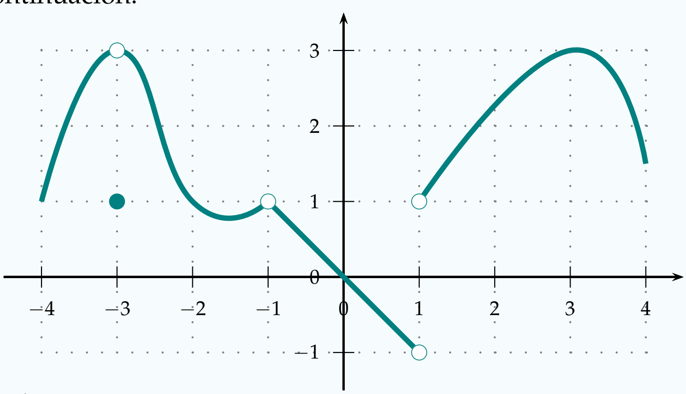
Determine:

a) $\lim_{x\to -3} f(x)$
b) $f(-3)$
c) $\lim_{x\to -1} f(x)$
d) $f(-1)$
e) $\lim_{x\to 1} f(x)$
f) $f(1)$
g) $\lim_{x\to 3} f(x)$
h) $f(3)$

Solución. Tenemos que:

a) $\lim_{x\to -3} f(x) = 2$.
b) $f(-3) = -1$.
c) $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$.
d) $f(-1)$ no existe.
e) $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe.
f) $f(1)$ no existe.
g) $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$.
h) $f(3) = 1$. □

Ejercicio 4. Considere la gráfica de la función $f\colon [-4,4] \smallsetminus \{-1,1\} \to \mathbb{R}$, dada a continuación.



Determine:

a) $\lim_{x\to -3} f(x)$
b) $f(-3)$
c) $\lim_{x\to -1} f(x)$
d) $f(-1)$
e) $\lim_{x\to 1} f(x)$
f) $f(1)$
g) $\lim_{x\to 3} f(x)$
h) $f(3)$

Demostración. Tenemos que:

a) $\lim_{x\to -3} f(x) = 3$.

b) $f(-3) = 1$.

c) $\lim_{x\to -1} f(x) = 1$.

d) $f(-1)$ no existe.

e) $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe.

f) $f(1)$ no existe.

g) $\lim_{x\to 3} f(x) = 3$.

h) $f(3) = 3$. □

EJERCICIO 5. Determine los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{5x+1}{x^2-6}$

b) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^4-1}{x+1}$

Solución.

a) Primero, determinemos $\lim_{x\to 3} x^2-6$, tenemos que

$$\lim_{x\to 3}(x^2-6) = (3)^2-6 = 3,$$

como este límite es diferente de 0, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{5x+1}{x^2-6} &= \frac{\lim_{x\to 3}(5x+1)}{\lim_{x\to 3} x^2-6}\\ &= \frac{5(3)+1}{3}\\ &= \frac{16}{3}.\end{aligned}$$

b) Primero, determinemos $\lim_{x\to -1} x+1$, tenemos que

$$\lim_{x\to -1}(x+1) = -1+1 = 0,$$

como este límite no es igual a 0, no podemos aplicar ninguna propiedad directamente. Procedamos a realizar una manipulación algebraica, notemos que para todo $x \neq -1$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{x^4-1}{x+1} &= \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x+1}\\ &= \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x+1}\\ &= (x-1)(x^2+1)\end{aligned}$$

$$= x^3 - x^2 + x - 1.$$

Calculemos el límite de esta nueva función:

$$\lim_{x\to -1} (x^3 - x^2 + x - 1) = -4,$$

por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1} \frac{x^4-1}{x+1} &= \lim_{x\to -1} (x^3 - x^2 + x - 1) \\ &= -4. \end{aligned}$$ □

EJERCICIO 6. Determine los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x-3}{x^3+4}$

b) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

c) $\lim_{h\to 2} \frac{2}{h+3}$

d) $\lim_{h\to 0} \frac{2h^2+xh}{h}$

e) $\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-4}{h}$

Solución.

a) Primero, determinemos $\lim_{x\to 1} (x^3+4)$, tenemos que

$$\lim_{x\to 1} (x^3+4) = (1)^3 + 4 = 5,$$

como este límite es diferente de 0, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x-3}{x^3+4} &= \frac{\lim_{x\to 1} (2x^2+x-3)}{\lim_{x\to 1} (x^3+4)} \\ &= \frac{2(1)^2+(1)-3}{5} \\ &= \frac{0}{5} = 0. \end{aligned}$$

b) Primero, determinemos $\lim_{x\to -1} (x+1)$, tenemos que

$$\lim_{x\to -1} (x+1) = -1 + 1 = 0,$$

como este límite es igual a 0, no podemos aplicar ninguna propiedad directamente. Procedamos a realizar una manipulación algebraica, notemos que para todo $x \neq -1$, tenemos que

$$\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} &= \lim_{x\to -1}(x-1)\\ &= (-1)-1 = -2.\end{aligned}$$

c) Primero, determinemos $\lim\limits_{h\to 2}(h+3)$, tenemos que

$$\lim_{h\to 2}(h+3) = (2)+3 = 5,$$

como este límite es diferente de 0, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 2}\frac{2}{h+3} &= \frac{2}{\lim\limits_{h\to 2}(h+3)}\\ &= \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

d) Como el límite del denominador es 0, realicemos una manipulación algebraica, tenemos que, para $h \neq 0$,

$$\frac{2h^2+xh}{h} = \frac{(2h+x)h}{h} = 2h+x,$$

por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{2h^2+xh}{h} = \lim_{h\to 0}(2h+x) = 2(0)+x = x.$$

e) Como el límite del denominador es 0, realicemos una manipulación algebraica, tenemos que, para $h \neq 0$,

$$\frac{(2+h)^2-4}{h} = \frac{4h+h^2}{h} = \frac{(4+h)h}{h} = 4+h,$$

por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4+(0) = 4. \qquad \square$$

EJERCICIO 7. Resolver los ejercicio 11, 27 y 34 de la sección de problemas 10.1 del libro "Matemática para Administración y Economía" de Haeussler (12va. edición).
`https://bit.ly/2WPXNL5`

EJERCICIO 8. Determine

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h},$$

tomando f como la función definida, para $x \in \mathbb{R}$, por

a) $f(x) = x^2 + x + 1$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Solución.

a) Como el límite del denominador es 0, realicemos una manipulación algebraica, tenemos que, para $h \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{(1+h)^2+(1+h)+1-((1)^2+(1)+1)}{h} \\ &= \frac{h^2+3h}{h} \\ &= \frac{(h+3)h}{h} \\ &= h+3,\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+3) = (0)+3 = 3.$$

b) Como el límite del denominador es 0, realicemos una manipulación algebraica, tenemos que, para $h \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{\dfrac{(1+h)}{(1+h)^2+1} - \dfrac{(1)}{(1)^2+1}}{h} \\ &= \frac{\dfrac{1+h}{2+2h+h^2} - \dfrac{1}{2}}{h}\end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{2(1+h)-1(2+2h+h^2)}{2(2+2h+h^2)}}{h}$$

$$= \frac{\frac{-h^2}{2(2+2h+h^2)}}{h}$$

$$= \frac{-h^2}{2(2+2h+h^2)h}$$

$$= \frac{-h}{2(2+2h+h^2)},$$

por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{2(2+2h+h^2)}.$$

Para calcular este límite, primero calculemos el límite del denominador:

$$\lim_{h\to 0}((2+2h+h^2)) = 2(2+2(0)+(0)^2) = 4,$$

como es diferente de 0, tenemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{2(2+2h+h^2)} = \frac{\lim\limits_{h\to 0}(-h)}{\lim\limits_{h\to 0}((2+2h+h^2))} = \frac{0}{4} = 0.$$

□

EJERCICIO 9. Determine

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

para $x \in \mathbb{R}$, tomando f como la función definida, para $x \in \mathbb{R}$, por

a) $f(x) = x^2 + x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Solución.

a) Como el límite del denominador es 0, realicemos una manipulación algebraica, tenemos que, para $h \neq 0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2+(x+h)+1-(x^2+x+1)}{h}$$

$$= \frac{h^2+2xh+h}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(h+2x+1)h}{h} \\
&= h+2x+1,
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2x+1) = (0)+2x+1 = 2x+1.$$

b) Como el límite del denominador es 0, realicemos una manipulación algebraica, tenemos que, para $h \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\dfrac{(x+h)}{(x+h)^2+1} - \dfrac{x}{x^2+1}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{(x+h)(x^2+1) - x((x+h)^2+1)}{((x+h)^2+1)(x^2+1)}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{h-h^2x-hx^2}{((x+h)^2+1)(x^2+1)}}{h} \\
&= \frac{(1-hx-x^2)h}{((x+h)^2+1)(x^2+1)h} \\
&= \frac{1-hx-x^2}{((x+h)^2+1)(x^2+1)},
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-hx-x^2}{((x+h)^2+1)(x^2+1)}.$$

Para calcular este límite, primero calculemos el límite del denominador:

$$\lim_{h\to 0}((x+h)^2+1)(x^2+1) = ((x+0)^2+1)(x^2+1) = (x^2+1)^2,$$

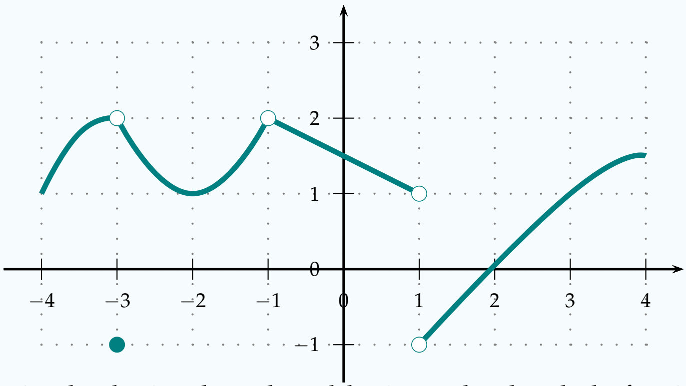
como es diferente de 0, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1-hx-x^2}{((x+h)^2+1)(x^2+1)} \\
&= \frac{\lim\limits_{h\to 0}(1-hx-x^2)}{\lim\limits_{h\to 0}((x+h)^2+1)(x^2+1)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}. \qquad \square$$

2. Límites laterales

Ejercicio 10. Considere la gráfica de la función $f\colon [-4, 4] \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, dada a continuación.



