1. Resolver las siguientes ecuaciones: (2.0pt)

   a) $2000 = 100 \cdot 3^{6x}$ *b)* $x + \sqrt{8-2x} = 2$

Solución.

a) Tenemos que

$$\begin{aligned} 2000 = 100 \cdot 3^{6x} &\iff \frac{2000}{100} = \cdot 3^{6x} \\ &\iff 20 = 3^{6x} \\ &\iff \ln(20) = \ln(3^{6x}) \\ &\iff \ln(20) = 6x \cdot \ln(3) \\ &\iff x = \frac{\ln(20)}{6\ln(3)} \approx 0{,}45447. \end{aligned}$$

b) Tenemos que

$$\begin{aligned} x + \sqrt{8-2x} = 2 &\iff \sqrt{8-2x} = 2 - x \\ &\implies (\sqrt{8-2x})^2 = (2-x)^2 \\ &\iff 8 - 2x = 4 - 4x + x^2 \\ &\iff x^2 - 2x - 4 = 0 \\ &\iff x = 1 - \sqrt{5} \quad \lor \quad x = 1 + \sqrt{5} \end{aligned}$$ $\square$

Ahora, reemplazando en la ecuación original, podemos comprobar que la única solución es $x = 1 - \sqrt{5}$.

2. Un saldo compensatorio se refiere a la práctica en la cual un banco requiere a quien solicita un crédito, mantenga en depósito una cierta parte del préstamo durante el plazo del mismo. Por ejemplo, si una empresa obtiene un préstamo de \$100 000, el cual requiere de un saldo compensatorio del 20 %, tendría que dejar \$20 000 en depósito y usar sólo \$80 000. Para pago de nómina, una empresa requiere \$230 000 y decide solicitar un préstamo para cubrir esta cantidad, la entidad que dará el préstamo solicita un saldo compensatorio del 15 %. ¿Cuál debe ser el monto que la empresa debe solicitar para poder cubrir el pago de la nómina? (3.0pt)

Solución.

Variables: Tomemos:

- m: monto que la empresa debe solicitar.

Planteamiento: La cantidad que la empresa va a recibir es

$$(1 - 0{,}15)m,$$

para cubrir el pago de nómina, se necesita que

$$(1 - 0{,}15)m = 230000.$$

Resolución: Resolvemos la ecuación. Despejando tenemos que

$$\begin{aligned}(1-0{,}15)m = 230000 \quad &\iff \quad 0{,}85m = 230000\\ &\iff \quad m = \frac{230000}{0{,}85} \approx 270588{,}23\end{aligned}$$

Respuesta: Deben solicitarse un monto de \$270 588,23, aproximadamente. □

3. Resolver la siguiente inecuación: (2.0pt)

$$\frac{3}{6-2x} \leq \frac{2x}{2+x}.$$

Solución. Para resolver la inecuación, primero debemos dejar todos los términos en un solo lado de la inecuación y luego separarla en factores:

$$\begin{aligned}\frac{3}{6-2x} \leq \frac{2x}{2+x} \quad &\iff \quad \frac{3}{6-2x} - \frac{2x}{2+x} \leq 0\\ &\iff \quad \frac{3(2+x)-2x(6-2x)}{(6-2x)(2+x)} \leq 0\\ &\iff \quad \frac{4x^2-9x+6}{(6-2x)(2+x)} \leq 0.\end{aligned}$$

Con esto, realizamos la tabla de factores:

	$]-\infty,-2[$	-2	$]-2,3[$	3	$]3,+\infty[$
$4x^2-9x+6$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2+x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$6-2x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
	$-$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	-