Determine los límites laterales, el límite y el valor de la función en los puntos

a) $x = -3$

b) $x = -2$

c) $x = -1$

d) $x = 1$

e) $x = 2$

f) $x = 3$

Solución. Tenemos que:

a) $\lim_{x \to -3^+} f(x) = 2$; $\lim_{x \to -3^-} f(x) = 2$; $\lim_{x \to -3} f(x) = 2$; $f(-3) = -1$.

b) $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 1$; $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \to -2} f(x) = 1$; $f(-2) = 1$.

c) $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 2$; $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 2$; $\lim_{x \to -1} f(x) = 2$; $f(-1)$ no existe.

d) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -1$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe; $f(1)$ no existe.

e) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 0$; $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$; $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$; $f(2) = 0$.

f) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 1$; $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \to 3} f(x) = 1$; $f(3) = 1$. $\square$

EJERCICIO 11. Dada la función

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x < -1, \\ 2x^2 - 1 & \text{si } -1 \leq x < 1, \\ 10 - 9x^2 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 4 & \text{si } x = 2, \\ x^2 + 3x - 2 & \text{si } 2 < x. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Determinar

a) $f(-2)$

b) $f(0)$

c) $f(1)$

d) $f(2)$

e) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

h) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

Solución.

a) $f(-2) = -2.$

b) $f(0) = 2(0)^2 - 1 = -1.$

c) $f(1) = 10 - 9(1)^2 = 1.$

d) $f(2) = 4.$

e) Dado que en $x = -1$ la definición de la función tiene un corte, para calcular $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ debemos calcular primero los límites laterales:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1} x = -1,$$

por otro lado,

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1} (2x^2 - 1) = 2(-1)^2 - 1 = 1.$$

Como los límites laterales son diferentes, concluimos que $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ no existe.

f) Dado que en $x = 1$ la definición de la función tiene un corte, para calcular $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ debemos calcular primero los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x^2 - 1) = 2(1)^2 - 1 = 1,$$

por otro lado,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(10 - 9x^2) = 10 - 9(1)^2 = 1.$$

Como los límites laterales son iguales, concluimos que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

g) Dado que en $x = 2$ la definición de la función tiene un corte, para calcular $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ debemos calcular primero los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(10 - 9x^2) = 10 - 9(2)^2 = -26,$$

por otro lado,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(x^2 + 3x - 2) = (2)^2 + 3(2) - 2 = 8.$$

Como los límites laterales son diferentes, concluimos que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe.

h) Tenemos que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(x^2 + 3x - 2) = (3)^2 + 3(3) - 2 = 13. \qquad \square$$

EJERCICIO 12. Sea $a \in \mathbb{R}$. Dada la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} ax^2 + 3x - 2 & \text{si } x < 2, \\ 2 - x^2 & \text{si } 2 \geq x, \end{cases} \end{aligned}$$

¿cuál debe ser el valor de a para que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ exista?

Solución. Calculemos, primero, los límites laterales en $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(ax^2 + 3x - 2) = a(2)^2 + 3(2) - 2 = 4a + 4,$$

por otro lado,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(2 - x^2) = 2 - (2)^2 = -2.$$

Para que el límite exista, estos límites deben ser iguales, por lo tanto, es necesario que

$$4a + 4 = -2,$$

de donde, $a = -3/2$. Así, el valor de a para que $\lim_{x\to 2} f(x)$ existа debe ser $-3/2$. □

3. Continuidad

Ejercicio 13. Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Dada la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} ax^2 + 3x - 2 & \text{si } x < -2, \\ 3 & \text{si } x = -2 \\ b - x^2 & \text{si } -2 < x, \end{cases} \end{aligned}$$

¿cuáles deben ser los valores de a y b la función es continua en -2?

Solución. Para que la función se continua en $x = -2$, primero necesitamos que el límite exista, para esto, calculemos los límites laterales:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2}(ax^2 + 3x - 2) = a(-2)^2 + 3(-2) - 2 = 4a - 8,$$

por otro lado,

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2}(b - x^2) = b - (2)^2 = b - 4.$$

Para que el límite exista, estos límites deben ser iguales, por lo tanto, es necesario que

$$4a - 8 = b - 4,$$

con esto, tenemos que

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 4a - 8 = b - 4.$$

Ahora, para que la función sea continua, el límite debe coincidir con el valor de la función en $x = -2$, notemos que

$$f(-2) = 3,$$

por lo tanto, para cumplir que $\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$, es necesario que

$$4a - 8 = b - 4 = 3,$$

con esto, debemos resolver las ecuaciones

$$4a - 8 = 3 \quad \text{y} \quad b - 4 = 3,$$

de donde, obtenemos que $a = 11/4$ y $b = 7$. Así, los valores de a y b la función sea continua en -2 deben ser $11/4$ y 7, respectivamente. □

EJERCICIO 14. Resolver los ejercicio 11 y 12 de la sección de problemas 10.3 del libro "Matemática para Administración y Economía" de Haeussler (12va. edición). `https://bit.ly/2WPXNL5`

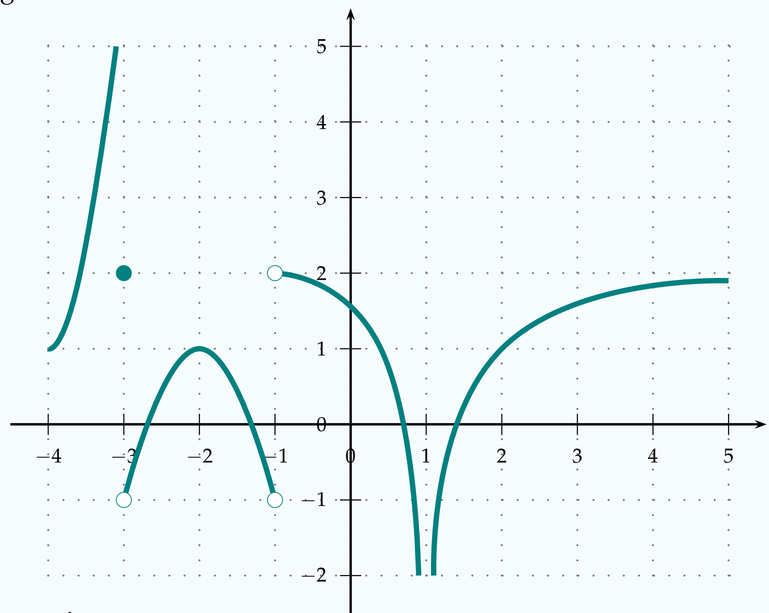
Escuela de Ciencias Físicas y Matemática

Matemática Aplicada • Ejercicios no. 10

Semestre 2020-2 | Mat. Andrés Merino

1. Límites al infinito e infinitos

Ejercicio 1. Considere la gráfica de la función $f\colon\ [-4,+\infty[\ \setminus \{-1,1\} \to \mathbb{R}$, cuya gráfica se muestra a continuación:



Determine:

a) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

d) $f(-3)$

e) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

h) $f(-2)$

i) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

j) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

k) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

l) $f(-1)$

m) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

n) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

ñ) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

o) $f(1)$

p) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

q) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

r) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

s) $f(2)$

Además:

t) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

u) ¿f es continua en -3?

v) ¿f es continua en -2?

w) ¿f es continua en -1?

x) ¿f es continua en 1?

y) ¿f es continua en 2?

Solución. Tenemos que:

a) $\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x\to -3^+} f(x) = -1$

c) $\lim_{x\to -3} f(x)$ no existe

d) $f(-3) = 2$

e) $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 1$

f) $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 1$

g) $\lim_{x\to -2} f(x) = 1$

h) $f(-2) = 1$

i) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -1$

j) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 2$

k) $\lim_{x\to -1} f(x)$ no existe

l) $f(-1)$ no existe

m) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

n) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

ñ) $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$

o) $f(1)$ no existe

p) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$

q) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$

r) $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$

s) $f(2) = 1$

Además:

t) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$

u) f no es continua en -3 dado que el límite no existe.

v) f es continua en -2 dado que el límite coincide con el valor de la función.

w) f no es continua en -1 dado que el límite no existe, además, la función no está definida en ese punto.

x) f no es continua en 1 dado que el límite no existe, además, la función no está definida en ese punto.

y) f es continua en 2 dado que el límite coincide con el valor de la función. □

EJERCICIO 2. Dibuje una función $f\colon\ ]-\infty, 5] \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, que cumpla que

a) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -2$

b) $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 1$

c) $f(-3) = -2$

d) $\lim_{x\to -3} f(x)$ no exista

e) $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$

f) $\lim_{x\to 1} f(x) = -2$

g) $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -2$

h) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 2$

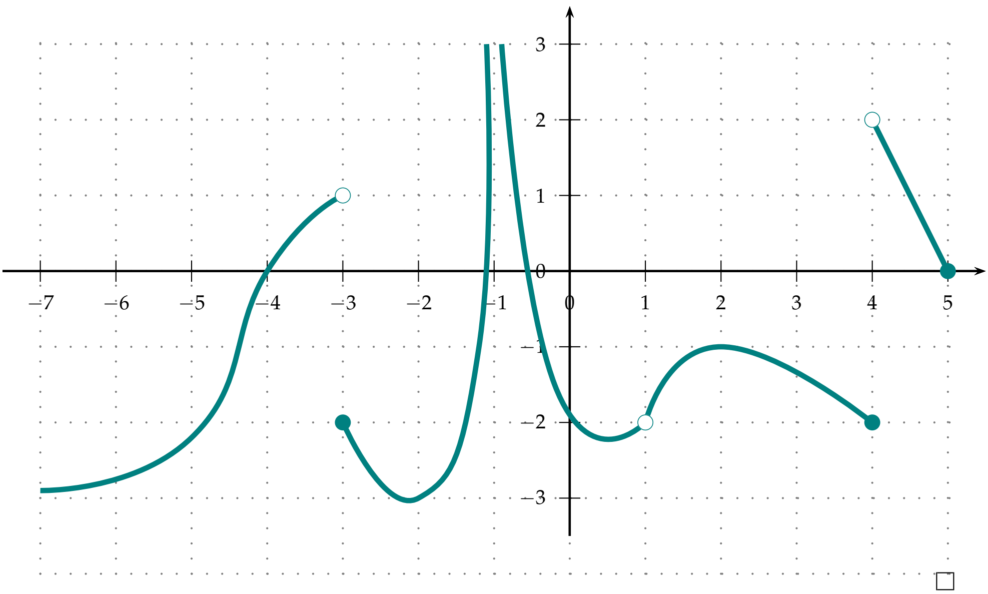
i) $f(5) = 0$

j) f' sea positiva en $]1, 2[$

k) f' sea negativa en $]-3, -2[$

l) $f'(2) = 0$

Solución. Una posible gráfica puede ser



□

EJERCICIO 3. Determine los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-3}{x^2-x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2-3x+1}{x^2-x}$

Solución. *a)* Primero, determinemos el límite del denominador, tenemos que

$$\lim_{x\to 1}(x^2-x-2) = (1)^2-(1)-2 = -2,$$

como este límite es diferente de 0, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2} &= \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x-2)}\\ &= \frac{(1)^2-3(1)+2}{-2}\\ &= \frac{0}{-2} = 0.\end{aligned}$$

b) Primero, determinemos el límite del denominador, tenemos que

$$\lim_{x\to 2}(x^2-x-2) = (2)^2-(2)-2 = 0,$$

como este límite es igual a 0, no podemos aplicar ninguna propiedad directamente. Para continuar con el análisis, calculemos el límite del numerador:

$$\lim_{x\to 2}(x^2-3x+2)=(2)^2-3(2)+2=0,$$

como el límite del numerador también es 0, procedamos a realizar una manipulación algebraica, notemos que para todo $x\neq 2$, tenemos que

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}=\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+1)}=\frac{x-1}{x+1}.$$

Con esto, tenemos que

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+1}.$$

Como tenemos nuevamente una fracción, calculamos el límite del denominador:

$$\lim_{x\to 2}(x+1)=3,$$

como este límite es diferente de 0, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}&=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+1}\\&=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+1)}\\&=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

c) Primero, determinemos el límite del denominador, tenemos que

$$\lim_{x\to 2^+}(x^2-x-2)=(2)^2-(2)-2=0,$$

como este límite es igual a 0, no podemos aplicar ninguna propiedad directamente. Para continuar con el análisis, calculemos el límite del denominador:

$$\lim_{x\to 2^+}(x-3)=(2)-3=-1.$$

Como el límite del numerador existe y es diferente de 0 y el del numerador es igual a 0, el límite podría ser infinito, para ver esto, analicemos los signos:

- Numerador: $\lim\limits_{x\to 2}(x-3)=(2)-3=-1$, negativo.

- Denominador: $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, cuando x se aproxima a 2, $x + 1$ se acerca a 3, positivo, por otro lado, dado que x se acerca por derecha, tenemos que $x > 2$, de donde, $x - 2 > 0$, por lo tanto es positivo, así, $x^2 - x - 2$ es positivo.

Con esto, tenemos que

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x^2-x-2} = -\infty.$$

d) Tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-3x+1}{x^2-x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}(3x^2-3x+1)}{\frac{1}{x^2}(x^2-x)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} \\
&= \frac{3-0+0}{1-0} = 3.
\end{aligned}$$

□

1. Concepto de derivada

Ejercicio 1. Considere la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 - 2, \end{aligned}$$

determinar, utilizando la definición, $f'(1)$.

Solución. Del ejercicio 1 tenemos que la razón de cambio promedio de la función es

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2 + h,$$

por lo tanto,

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} (2+h) = 2. \qquad \square$$

Ejercicio 2. Dada la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 - 3x, \end{aligned}$$

determine, utilizando la definición, $f'(2)$ y $f'(-1)$.

Solución. Tenemos que la razón de cambio promedio de la función en 2 es

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^2 - 3(2+h) - ((2)^2 - 3(2))}{h} \\ &= \frac{h + h^2}{h} \\ &= (1+h), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} (1+h) = 1.$$

Por otro lado, tenemos que la razón de cambio promedio de la función en -1 es

$$\begin{aligned}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} &= \frac{(-1+h)^2-3(-1+h)-((-1)^2-3(-1))}{h}\\ &= \frac{-5h+h^2}{h}\\ &= (-5+h),\end{aligned}$$

por lo tanto

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}(-5+h) = -5. \qquad \square$$

EJERCICIO 3. Considere la función

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto x^2-2,\end{aligned}$$

determinar, utilizando la definición, $f'(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

Solución. Del ejercicio 1 tenemos que la razón de cambio promedio de la función en $x \in \mathbb{R}$ es

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x+h$$

por lo tanto,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x. \qquad \square$$

EJERCICIO 4. Dada la función

$$\begin{aligned} g:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto x^2-3x,\end{aligned}$$

determine, utilizando la definición, $g'(x)$, para $x \in \mathbb{R}$.

Solución. Tenemos que la razón de cambio promedio de la función es

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= \frac{(x+h)^2-3(x+h)-((x)^2-3(x))}{h}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2hx + h^2 - 3h}{h} \\
&= 2x + h - 3,
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h - 3) = 2x - 3. \qquad \square
$$

EJERCICIO 5. Dada la función

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \frac{1}{x},
\end{aligned}
$$

determine, utilizando la definición, $f'(x)$, para $x \in \mathbb{R}^*$.

Solución. Tenemos que la razón de cambio promedio de la función es

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{-h}{(x+h)x}}{h} \\
&= \frac{-1}{(x+h)x},
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}. \qquad \square
$$

EJERCICIO 6. Dada la función

$$
\begin{aligned}
p : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \frac{1}{x^2+1},
\end{aligned}
$$

determine, utilizando la definición, $p'(x)$, para $x \in \mathbb{R}^*$.

Solución. Tenemos que la razón de cambio promedio de la función es

$$\begin{aligned}
\frac{p(x+h)-p(x)}{h} &= \frac{\dfrac{1}{(x+h)^2+1} - \dfrac{1}{x^2+1}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{-h^2-2xh}{((x+h)^2+1)(x^2+1)}}{h} \\
&= \frac{-h-2x}{((x+h)^2+1)(x^2+1)},
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$p'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h)-p(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h-2x}{((x+h)^2+1)(x^2+1)} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}. \qquad \square$$

1. Propiedades de la derivada

EJERCICIO 1. Determinar

a) $(5)'$

b) $(x^3)'$

c) $(x)'$

d) $(x^{-3})'$

e) $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'$

f) $\left(x^{1/3}\right)'$

g) $(\sqrt{x})'$

Solución.

a) $(5)' = 0$

b) $(x^3)' = 2x^2$

c) $(x)' = (x^1)' = 1x^0 = 1$

d) $(x^{-3})' = -3x^{-4}$

e) $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3}$

f) $\left(x^{1/3}\right)' = \dfrac{1}{3}x^{-2/3}$

g) $(\sqrt{x})' = \left(x^{1/2}\right)' = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ □

EJERCICIO 2. Determinar

a) $(x^2 + x)'$

b) $(x^2\sqrt{x})'$

c) $\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)'$

d) $(5x^{-3})'$

e) $(x^3 - 2x - 3)'$

f) $\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)'$

Solución.

a) $\left(x^2+x\right)' = 2x+1$

b) $\left(x^2\sqrt{x}\right)' = (x^2)'\sqrt{x} + x^2(\sqrt{x})' = 2x\sqrt{x} + x^2\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)' = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

d) $\left(5x^{-3}\right)' = 5\left(x^{-3}\right)' = 5(-3x^{-4}) = -15x^{-4}$

e) $\left(x^3-2x-3\right)' = 3x^2-2x$

f) $\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)' = \dfrac{(x)'(x^2+1)-(x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(x^2+1)-(x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

□

EJERCICIO 3. Determinar

a) $\left(3x^3-5x^2+2x-3\right)'$

b) $\left((x^3+7x-3)(x^2-4x+1)\right)'$

c) $\left(\dfrac{1}{x^3+x^2}\right)'$

d) $\left(\dfrac{5}{x^4+3}\right)'$

e) $\left(x^3-2x^{-3}+\dfrac{4}{x^2}\right)'$

f) $\left(\dfrac{x^2-3}{x^3-2x}\right)'$

Solución.

a) $\left(3x^3-5x^2+2x-3\right)' = 9x^2-10x+2$

b) $\left((x^3+7x-3)(x^2-4x+1)\right)' = (3x^2+7)(x^2-4x+1)+(x^3+7x-3)(2x-4)$

c) $\left(\dfrac{1}{x^3+x^2}\right)' = \dfrac{-2x-3x^2}{(x^3+x^2)^2}$

d) $\left(\dfrac{5}{x^4+3}\right)' = -\dfrac{5}{(x^4+3)^2}$

e) $\left(x^3-2x^{-3}+\dfrac{4}{x^2}\right)' = 3x+6x^{-4}-8x^{-3}$

f) $\left(\dfrac{x^2-3}{x^3-2x}\right)' = \dfrac{-x^4+7x^2-6}{(x^3-2x)^2}$

□

Ejercicio 4. Resolver los ejercicio del 1 al 46 de la sección de problemas 11.4 del libro "Matemática para Administración y Economía" de Haeussler (12va. edición).
`http://bit.ly/2uAqh1n`

2. Regla de la cadena

Ejercicio 5. Determinar

a) $\left((x^3+2x-1)^2\right)'$

b) $\left(\sqrt{x^2+1}\right)'$

c) $\left(\dfrac{1}{(x^2+3)^3}\right)'$

d) $\left(x\sqrt{x^4+1}\right)'$

Solución.

a)
$$\begin{aligned}\left((x^3+2x-1)^2\right)' &= 2(x^3+2x-1)(x^3+2x-1)' \\ &= 2(x^3+2x-1)(3x^2+2)\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x^2+1}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x)\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{(x^2+3)^3}\right)' &= \left((x^2+3)^{-3}\right)' \\ &= -3(x^2+3)^{-4}(2x)\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}\left(x\sqrt{x^4+1}\right)' &= (x)'\sqrt{x^4+1}+x(\sqrt{x^4+1})' \\ &= \sqrt{x^4+1}+x\frac{1}{2\sqrt{x^4+1}}(x^4+1)' \\ &= \sqrt{x^4+1}+x\frac{1}{2\sqrt{x^4+1}}(4x^3) \\ &= \sqrt{x^4+1}+\frac{2x^4}{\sqrt{x^4+1}}\end{aligned}$$

□

EJERCICIO 6. Determinar

a) $\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^3\right)'$

b) $\left((1-\sqrt{x})^{-1}\right)'$

c) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'$

d) $\left(\sqrt{3x^2+1}-x^2(x^2-3x+1)\right)'$

Solución.

a)
$$\begin{aligned}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^3\right)' &= 3\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\left(1+\frac{1}{x}\right)' \\ &= 3\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\left((1-\sqrt{x})^{-1}\right)' &= -(1-\sqrt{x})^{-2}(1-\sqrt{x})' \\ &= -(1-\sqrt{x})^{-2}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' &= \frac{(x)'\sqrt{x^2+1}-x(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}-x\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)'}{x^2+1} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}(2x)}{x^2+1}\end{aligned}$$

d)
$$\left(\sqrt{3x^2+1}-x^2(x^2-3x+1)\right)' = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}-x^2(2x-3)-2x(x^2-3x+1)$$

□

EJERCICIO 7. Determinar

a) $\left(\operatorname{sen}\left(x^2+3x+1\right)\right)'$

b) $\left(\cos\left((x+1)(x^3+1)\right)\right)'$

c) $\left(\ln\left(x^2+3x+1\right)\right)'$

d) $\left(\exp\left(x^2+3x+1\right)\right)'$

e) $\left(e^{x^2+3x}\right)'$

f) $(\cos(\operatorname{sen}(x)))'$

g) $(\cos(\ln(x)))'$

h) $(\cos(\ln(x^2+1)))'$

i) $\left(\exp\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)'$

EJERCICIO 8. Resolver los ejercicio del 1 al 52 de la sección de problemas 11.5 del libro "Matemática para Administración y Economía" de Haeussler (12va. edición).
`http://bit.ly/2uAqh1n`