Como buscamos los menores o iguales que 0, tenemos que la solución es

$$S =]-\infty,-2[\cup]3,+\infty[.$$ □

4. Considere las funciones

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto 2-3x-x^2\end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} g:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \frac{2x}{x+2},\end{aligned}$$

determinar, para $x, h \in \mathbb{R}$ y $h \neq 0$,

a) $f(3)$ (0.3pt)

b) $g(-2)$ (0.3pt)

c) $f(1-x^2)$ (0.5pt)

d) $(f \circ g)(x)$ (0.7pt)

e) $(g \circ f)(x)$ (0.7pt)

f) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (1.0pt)

g) $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ (1.0pt)

Solución.

a) $f(3) = 2-3(3)-(3)^2 = -16$

b) $g(-2)$ no existe

c) $f(1-x^2) = 2-3(1-x^2)-(1-x^2)^2 = -x^4+5x^2-2$

d) $$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f\left(\frac{2x}{x+2}\right)\\ &= 2-3\left(\frac{2x}{x+2}\right)-\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2\\ &= \frac{-8x^2-4x+8}{(x+2)^2}\end{aligned}$$

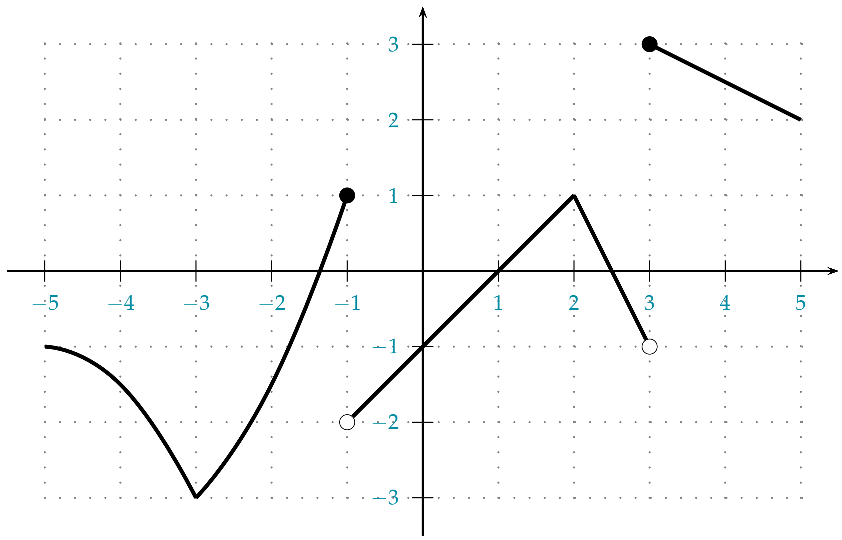
e) $$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g(2-3x-x^2)\\ &= \frac{2(2-3x-x^2)}{(2-3x-x^2)+2}\\ &= \frac{4-6x-2x^2)}{4-3x-x^2}\end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{2-3(x+h)-(x+h)^2-(2-3x-x^2)}{h}\\ &= \frac{-h^2-2xh-3h}{h}\\ &= -h-2x-3\end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \frac{\frac{2(x+h)}{(x+h)+2}-\frac{2x}{x+2}}{h}\\ &= \frac{\frac{2(x+h)(x+2)-2x(x+h+2)}{(x+h+2)(x+2)}}{h}\\ &= \frac{\frac{4h}{(x+h+2)(x+2)}}{h}\\ &= \frac{4}{(x+h+2)(x+2)}\end{aligned}$$

□

5. Considere la función $f\colon[-5,5]\to\mathbb{R}$ cuya gráfica se muestra a continuación.



a) Determine los intervalos donde es estrictamente creciente. (1.0pt)

b) Determine los intervalos donde es estrictamente decreciente. (1.0pt)

c) Determine el valor de $f(-1)$, $f(0)$ y $f(1)$. (0.5pt)

d) Determine $\mathrm{img}(f)$. (0.5pt)

Solución.

a) La función es estrictamente creciente en $[-3,-1]$ y $]-1,2]$.

b) La función es estrictamente decreciente en $[-5,-3]$, $[2,3[$ y $[3,5]$.

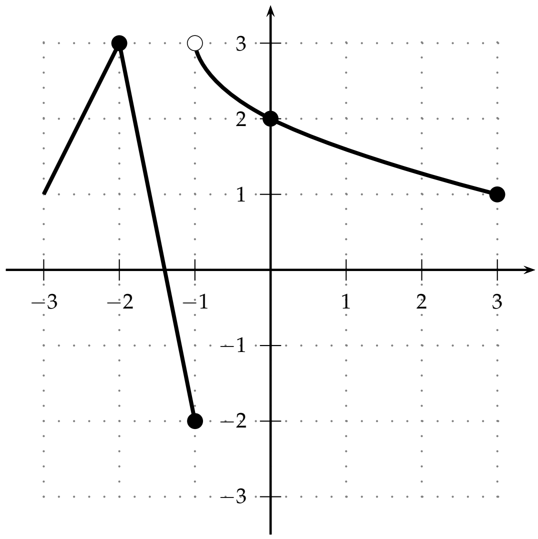
c) Tenemos que $f(-1)=1$, $f(0)=-1$ y $f(1)=0$.

d) Tenemos que $\mathrm{img}(f)=[-3,1]\cup[2,3]$. □

6. Dibuje una función $f\colon[-3,3]\to\mathbb{R}$ tal que

- $f(-2)=3$, $f(-1)=-2$, $f(0)=2$, $f(3)=1$; (0.8pt)
- sea estricta creciente en $[-3,-2]$; (0.4pt)
- sea estricta decreciente en $[-2,-1[$; (0.4pt)
- sea estricta decreciente en $[-1,3]$. (0.4pt)

Solución. Una posible respuesta es:



□

7. Una empresa fabrica dos productos: zapatos y zapatillas. Por la infraestructura, la empresa solo puede fabricar 100 productos en total. Por otro lado, la empresa tiene un gasto fijo semanal de \$1600, el costo de fabricar los zapatos es de \$40 el par y el de las zapatillas, \$50. Cada par de zapatos se vende en \$60 y el de zapatillas, \$75.

a) Modele la utilidad que obtiene la empresa en función de la cantidad de zapatos producidos. (2.0pt)

b) Si se producen 40 zapatos, ¿cuál es la utilidad de la empresa? (0.5pt)

c) Si se desea tener una utilidad semanal de \$300, ¿cuántos pares de zapatos y zapatillas deben producirse? (1.0pt)

Solución.

a) Para el modelamiento, consideremos lo siguiente:

Variables:

- x: cantidad de zapatos que la empresa produce.
- y: cantidad de zapatillas que la empresa produce.
- $U(x)$: utilidad que obtiene la empresa en función de la cantidad de zapatos producidos.

Planteamiento: Tenemos que el ingreso por zapatos y zapatillas es:

$$60x + 75y,$$

respectivamente; por otro lado, los gastos están dados por

$$1600 + 40x + 50y,$$

por lo tanto, la utilidad está dada por (recordando que solo se podrían fabricar un máximo de 100 zapatos):

$$\begin{aligned} U\colon [0,100] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 60x + 75y - (1600 + 40x + 50y) = 20x + 25y - 1600. \end{aligned}$$

Ahora, dado que solo se pueden producir 100 artículos, es necesario que

$$x + y = 100,$$

de donde

$$y = 100 - x,$$

con esto, la función U nos queda

$$\begin{aligned} U\colon [0,100] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 20x + 25(100 - x) - 1600 = 900 - 5x. \end{aligned}$$

b) Evaluemos la función en $x = 40$:

$$U(40) = 900 - 5(40) = 700.$$

Por lo tanto, la utilidad de la empresa si se producen 40 zapato es de \$700.

c) Buscamos x tal que $U(x) = 300$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} U(x) = 300 \quad &\Longleftrightarrow \quad 900 - 5x = 300 \\ &\Longleftrightarrow \quad 5x = -600 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = -120. \end{aligned}$$