3. Derivada de orden superior

Ejercicio 9. Determinar

a) $\left(3x^3 - 5x^2 + 2x - 3\right)''$

b) $\left(5r^3 - 3r^5\right)''$

c) $\left(\dfrac{2t+5}{3t-2}\right)''$

d) $\left(\cos(x^2+1)\right)''$

e) $\left(\exp(x^2+1)\right)''$

f) $\left(x^3 - 2x^2 + 2x^{-2} - 3\right)'''$

Solución.

a) $\left(3x^3 - 5x^2 + 2x - 3\right)'' = (9x^2 - 10x + 2)' = 18x - 10$

b) $\left(5r^3 - 3r^5\right)'' = (15r^2 - 15r^4)' = 30r - 60r^5$

c) $\left(\dfrac{2t+5}{3t-2}\right)'' = \left(\dfrac{-19}{(3t-2)^2}\right)' = \left(\dfrac{-19}{9t^2-12t+4}\right)' = \dfrac{-19(18t-12)}{(9t^2-12t+4)^2}$ □

1. DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR

EJERCICIO 1. Determinar

a) $\left(3x^3 - 5x^2 + 2x - 3\right)''$

b) $\left(5r^3 - 3r^5\right)''$

c) $\left(\dfrac{2t+5}{3t-2}\right)''$

d) $\left(\cos(x^2+1)\right)''$

e) $\left(\exp(x^2+1)\right)''$

f) $\left(x^3 - 2x^2 + 2x^{-2} - 3\right)'''$

Solución.

a) $\left(3x^3 - 5x^2 + 2x - 3\right)'' = (9x^2 - 10x + 2)' = 18x - 10$

b) $\left(5r^3 - 3r^5\right)'' = (15r^2 - 15r^4)' = 30r - 60r^5$

c) $\left(\dfrac{2t+5}{3t-2}\right)'' = \left(\dfrac{-19}{(3t-2)^2}\right)' = \left(\dfrac{-19}{9t^2 - 12t + 4}\right)' = \dfrac{-19(18t-12)}{(9t^2-12t+4)^2}$ □

2. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

EJERCICIO 2. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 3x - 2 \end{aligned}$$

en el punto $(0, -2)$.

Solución. Primero, determinemos la derivada de la función: para $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$f'(x) = 2x + 3$$

evaluamos en el punto requerido:

$$f'(0) = 3.$$

Con esto, la ecuación de la recta tangente es

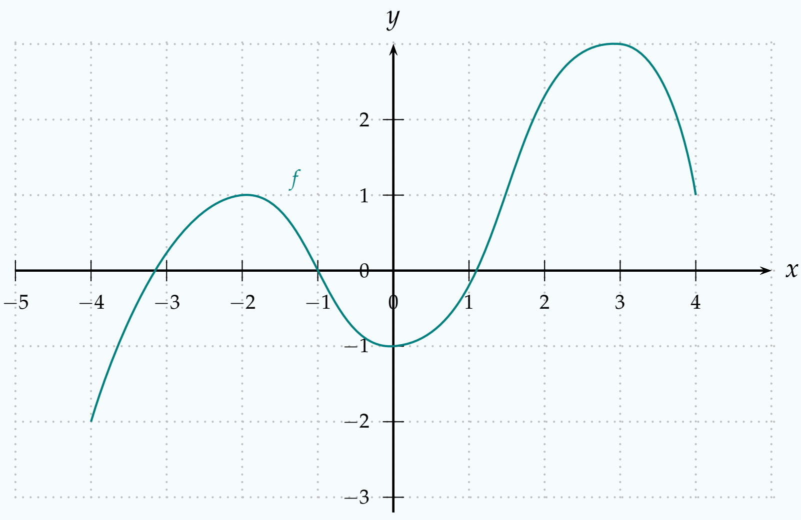
$$y = -2 + 3(x - 0),$$

que equivale a

$$y = 3x - 2.$$

$\square$

EJERCICIO 3. Suponga que la gráfica de una función derivable $f\colon [-4, 4] \to \mathbb{R}$ es:



Conjeture los intervalos para los que la derivada es positiva. Además, conjeture los valores de x tal que $f'(x) = 0$.

Solución. Sabemos que la derivada de f es positiva implica que la función es creciente, dado que la función es creciente en $[-4, -2]$ y en $[0, 2]$, por lo tanto $f(x) > 0$ para $x \in \,]-4, -2[$ o $x \in \,]0, 2[$. $\square$

3. RAZÓN DE CAMBIO RELACIONADAS

EJERCICIO 4. Cuando un plato circular de metal se está calentando en un horno, su radio aumenta a razón de 0,01 cm/min. ¿A qué razón aumenta el área del plato cuando su radio mide 50 cm?

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- t: el tiempo en minutos.
- $r(t)$: radio del plano (en centímetros) en el minuto t.
- $A(t)$: área del plano (en centímetros cuadrados) en el minuto t.

Con esto, se tiene que para todo $t \geq 0$,

$$\frac{dr}{dt}(t) = 0{,}01.$$

Se requiere determinar la razón a la que el área del plato está cambiando cuando tiene tiene un radio de 50 cm, entonces se busca:

$$\frac{dA}{dt}(0),$$

si $r(0) = 50$. Como el área de un plato circular está relacionada con su radio en todo minuto t, por

$$A(t) = \pi r^2(t)$$

de donde,

$$\frac{dA}{dt}(t) = 2\pi r(t) \cdot \frac{dr}{dt}(t),$$

para todo $t \geq 0$. Así, se tiene que

$$\frac{dA}{dt}(t) = \frac{2\pi r(t)}{100}.$$

para todo $t \geq 0$. En particular, evaluando en $t = 0$,

$$\frac{dA}{dt}(0) = \frac{2\pi(50)}{100} = \pi.$$

por lo tanto, el área del plato crece a razón de π centímetros cuadrados por minuto. □

EJERCICIO 5. La longitud l de un rectángulo está decreciendo a razón de 2 cm/seg mientras que su ancho w, está creciendo a razón de 2 cm/seg. Si $l = 12$ cm y $w = 5$ cm, encuentre las razones de cambio de *(a)* el área, *(b)*

> el perímetro y *(c)* las longitudes de las diagonales del rectángulo. ¿Cuáles de estas magnitudes están creciendo y cuáles están decreciendo?

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- t: el tiempo en segundos.
- $l(t)$: largo (en centímetros) en el segundo t.
- $w(t)$: ancho (en centímetros) en el segundo t.
- $A(t)$: área (en centímetros cuadrados) en el segundo t.
- $P(t)$: perímetro (en centímetros) en el segundo t.
- $D(t)$: longitud del la diagonal del rectángulo (en centímetros) en el segundo t.

Con esto, se tiene que para todo $t \geq 0$,

$$\frac{dl}{dt}(t) = -2 \quad \text{y} \quad \frac{dw}{dt}(t) = 2.$$

a) Se quiere determinar la razón a la que el área del rectángulo está cambiando cuando el largo mide 12 cm y el ancho 5 cm, entonces se busca:

$$\frac{dA}{dt}(0),$$

si $l(0) = 12$ y $w(0) = 5$. Como el área de un rectángulo está relacionada con su largo y ancho en todo segundo t, por

$$A(t) = l(t)w(t)$$

de donde,

$$\frac{dA}{dt}(t) = \frac{dl}{dt}(t)w(t) + l(t)\frac{dw}{dt}(t),$$

para todo $t \geq 0$. Así, se tiene que

$$\frac{dA}{dt}(t) = -2w(t) + 2l(t)$$

para todo $t \geq 0$. En particular, evaluando en $t = 0$,

$$\frac{dA}{dt}(0) = -2(5) + 2(12) = 14.$$

Por lo tanto, el área del rectángulo se incrementa a 14 centímetros cuadrados por segundo.

b) Se requiere determinar la razón a la que el perímetro del rectángulo está cambiando cuando el largo mide 12 cm y el ancho 5 cm, entonces se busca:

$$\frac{dP}{dt}(0),$$

si $l(0) = 12$ y $w(0) = 5$. Como el perímetro de un rectángulo está relacionado con su largo y ancho en todo segundo t, por

$$P(t) = 2l(t) + 2w(t)$$

de donde,

$$\frac{dP}{dt}(t) = 2\frac{dl}{dt}(t) + 2\frac{dw}{dt}(t)$$

para todo $t \geq 0$. En particular, evaluando en $t = 0$,

$$\frac{dP}{dt}(0) = 2(-2) + 2(2) = 0.$$

Por lo tanto, el perímetro del rectángulo se mantiene constante.

c) Se requiere determinar la razón a la que la longitud de la diagonal del rectángulo está cambiando cuando el largo mide 12 cm y el ancho 5 cm, entonces se busca:

$$\frac{dD}{dt}(0),$$

si $l(0) = 12$ y $w(0) = 5$. Para encontrar una expresión que relacione la diagonal del rectángulo consideremos la siguiente figura 1.

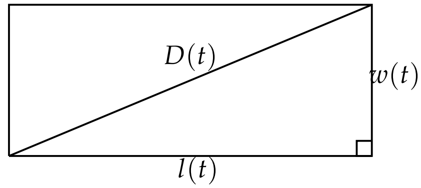


Figura 1

Así, por el teorema de pitágoras se tiene que la diagonal del rectángulo está relacionada con el largo y ancho en todo segundo t, por

$$D(t) = \sqrt{l^2(t) + w^2(t)},$$

de donde,

$$\frac{dD}{dt}(t) = \frac{l(t)\cdot\dfrac{dl}{dt} + w(t)\cdot\dfrac{dw}{dt}}{\sqrt{l^2(t)+w^2(t))}},$$

para todo $t \geq 0$. Así, se tiene que

$$\frac{dD}{dt}(t) = \frac{-2l(t)+2w(t)}{\sqrt{l^2(t)+w^2(t))}}$$

para todo $t \geq 0$. En particular, evaluando en $t = 0$,

$$\frac{dD}{dt}(0) = \frac{-2(12)+2(5)}{\sqrt{5^2+12^2}} = -\frac{14}{13} \approx -1{,}0769.$$

Por tanto, la diagonal decrece 1,0769 centímetros por segundo. □

Ejercicio 6. Una compañía está analizando el coste total de producción. Se tiene que gasta \$10 000 en gastos fijos, por otro lado, el costo por artículo cambia en el tiempo al igual que la cantidad de artículos producidos. Si en un momento determinado se producían 100 artículo a la semana y su costo unitario era de \$30, además, el costo por artículo se incrementa a razón de \$2 por semana y la producción decrece a razón de 5 artículos por semana, ¿el costo total de producción crece o decrece?

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- t: el tiempo en semanas.
- $C(t)$: costo total de producción (en dólares) en función del tiempo.
- $c(t)$: costo unitario (en dólares) en función del tiempo.
- $q(t)$: cantidad de artículos producidos en función del tiempo.

Con esto, el problema nos indica que

$$q(0) = 100, \qquad c(0) = 30, \qquad q'(0) = -5 \quad \text{y} \quad c'(0) = 2.$$

Se requiere determinar la razón a la que el costo total cambiar, entonces se busca:

$$C'(0).$$

Tenemos que el costo total de producción está dado por

$$C(t) = 10000 + q(t)c(t),$$

de donde, derivando,

$$C'(t) = q'(t)c(t) + q(t)c'(t),$$

para todo $t \geq 0$. Así, evaluando en $t = 0$,

$$C'(0) = q'(0)c(0) + q(0)c'(0) = (-5)(30) + (100)(2) = 50.$$

por lo tanto, el costo total de producción aumenta a razón de \$50 por semana. □

EJERCICIO 7. Una compañía está analizando el coste total de producción. Se tiene que gasta \$10 000 en gastos fijos, por otro lado, el costo por artículo cambia en el tiempo al igual que la cantidad de artículos producidos. Si en un momento determinado se producían 70 artículo a la semana y su costo unitario era de \$28, además, el costo por artículo se reduce a razón de \$3 por semana y la producción crece a razón de 7 artículos por semana, ¿el costo total de producción crece o decrece?

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- t: el tiempo en semanas.
- $C(t)$: costo total de producción (en dólares) en función del tiempo.
- $c(t)$: costo unitario (en dólares) en función del tiempo.
- $q(t)$: cantidad de artículos producidos en función del tiempo.

Con esto, el problema nos indica que

$$q(0) = 70, \qquad c(0) = 28, \qquad q'(0) = 7 \quad \text{y} \quad c'(0) = -3.$$

Se requiere determinar la razón a la que el costo total cambiar, entonces se busca:

$$C'(0).$$

Tenemos que el costo total de producción está dado por

$$C(t) = 10000 + q(t)c(t),$$

de donde, derivando,

$$C'(t) = q'(t)c(t) + q(t)c'(t),$$

para todo $t \geq 0$. Así, evaluando en $t = 0$,

$$C'(0) = q'(0)c(0) + q(0)c'(0) = (7)(28) + (70)(-3) = -14.$$

por lo tanto, el costo total de producción disminuye a razón de \$14 por semana.

□

EJERCICIO 8. Resolver los ejercicios del 31 y 32 de la sección de ejercicios 3.7 del libro “Cálculo en una variable” de Thomas (11va. edición).
`https://bit.ly/3besYFo`

4. MAGNITUDES ECONÓMICAS

EJERCICIO 9. Si la función de costo promedio de un fabricante en función del número de unidades producidas es

$$\begin{aligned} \overline{c}\colon [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto 0{,}0001q^2 - 0{,}02q + 5 + \frac{5000}{q}\,, \end{aligned}$$

determine:

a) La función del costo total.

b) La función del costo marginal.

c) El costo de producir 50 unidades.

d) El costo marginal cuando se producen 50 unidades.

Solución.

a) Tenemos que, la función costo total está dada por:

$$\begin{aligned} c(q) &= q \cdot \overline{c}(p) \\ &= 0{,}0001q^3 - 0{,}02q^2 + 5q + 5000. \end{aligned}$$

b) La función de costo marginal está dada por:

$$\begin{aligned} c'(q) &= \left(0{,}0001q^3 - 0{,}02q^2 + 5q + 5000\right)' \\ &= 0{,}0003q^2 - 0{,}04q + 5. \end{aligned}$$

c) Para determinar el costo calculamos $c(50)$:

$$c(50) = 0{,}0001(50)^3 - 0{,}02(50)^2 + 5(50) + 5000$$

$$= 5212{,}5.$$

Por lo tanto, el costo de producir 50 unidades es de \$5212,5.

d) Para determinar el costo marginal calculamos $c'(50)$:

$$\begin{aligned} c'(50) &= 0{,}0003(50)^2 - 0{,}04(50) + 5 \\ &= 3{,}75. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el costo marginal de producir 50 unidades es de \$3,75. □

Ejercicio 10. Si la función de costo promedio de un fabricante en función del número de unidades producidas es

$$\begin{aligned} \overline{c}\colon [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto 0{,}002q^2 - 0{,}5q + 60 + \frac{7000}{q}, \end{aligned}$$

determine:

a) La función del costo total.

b) La función del costo marginal.

c) El costo de producir 15 unidades.

d) El costo marginal cuando se producen 25 unidades.

Solución.

a) Tenemos que, la función costo total está dada por:

$$\begin{aligned} c(q) &= q \cdot \overline{c}(p) \\ &= 0{,}002q^3 - 0{,}5q^2 + 60q + 7000. \end{aligned}$$

b) La función de costo marginal está dada por:

$$\begin{aligned} c'(q) &= \left(0{,}002q^3 - 0{,}5q^2 + 60q + 7000\right)' \\ &= 0{,}006q^2 - q + 60. \end{aligned}$$

c) Para determinar el costo calculamos $c(15)$:

$$c(50) = 0{,}002(50)^3 - 0{,}5(15)^2 + 60(15) + 7000$$

$$= 8037{,}5.$$

Por lo tanto, el costo de producir 15 unidades es de \$8037,5.

d) Para determinar el costo marginal calculamos $c'(25)$:

$$\begin{aligned} c'(50) &= 0{,}006(25)^2 - (25) + 60 \\ &= 38{,}75. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el costo marginal de producir 25 unidades es de \$38,75. □

EJERCICIO 11. Si la función de ingreso de un fabricante en función del número de unidades producidas es

$$\begin{aligned} r\colon [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto 2q(30-0{,}1q), \end{aligned}$$

determine:

a) La función del ingreso marginal.

b) El ingreso al producir 50 unidades.

c) El ingreso marginal cuando se producen 50 unidades.

Solución.

a) Tenemos que, la función del ingreso marginal es:

$$\begin{aligned} r'(q) &= (2q(30-0{,}1q))' \\ &= \left(60q - 0{,}2q^2\right)' \\ &= 60 - 0{,}4q. \end{aligned}$$

b) El ingreso al producir 50 unidades está dado por $r(50)$

$$\begin{aligned} r(50) &= 2(50)(30-0{,}1(50)) \\ &= 2500. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el ingreso al producir 50 unidades es \$2500.

c) El ingreso marginal cuando se producen 50 unidades es

$$r'(50) = 60 - 0{,}4(50)$$

$$= 40.$$

Por lo tanto, el ingreso marginal cuando se producen 50 unidades es de \$40.

□

EJERCICIO 12. Si la función de ingreso de un fabricante en función del número de unidades producidas es

$$\begin{aligned} r\colon [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto 250q + 45q^2 - q^3, \end{aligned}$$

determine:

a) La función del ingreso marginal.

b) El ingreso al producir 5 unidades.

c) El ingreso marginal cuando se producen 5 unidades.

Solución.

a) Tenemos que, la función ingreso marginal es:

$$\begin{aligned} r'(q) &= \left(250q + 45q^2 - q^3\right)' \\ &= 250 + 90q - 3q^2. \end{aligned}$$

b) El ingreso al producir 5 unidades está dado por $r(5)$ es decir

$$\begin{aligned} r(50) &= 250(5) + 45(5)^2 - (5)^3 \\ &= 2250. \end{aligned}$$

Por lo tanto, ingreso al producir 5 unidades es \$2250.

c) El ingreso marginal cuando se producen 5 unidades está dado por

$$\begin{aligned} r'(5) &= 250 + 90(5) - 3(5)^2 \\ &= 625. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el ingreso marginal cuando se producen 5 unidades es de \$ 625.

□

EJERCICIO 13. La función de costo total de un fabricante en función del número de unidades producidas es

$$\begin{aligned} c\colon [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto 0{,}3q^2 + 3{,}5q + 9. \end{aligned}$$

a) ¿Qué tan rápido cambia el costo con respecto a la cantidad producida cuando se producen 10 unidades?

b) ¿Qué tan rápido cambia el costo con respecto a la cantidad producida cuando se producen 20 unidades?

c) Determine la razón de cambio porcentual del costo con respecto a la cantidad producida cuando se producen 10 unidades.

d) Determine la razón de cambio porcentual del costo con respecto a la cantidad producida cuando se producen 20 unidades.

Solución. Primero, tenemos que el cambio del costo con respecto a la cantidad producida está dado por

$$c'(q) = 0{,}6q + 3{,}5.$$

Por otra parte, la razón de cambio porcentual del costo está dada por

$$\frac{c'(q)}{c(q)} \cdot 100\,\% = \frac{0{,}6q + 3{,}5}{0{,}3q^2 + 3{,}5q + 9}.$$

a) Evaluando $c'(10)$ tenemos que

$$\begin{aligned} c'(10) &= 0{,}6(10) + 3{,}5 \\ &= 9{,}5. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el cambio del costo con respecto a la cantidad producida cuando se producen 10 unidades es de 9,5.

b) Evaluando $c'(20)$ tenemos que

$$\begin{aligned} c'(20) &= 0{,}6(20) + 3{,}5 \\ &= 15{,}5. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el cambio del costo con respecto a la cantidad producida cuando se producen 20 unidades es de 15,5.

c) Evaluando $\dfrac{c'(10)}{c(10)} \cdot 100\,\%$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{c'(10)}{c(10)} \cdot 100\,\% &= \frac{0{,}6(10) + 3{,}5}{0{,}3(10)^2 + 3{,}5(10) + 9}\\ &\approx 12{,}83\,\%\end{aligned}$$

Por lo tanto, la razón de cambio porcentual respecto a la cantidad producida cuando se producen 10 unidades es de 12,83 %.

d) Evaluando $\dfrac{c'(20)}{c(20)} \cdot 100\,\%$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{c'(20)}{c(20)} \cdot 100\,\% &= \frac{0{,}6(20) + 3{,}5}{0{,}3(20)^2 + 3{,}5(20) + 9}\\ &\approx 7{,}78\,\%\end{aligned}$$

Por lo tanto, la razón de cambio porcentual respecto a la cantidad producida cuando se producen 20 unidades es de 7,78 %. □

EJERCICIO 14. Un fabricante de bicicletas de montaña determinó que cuando se producen 20 bicicletas por día, el costo promedio es de \$150 y el costo marginal de \$125. Con base en esta información, determine el costo total de producir 21 bicicletas por día.

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- q: cantidad de bicicletas.
- $c(q)$: costo total en función de la cantidad de bicicletas.
- $\overline{c}(q)$: costo promedio en función de la cantidad de bicicletas.
- $c'(q)$: costo marginal en función de la cantidad de bicicletas.