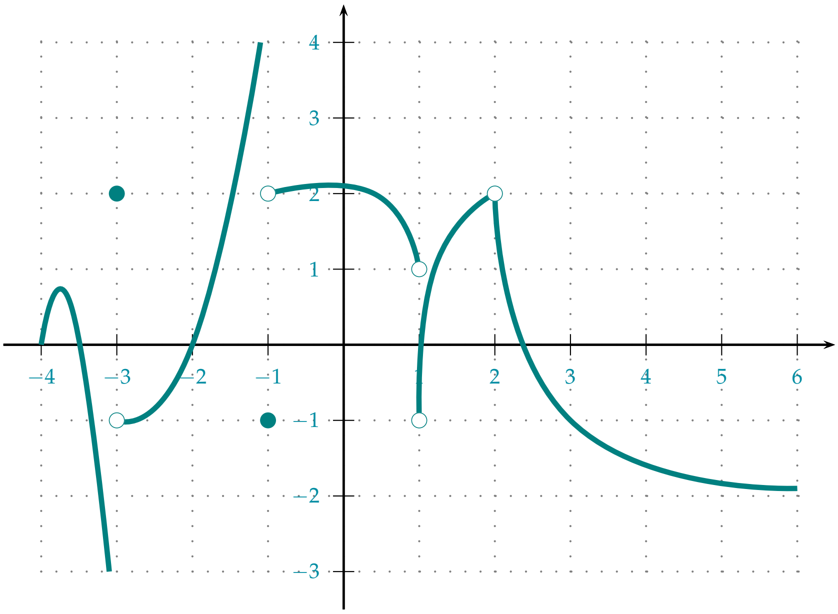
Pero x no está en el dominio de la función, por lo tanto, no existe una cantidad de zapatos y zapatillas que se pueda producir que generen una utilidad de \$300. □

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA

CÁLCULO DIFERENCIA E INTEGRAL • EXAMEN NO. 02

Semestre 2020-1 Andrés Merino

1. Considere la gráfica de la función $f\colon\ [-4,+\infty[\ \setminus \{1,2\} \to \mathbb{R}$, cuya gráfica se muestra a continuación:



Determine: (4.0pt)

a) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$
b) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$
c) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$
d) $f(-3)$
e) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$
f) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$
g) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$
h) $f(-2)$
i) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$
j) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$
k) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$
l) $f(-1)$
m) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$
n) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
ñ) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
o) $f(1)$
p) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
q) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$
r) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
s) $f(2)$

Además: (2.2pt)

t) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$
u) ¿f es continua en -3?
v) ¿f es continua en -2?
w) ¿f es continua en -1?
x) ¿f es continua en 1?
y) ¿f es continua en 2?

Solución. Tenemos que:

a) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$
b) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = -1$
c) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ no existe
d) $f(-3) = 2$
e) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 0$
f) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0$
g) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0$
h) $f(-2) = 0$
i) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$
j) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 2$
k) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ no existe
l) $f(-1) = -1$
m) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$
n) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1$
ñ) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe
o) $f(1)$ no existe
p) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2$
q) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2$
r) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$
s) $f(2)$ no existe

Además:

t) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -2$

u) f no es continua en -3 dado que el límite no existe.

v) f es continua en -2 dado que el límite coincide con el valor de la función.

w) f no es continua en -1 dado que el límite no existe.

x) f no es continua en 1 dado que el límite no existe, además, la función no está definida en ese punto.