Además, sabemos que

$$\overline{c}(20) = 150 \quad \text{y} \quad c'(20) = 125.$$

Se requiere determinar el costo total de producir 21 bicicletas por día, es decir, se busca $c(21)$. Tenemos que el costo de producir 21 bicicletas es igual al costo de producir una bicicleta más, por lo tanto, tenemos que

$$c(21) \approx c(20) + c'(20).$$

Por otra parte

$$c(q) = q \cdot \overline{c}(q),$$

evaluando la expresión anterior en $q = 20$,

$$\begin{aligned} c(20) &= 20 \cdot \overline{c}(50) \\ &= 20 \cdot (150) = 3000. \end{aligned}$$

Con esto, tenemos que

$$c(21) \approx 3000 + 125 \approx 3125, \qquad \square$$

es decir, el costo de producir 21 bicicletas por día es de $3125.

EJERCICIO 15. La función de ingreso de un fabricante en función del número de unidades producidas es

$$\begin{aligned} r\colon [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto 30q - 0{,}3q^2. \end{aligned}$$

a) Determine la razón de cambio, la razón de cambio relativa y la razón de cambio porcentual del ingreso respecto a la cantidad producida.

b) Determine la razón de cambio, la razón de cambio relativa y la razón de cambio porcentual del ingreso respecto a la cantidad producida cuando se producen 20, 40, 50 y 60 unidades.

Solución.

a) Tenemos que: la razón de cambio de la función de ingreso está dada por

$$r'(q) = 30 - 0{,}6q,$$

la razón de cambio relativa por

$$\frac{r'(q)}{r(q)} = \frac{30 - 0{,}6q}{30q - 0{,}3q^2},$$

y la razón de cambio porcentual por

$$\frac{r'(q)}{r(q)} \cdot 100 = \frac{30 - 0{,}6q}{30q - 0{,}3q^2} \cdot 100.$$

b) Reemplazando los valores de 20,40,50 y 60 unidades en cada una de las funciones obtenidas en el literal anterior tenemos la siguiente tabla:

Cantidad	**Razón de cambio**	**Razón de cambio relativa**	**Razón de cambio porcentual**
20	18	0,0375	3,7500
40	6	0,0083	0,8333
50	0	0,0000	0,0000
60	-6	$-0{,}0083$	$-0{,}8333$

□

EJERCICIO 16. Si la ecuación de la demanda está dada por

$$q = \frac{60}{p} + \ln(65 - p^3),$$

donde q representa la cantidad de un producto y p su precio, se tiene que la cantidad demandada está en función del precio con la función

$$\begin{aligned} q\colon [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \frac{60}{p} + \ln(65 - p^3). \end{aligned}$$

a) Determine la elasticidad puntual de la demanda cuando el precio es de \$4, y clasifique la demanda como elástica, inelástica o de elasticidad unitaria a este nivel de precio.

b) Si el precio disminuye en 2 % (de \$4,00 a \$3,92), use la respuesta del inciso *a)* para estimar el cambio porcentual correspondiente en la cantidad vendida.

c) ¿Resultarán los cambios del inciso *b)* en un incremento o en una disminución en el ingreso? Explique su respuesta.

Solución.

a) Tenemos que la elasticidad está dada por

$$\begin{aligned} \eta(p) &= \frac{p}{q(p)} \cdot q'(p) \\ &= \frac{p}{\frac{65}{p} + (65 - p^3)} \cdot \left(-\frac{60}{p^2} + \frac{-3p^2}{65 - p^3} \right). \end{aligned}$$

Evaluando la expresión anterior

$$\eta(4) = -13{,}8$$

de donde, como $|\eta(4)| > 1$, la demanda es elástica.

b) Tenemos que

$$\eta(q) \approx \frac{a}{b}$$

donde a representa el porcentaje de cambio de demanda y b representa el porcentaje de cambio de precio. Por lo tanto y con el resultado del inciso *a)*, se tiene que

$$\begin{aligned} a &\approx \eta(4) \cdot b \\ &\approx -13{,}8(0{,}02) \\ &\approx -0{,}276. \end{aligned}$$

Así, el cambio porcentual en la cantidad vendida es de $-27{,}6\,\%$.

c) Dado que se tiene elasticidad elástica, al bajar de precio, el ingreso aumenta (leer página 542, sección "Elasticidad e ingreso" del libro de Haeussler, 12va. edición, `http://bit.ly/2uAqh1n`). □

EJERCICIO 17. Suponga que una empresa tiene gastos fijos semanales de \$1000, por otro lado, al producir 50 unidades, su ingreso marginal es \$2 por unidad producida, además, el costo unitario es de \$60 y este disminuye a razón de \$1 por unidad producida. Determine la utilidad marginal.

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- q: cantidad de artículos producidos.
- $I(q)$: ingresos en función de la cantidad de artículos producidos, en dólares.
- $U(q)$: utilidad en función de la cantidad de artículos producidos, en dólares.
- $c(q)$: costo unitario en función de la cantidad de artículos producidos, en dólares.

Además, como al producir 50 unidades, su ingreso marginal es \$2, tenemos que

$$I'(50) = 2,$$

por otro lado, como es costo unitario es de \$60, se tiene que

$$c(50) = 60,$$

finalmente, como este disminuye a razón de \$1 por unidad producida, tenemos que

$$c'(50) = -1.$$

Con esto, buscamos la utilidad marginal, es decir, $U'(50)$.

Ahora, relacionemos nuestras variables, tenemos que

$$U(q) = I(q) - (10000 + qc(q)).$$

Derivando, obtenemos que

$$U'(q) = I'(q) - (c(q) + qc'(q)),$$

evaluando en $q = 50$, tenemos que

$$U'(50) = I'(50) - (c(50) + qc'(50)) = 2 - (60 + 50(-1)) = -8.$$

Por lo tanto, la utilidad marginal es de $\$-8$ por unidad producida. □

EJERCICIO 18. Resolver los ejercicio 47 de la sección de problemas 11.3 del libro "Matemática para Administración y Economía" de Haeussler (12va. edición). `http://bit.ly/2uAqh1n`

EJERCICIO 19. Resolver los ejercicio 63 y 64 de la sección de problemas 11.4 del libro "Matemática para Administración y Economía" de Haeussler (12va. edición). `http://bit.ly/2uAqh1n`

EJERCICIO 20. Resolver los ejercicio 18 y 23 de la sección de problemas 12.3 del libro "Matemática para Administración y Economía" de Haeussler (12va. edición). `http://bit.ly/2uAqh1n`

1. DERIVADA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

EJERCICIO 1. Supongamos que la ecuación

$$y^2 - \cos(x^2 - y) = x + 1$$

define implícitamente y como una o varias funciones de x. Encuentre la derivada de esa o esas funciones, bajo el supuesto de que son derivables.

Solución. Supongamos que existe $f : A \to \mathbb{R}$ derivable, donde $A \subset \mathbb{R}$, tal que $y = f(x)$, es decir,

$$f(x)^2 - \cos(x^2 - f(x)) = x + 1$$

para todo $x \in A$. Tenemos que

$$\Big(f(x)^2 - \cos(x^2 - f(x))\Big)' = (x+1)',$$

es decir,

$$2f(x) + \operatorname{sen}(x^2 - f(x))(2x - f'(x)) = 1,$$

de donde

$$f'(x) = \frac{1 - 2x\operatorname{sen}(x^2 - f(x))}{2f(x) - \operatorname{sen}(x^2 - f(x))}$$

para $x \in A$ tal que $2f(x) \neq \operatorname{sen}(x^2 - f(x))$. En otra palabras,

$$y' = \frac{1 - 2x\operatorname{sen}(x^2 - y)}{2y - \operatorname{sen}(x^2 - y)}.$$

□

EJERCICIO 2. Supongamos que la ecuación

$$(x - 2y)^4 = x^2 + y$$

define implícitamente y como una o varias funciones de x. Encuentre la derivada de esa o esas funciones, bajo el supuesto de que son derivables.

Solución. Supongamos que existe $f\colon A \to \mathbb{R}$ derivable, donde $A \subset \mathbb{R}$, tal que $y = f(x)$, es decir,

$$(x - 2f(x))^4 = x^2 + f(x)$$

para todo $x \in A$. Tenemos que

$$\left((x - 2f(x))^4 \right)' = (x^2 + f(x))',$$

es decir,

$$4\,(x - 2f(x))^3\,(x - 2f(x))' = 2x + f'(x),$$

de donde

$$f'(x) = \frac{4(x - 2f(x))^3 - 2x}{1 + 8(x - 2f(x))^3}$$

para $x \in A$. En otras palabras,

$$y' = \frac{4(x - 2y)^3 - 2x}{1 + 8(x - 2y)^3}. \qquad \square$$

EJERCICIO 3. Supongamos que la ecuación

$$e^{x-2y} = x^2 + y$$

define implícitamente y como una o varias funciones de x. Encuentre la derivada de esa o esas funciones, bajo el supuesto de que son derivables.

Demostración. Supongamos que existe $f\colon A \to \mathbb{R}$ derivable, donde $A \subset \mathbb{R}$, tal que $y = f(x)$, es decir,

$$e^{x-2f(x)} = x^2 + f(x)$$

para todo $x \in A$. Tenemos que

$$\left(e^{x-2f(x)}\right)' = \left(x^2 + f(x)\right)',$$

es decir,

$$e^{x-2f(x)}\,(x - 2f(x))' = 2x + f'(x),$$

de donde

$$f'(x) = \frac{e^{x-2f(x)} - 2x}{1 + 2e^{x-2f(x)}}.$$

En otras palabras

$$y' = \frac{e^{x-2y} - 2x}{1 + 2e^{x-2y}}. \qquad \square$$

EJERCICIO 4. Resolver los ejercicios del 19, 26 y 31 de la sección de ejercicios 3.6 del libro "Cálculo en una variable" de Thomas (11va. edición).
`https://bit.ly/3besYFo`

1. EXTREMOS

EJERCICIO 1. Determinar los extremos de la función

$$\begin{aligned} f\colon \left[-\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}\right] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3+3x^2. \end{aligned}$$

Solución. Primero determinemos los puntos críticos, para ello derivamos la función f

$$f'(x) = 3x^2+6x = x(3x+6),$$

a continuación, la derivada de f se iguala a cero, con la finalidad de encontrar los valores de x que determinan un máximo o un mínimo local, es así que

$$f'(x)=0 \quad\Longrightarrow\quad (x=0 \quad\vee\quad x=-2)$$

por lo tanto, la función puede tener puntos críticos en $x=-2$ y $x=0$. Evaluamos la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo:

x	$f(x)$
$-\frac{5}{2}$	$\frac{25}{8}$
-2	4
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$

Por lo tanto f alcanza un mínimo en $x=0$ y un máximo en $x=-2$. □

EJERCICIO 2. Determinar los extremos de la función

$$\begin{aligned} g\colon [-3,3] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^4-6x^2-5x. \end{aligned}$$

Solución. Primero determinemos los puntos críticos, para ello derivemos la función g

$$g'(x) = 4x^3-12x-5,$$

a continuación, la derivada de g se iguala a cero, con la finalidad de encontrar los valores de x que determinan un máximo o un mínimo local, es así que

$$g'(x) = 0 \Longrightarrow (x \approx -1{,}465 \quad \vee \quad x \approx -0{,}446 \quad \vee \quad x \approx 1{,}911)$$

por lo tanto, la función puede tener puntos críticos en $x \approx -1{,}465$, $x \approx -0{,}446$ y $x \approx 1{,}911$. Evaluamos la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo:

x	$g(x)$
-3	45
$-1{,}465$	$-0{,}946$
$-0{,}446$	$1{,}076$
$1{,}911$	$-18{,}3$
3	12

Por lo tanto g alcanza mínimos en $x \approx -1{,}465$ y $x \approx 1{,}911$ y un máximo en $x \approx -0{,}446$. □

EJERCICIO 3. Determinar los extremos de la función

$$\begin{aligned} h\colon [-2,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^5 + x^3 - 6x^2 - 5x. \end{aligned}$$

Solución. Primero determinemos los puntos críticos, para ello derivamos la función h

$$h'(x) = 5x^4 + 3x^2 - 12x - 5,$$

a continuación, la derivada de f se iguala a cero, con la finalidad de encontrar los valores de x que determinan un máximo o un mínimo local, es así que

$$h'(x) = 0 \Longrightarrow (x \approx 0{,}373 \quad \vee \quad x \approx 1{,}330)$$

por lo tanto, la función puede tener puntos críticos en $x \approx 0{,}373$ y $x \approx 1{,}330$. Evaluamos la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo:

x	$h(x)$
-2	-54
$-0{,}373$	$0{,}971$
$1{,}330$	$-10{,}749$
2	6

Por lo tanto h alcanza un mínimo en $x \approx 1{,}330$ y un máximo en $x \approx -0{,}373$. □

EJERCICIO 4. Determinar los extremos de la función

$$\begin{aligned} f : [-2,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{9-x^2}. \end{aligned}$$

Solución. Primero determinemos los puntos críticos, para ello derivemos la función f

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

a continuación, la derivada de f se iguala a cero, con la finalidad de encontrar los valores de x que determinan un máximo o un mínimo local, es así que

$$f'(x) \Rightarrow x = 0$$

por lo tanto, la función puede tener puntos críticos en $x = 0$. evaluamos la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo:

x	$f(x)$
-2	$\sqrt{5}$
0	3
2	$\sqrt{5}$

Por lo tanto f alcanza un máximo en $x = 0$. □

EJERCICIO 5. Encuentre todos los extremos relativos de la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 - 3x + 1. \end{aligned}$$

Solución. Determinemos la primera y segunda derivada de f

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad \text{y} \quad f''(x) = 6x.$$

Tomando $f'(x) = 0$, tenemos que los puntos críticos de f son: $x = -1$ y $x = 1$. Finalmente, como

$$f''(-1) = -6 < 0 \quad \text{y} \quad f''(1) = 6 > 0,$$

por el criterio de la segunda derivada, f alcanza un máximo en -1 y un mínimo en 1. □

EJERCICIO 6. Determinar los extremos relativos de la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 + 9x^2 + 27x + 28 \end{aligned}$$

Solución. Determinemos la primera y la segunda derivada de f

$$f'(x) = 3x^2 + 18x + 27 \quad \text{y} \quad f''(x) = 6x + 18.$$

Tomando $f'(x) = 0$, tenemos que f tiene un punto crítico en $x = -3$. Finalmente, como

$$f''(-3) = 36 > 0,$$

por el criterio de la segunda derivada, f alcanza un mínimo en -3. □

EJERCICIO 7. Determinar los extremos relativos de la función

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Solución. Determinamos la primera y al segunda derivada de g

$$g'(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 1} - \frac{2x\left(x^2 + 3x - 2\right)}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$

y

$$g''(x) = \frac{8\left(x^2 + 3x - 2\right)x^2}{\left(x^2 + 1\right)^3} - \frac{4(2x + 3)x}{\left(x^2 + 1\right)^2} - \frac{2\left(x^2 + 3x - 2\right)}{\left(x^2 + 1\right)^2} + \frac{2}{x^2 + 1}.$$

tomando $g'(x) = 0$, tenemos que los puntos críticos de g son: $x = 1 - \sqrt{2}$ y $x = 1 + \sqrt{2}$. Finalmente, como

$$g''(1 - \sqrt{2}) \approx 6{,}181 > 0 \quad \text{y} \quad g''(1 + \sqrt{2}) \approx -0{,}181 < 0,$$

por el criterio de la segunda derivada, g alcanza un máximo en $x = 1 + \sqrt{2}$ y un mínimo en $x = 1 - \sqrt{2}$. □

EJERCICIO 8. Determinar los extremos relativos de la función

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x + 1)e^{1 - x^2} \end{aligned}$$

Solución. Determinemos la primera y la segunda derivada de h

$$h'(x) = e^{1-x^2} - 2e^{1-x^2}x(x+1) \quad \text{y} \quad h''(x) = 4e^{1-x^2}(x+1)x^2 - 4e^{1-x^2}x - 2e^{1-x^2}(x+1)$$

tomando $h'(x) = 0$, tenemos que los puntos críticos de h son: $x = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ y $x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Finalmente, como

$$h''\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \approx 1{,}457 > 0 \quad \text{y} \quad h''\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \approx -8{,}235 < 0,$$

por el criterio de la segunda derivada, h alcanza un máximo en $x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ y un mínimo en $x = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$. □

EJERCICIO 9. Resolver los ejercicios del 37, 42 y 44 de la sección de ejercicios 4.1 del libro "Cálculo en una variable" de Thomas (11va. edición).
`https://bit.ly/3besYFo`

2. EJERCICIOS DE OPTIMIZACIÓN

EJERCICIO 10. Se quiere construir una caja sin tapa de base cuadrada que tenga 1000 cm^3 de capacidad de tal forma que su área lateral sea mínima. ¿Qué dimensiones debe tener?

Solución. Consideremos lo siguiente:

- x: longitud del lado de la base de la caja, en cm.
- $A(x)$: área lateral de la caja, en función de la longitud del lado de la base, en cm^2.

Tenemos que la función del área es:

$$\begin{aligned} A :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 4x\left(\frac{1000}{x^2}\right) = x^2 + \frac{4000}{x}. \end{aligned}$$

Derivando esta función, tenemos, para $x \in \left]0, +\infty\right[$:

$$A'(x) = 2x - \frac{8000}{x^2}.$$

Buscamos puntos críticos, para esto, resolvemos la ecuación $A'(x) = 0$, con lo cual tenemos que

$$x = \sqrt[3]{4000} \approx 15{,}874.$$

Además, tenemos que la altura es aproximadamente 3,968, por lo tanto, las dimensiones para tener área lateral mínima son 3,968 cm de alto y 15,874 cm del lado de la base. □

EJERCICIO 11. Un comerciante encuentra que puede vender 4 000 metros de cierta tela cada mes. El precio normal es de 6 dólares por metro. El comerciante calcula que las ventas mensuales aumentan 250 metros por cada 15 centavos de dólar de descuento en el precio por metro. Encuentre el precio por metro que daría el máximo ingreso al comerciante.

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- x: descuento en dólares.
- $I(x)$: ingresos en función del descuento en dólares.

Tenemos que la función del ingreso es:

$$\begin{aligned} I\colon [0,6] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \left(4000 + 250 \cdot \frac{x}{15}\right)(6 - x). \end{aligned}$$

Derivando esta función, tenemos, para $x \in \left]0, 6\right[$:

$$I'(x) = \frac{50(6-x)}{3} - \frac{50x}{3} - 4000.$$

Buscamos puntos críticos, para esto, resolvemos la ecuación $I'(x) = 0$, con lo cual tenemos que

$$x = -117.$$

Sin embargo, este valor no es parte del dominio de la función. Así, lo descartamos y consideramos los extremos del dominio como se muestra en la siguiente tabla:

x	$I(x)$
0	24000
6	0

Por lo tanto, el precio por metro de tela para obtener ingreso máximo es de \$6. □

EJERCICIO 12. Con el propósito de tener mayor seguridad, un fabricante planea cercar un área de almacenamiento rectangular de 18 000 metros cuadrados, que es adyacente a un edificio, el cual se utilizará como uno de los lados del área cercada. La cerca paralela al edificio colinda con una carretera y costará \$3 por metro instalado, mientras que de los otros dos lados la cerca costará \$2 por metro instalado. Encuentre la cantidad de cada tipo de cerca, de manera que el costo total sea mínimo. ¿Cuál es el costo mínimo?

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- x: longitud de la cerca en metros.
- y: ancho de la cerca en metros.
- $C(x)$: costo de construir la cerca en función de la longitud de la cerca.

Tenemos que la función del costo de la cerca es:

$$\begin{aligned} C\colon [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x+2x+2y. \end{aligned} \tag{1}$$

Por otra parte, para que el área sea de 18 000 m necesitamos que

$$\begin{aligned} xy &= 18000 \\ y &= \frac{18000}{x}. \end{aligned} \tag{2}$$

Así, reemplazando (2) en (1), tenemos que:

$$\begin{aligned} C\colon [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 5x+5\frac{18000}{x} \end{aligned}$$

de donde; derivando esta función, para $x \in \,]0,+\infty[$:

$$C'(x) = 5 - \frac{36000}{x^2}.$$

Buscamos puntos críticos, para esto, resolvemos la ecuación $C'(x) = 0$, con lo cual tenemos que

$$x_1 \approx -84{,}8528 \quad \text{y} \quad x_2 \approx 84{,}8528.$$

Notemos que x_1 está fuera del dominio de la función; así, lo descartamos y trabajamos con x_2. Derivando nuevamente la función, tenemos que

$$C''(x) = \frac{72000}{x^3}.$$

Evaluando en x_2

$$C''(84{,}8528) \approx 0{,}117851.$$

Como el resultado es positivo, entonces C alcanza un mínimo local en $x \approx 84{,}8528$, es decir, se requieren aproximadamente 84,85 m del tipo de material que da a la calle. Por otra parte, reemplazando en (2), tenemos que

$$y = \frac{18000}{84{,}85} \approx 212{,}139$$

es decir, se requieren 212,13 m del otro tipo de material, aproximadamente. □

EJERCICIO 13. La función de costo total de un fabricante está dada por la función

$$\begin{aligned} c\colon \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto \frac{q^2}{4} + 3q + 400 \end{aligned}$$

donde q representa las unidades producidas. ¿Para qué nivel de producción será el costo promedio por unidad un mínimo? ¿Cuál es este mínimo?

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- q : cantidad de unidades producidas.
- $c(q)$ costo total en función de la cantidad de unidades producidas.
- $\overline{c}(q)$ costo promedio en función de la cantidad de unidades producidas.

Tenemos que, la función costo promedio está dada por:

$$\begin{aligned} \overline{c}(q) &= \frac{c(q)}{q} \\ &= \frac{\frac{q^2}{4} + 3q + 400}{q} \\ &= \frac{q}{4} + \frac{400}{q} + 3 \end{aligned}$$

de donde, tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{c}\colon \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto \frac{q}{4} + \frac{400}{q} + 3 \end{aligned}.$$

Derivando esta función, tenemos, para $x \in]0, +\infty[$:

$$\bar{c}'(q) = \frac{1}{4} - \frac{400}{q^2}.$$

Buscamos puntos críticos, para esto, resolvemos la ecuación $\bar{c}'(q) = 0$, con lo cual tenemos que

$$x_1 = -40 \quad \text{y} \quad x_2 = 40.$$

Notemos que x_1 está fuera del dominio de la función; así, lo descartamos y trabajamos con x_2. Derivando nuevamente la función, tenemos que

$$\bar{c}''(q) = \frac{800}{q^3}.$$

Evaluando en x_2

$$\bar{c}''(40) = \frac{1}{80}.$$

Como el resultado es positivo, entonces $\bar{c}$ alcanza un mínimo local en $q = 40$, es decir, el costo promedio por unidad es mínimo cuando se producen 40 unidades.

□

EJERCICIO 14. La empresa Vista TV Cable tiene actualmente 100 000 suscriptores que pagan una cuota mensual de \$40. Una encuesta reveló que se tendrían 1000 suscriptores más por cada \$0,25 de disminución en la cuota. ¿Para qué cuota se obtendrá el ingreso máximo y cuántos suscriptores se tendrían con dicha cuota?

Solución (primera forma). Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- x : descuento en dólares.
- $I(x)$: ingreso en función del descuento en la cuota mensual en dólares.

Con esto, tenemos que el precio de la cuota mensual es

$$40 - x$$

y la cantidad de suscriptores será

$$100000 + 1000\frac{x}{0{,}25},$$

por lo tanto, tenemos que la función del ingreso es:

$$\begin{aligned} I\colon [0,40] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (100000 + 4000x)(40 - x). \end{aligned}$$

Derivando esta función, tenemos:

$$I'(x) = 60000 - 8000x.$$

Buscamos puntos críticos, para esto, resolvemos la ecuación $I'(x) = 0$, con lo cual tenemos que

$$x = \frac{15}{2} = 7{,}5.$$

Con esto, tenemos que I tiene un punto crítico en $x = 7{,}5$. Ahora, evaluamos la función en el puntos crítico y en los extremos del intervalo de definición de la función:

x	$I(x)$
7,5	4 225 000
0	4 000 000
40	0

Por lo tanto, I alcanza un máximo en $x = 7{,}5$. Así, se tiene que la cuota para obtener un ingreso máximo es de \$32,5. □

Solución (segunda forma). Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- p : precio en dólares.
- $I(p)$: ingreso en función del precio de la cuota mensual en dólares.

Con esto, tenemos que el precio de la cuota mensual es

$$p$$

y la cantidad de suscriptores será

$$100000 + 1000\frac{40 - p}{0{,}25},$$

por lo tanto, tenemos que la función del ingreso es:

$$\begin{aligned} I\colon [0,40] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto p\left(100000 + 1000\frac{40-p}{0{,}25}\right). \end{aligned}$$

Derivando esta función, tenemos:

$$I'(p) = 260000 - 80p.$$

Buscamos puntos críticos, para esto, resolvemos la ecuación $I'(p) = 0$, con lo cual tenemos que

$$p = \frac{65}{2} = 32{,}5.$$

Con esto, tenemos que I tiene un punto crítico en $p = 32{,}5$. Ahora, evaluamos la función en el puntos crítico y en los extremos del intervalo de definición de la función:

p	$I(p)$
32,5	4 225 000
0	0
40	4 000 000

Por lo tanto, I alcanza un máximo en $p = 32{,}5$. Así, se tiene que la cuota para obtener un ingreso máximo es de \$32,5 y con la misma se obtienen 130000 suscriptores. $\square$

Solución (tercera forma). Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- x : número de descuentos en el precio de la cuota mensual.
- $I(x)$: ingreso en función del número de descuentos en el precio de la cuota mensual en dólares.

Con esto, tenemos que el precio es

$$40 - 0{,}25x$$

y la cantidad de productos vendidos es

$$100000 + 1000x.$$

Además, notemos que el número de descuentos en el precio de la cuota mensual no puede exceder de 160 ya que si lo hace, se tendría un precio negativo de cuota mensual. Por lo tanto, tenemos que la función del ingreso es:

$$\begin{aligned} I\colon [0,160] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (40-0{,}25x)(100000+1000x). \end{aligned}$$

Derivando esta función, tenemos:

$$I'(x) = 15000 - 500x.$$

Buscamos puntos críticos, para esto, resolvemos la ecuación $I'(x) = 0$, con lo cual tenemos que

$$x = 30.$$

Con esto, tenemos que I tiene un punto crítico en $x = 30$. Ahora, evaluamos la función en el puntos crítico y en los extremos del intervalo de definición de la función:

x	$I(x)$
30	4 225 000
0	4 000 000
160	0

Por lo tanto, I alcanza un máximo en $x = 0$. Así, se tiene que la cuota para obtener un ingreso máximo es de \$32,5 y con la misma se obtienen 130000 suscriptores. □

Ejercicio 15. Se vende un producto en \$100. A este precio, se venden 40 unidades mensuales. Se conoce que si el precio sube \$5, se perderán 2 clientes. ¿Cuánto se puede subir el precio para tener ingresos máximos?

Solución (primera forma). Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- p : precio en dólares.
- $I(p)$: ingreso en función del precio en dólares.

Con esto, tenemos que el precio es

$$p$$

y la cantidad de productos vendidos es

$$40 - 2\frac{p-100}{5}.$$

Además, notemos que el precio no puede exceder de \$200 ya que si lo hace, se tendría una cantidad negativa de producto vendidos. Por lo tanto, tenemos que la función del ingreso es:

$$\begin{aligned} I\colon [100,200] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p \quad &\longmapsto p\left(40-2\frac{p-100}{5}\right). \end{aligned}$$

Derivando esta función, tenemos:

$$I'(p) = 80 - \frac{4}{5}p.$$

Buscamos puntos críticos, para esto, resolvemos la ecuación $I'(p) = 0$, con lo cual tenemos que

$$p = 100.$$

Con esto, tenemos que I tiene un punto crítico en $p = 100$. Ahora, evaluamos la función en el puntos crítico y en los extremos del intervalo de definición de la función:

p	$I(p)$
100	4000
200	0

Por lo tanto, I alcanza un máximo en $p = 100$. Así, se tiene que el precio para obtener un ingreso máximo es de \$100. □

Solución (segunda forma). Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- x : número de incrementos en el precio.
- $I(x)$: ingreso en función de los incrementos en el precio en dólares.

Con esto, tenemos que el precio es

$$100 + 5x$$

y la cantidad de productos vendidos es

$$40 - 2x.$$

Además, notemos que el número de incrementos en el precio no puede exceder de 20 ya que si lo hace, se tendría una cantidad negativa de producto vendidos. Por lo tanto, tenemos que la función del ingreso es:

$$\begin{aligned} I\colon [0,20] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto (100+5x)(40-2x). \end{aligned}$$

Derivando esta función, tenemos:

$$I'(x) = -20x.$$

Buscamos puntos críticos, para esto, resolvemos la ecuación $I'(x) = 0$, con lo cual tenemos que

$$x = 0.$$

Con esto, tenemos que I tiene un punto crítico en $x = 0$. Ahora, evaluamos la función en el puntos crítico y en los extremos del intervalo de definición de la función:

x	$I(x)$
0	4000
20	0

Por lo tanto, I alcanza un máximo en $x = 0$. Así, se tiene que el precio para obtener un ingreso máximo es de \$100. □

EJERCICIO 16. Suponga que la ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = 400 - 2q$ y que la función de costo promedio está dada por $\bar{c} = 0{,}2q + 4 + (400/q)$, donde q representa el número de unidades, y $p(q)$ y $\bar{c}(q)$ se expresan en dólares por unidad.

a) Determine el nivel de producción en el que se maximiza la utilidad.

b) Determine el precio en que ocurre la utilidad máxima.

c) Determine la utilidad máxima.

d) Si el gobierno impone un impuesto de \$22 por unidad al monopolista como medida reguladora, ¿cuál es el nuevo precio que maximiza la utilidad?

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- q : número de unidades.
- $p(q)$: demanda en función del número de unidades en \$.
- $\bar{c}(q)$: costo promedio en función del número de unidades en \$.
- $U(q)$: utilidad en función del número de unidades en \$.
- $i(q)$: ingreso en función del número de unidades en \$.

- $c(q)$: costo en función del número de unidades en \$.

Tenemos que, la función costo está dada por:

$$\begin{aligned} c(q) &= \bar{c}(q) \cdot q \\ &= \left(0{,}2q + 4 + \frac{400}{q}\right) \cdot q \\ &= 0{,}2q^2 + 4q + 400, \end{aligned}$$

de donde, tenemos que

$$\begin{aligned} c\colon \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto 0{,}2q^2 + 4q + 400. \end{aligned}$$

Por otra parte, como la utilidad se obtiene de restar el ingreso del costo; la función que modela la utilidad en función del número de unidades está dada por:

$$\begin{aligned} U(q) &= i(q) - c(q) \\ &= (p(q) \cdot q) - c(q) \\ &= (400 - 2q)q - (0{,}2q^2 + 4q + 400) \\ &= -2{,}2q^2 + 396q - 400. \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} I\colon \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto -2{,}2q^2 + 396q - 400. \end{aligned}$$

Derivando, tenemos, para $x \in]0, +\infty[$:

$$I'(q) = -4{,}4q + 396.$$

Buscamos puntos críticos, para esto, resolvemos la ecuación $I(q) = 0$, con lo cual tenemos que

$$x = 90.$$

Derivando nuevamente la función, tenemos que $I''(q) = -4{,}4$, es decir, siempre es negativo. Así:

a) el nivel de producción en el cual se maximiza la utilidad es 90 unidades.

b) el precio en que ocurre la utilidad máxima es: $p(90) = \$220$.

c) la utilidad máxima es: $I(90) = \$17420$.

□

EJERCICIO 17. Resolver los ejercicio 6, 11, 16, 19, 25, 34 de la sección de problemas 13.6 del libro "Matemática para Administración y Economía" de Haeussler (12va. edición).
`http://bit.ly/2uAqh1n`