y) f no es continua en 2 dado que la función no está definida en ese punto. □

2. Dibuje una función $f\colon \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$, que cumpla que (3.6pt)

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$

b) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -2$

c) $f(-2) = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no exista

e) $f(0) = 3$

f) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -4$

g) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1$

h) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -1$

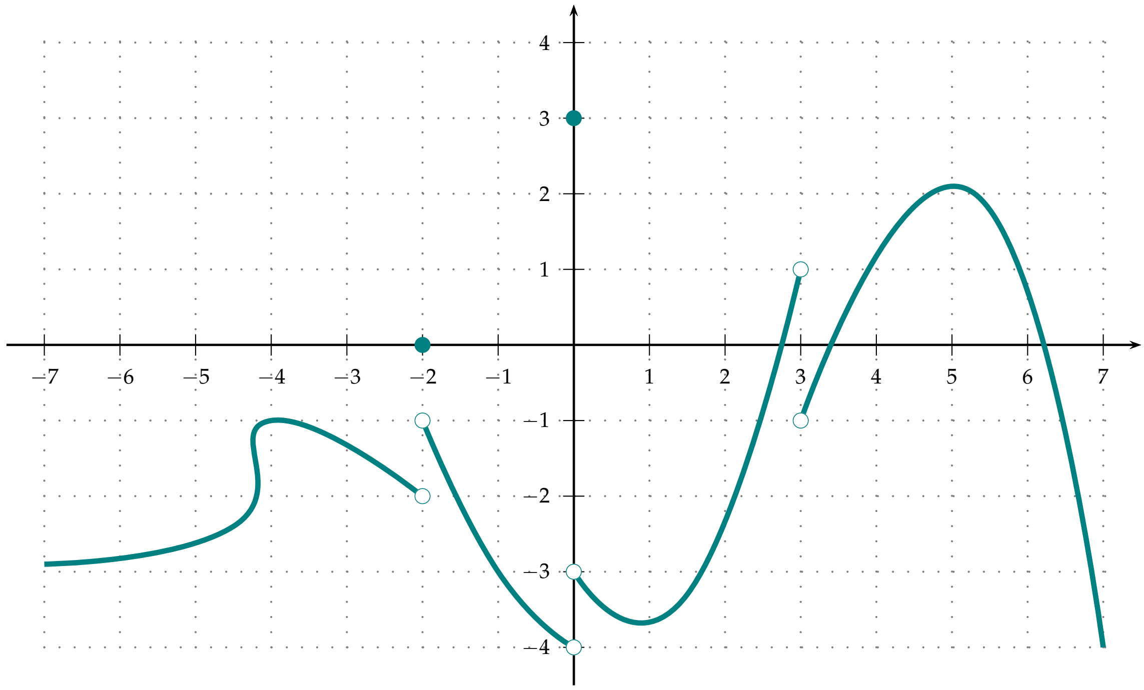
i) $f'(5) = 0$

j) f' sea positiva en $]3,5[$

k) f' sea negativa en $]-4,-2[$

l) $f(-4) = -1$

Solución. Una posible gráfica puede ser



□

3. Determine los siguientes límites: (4.0pt)

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^3-1}$

b) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+3x-10}{x+5}$

c) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x-5}{4x^2-2x+9}$

Solución.

a) Primero, determinemos el límite del denominador, tenemos que

$$\lim_{x\to 1}(x^3-1) = (1)^3 - (1) = 0,$$

como este límite es igual a 0, no podemos aplicar ninguna propiedad directamente. Para continuar con el análisis, calculemos el límite del numerador

$$\lim_{x\to 1}(x^4-1) = (1)^4 - 1 = 0,$$

como el límite del numerador también es 0, procedemos a realizar una manipulación algebraica, notemos que para todo $x \neq 1$, tenemos que

$$\frac{x^4-1}{x^3-1} = \frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}.$$

Con esto, tenemos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}.$$

Como tenemos nuevamente una fracción, calculamos el límite del denominador:

$$\lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3,$$

como este límite es diferente de 0, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^3-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1} \\ &= \frac{\lim\limits_{x\to 1} x^3+x^2+x+1}{\lim\limits_{x\to 1} x^2+x+1} \\ &= \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

b) Primero, determinemos el límite del denominador, tenemos que

$$\lim_{x\to -5}(x+5) = -5+5 = 0,$$

como este límite es igual a 0, no podemos aplicar ninguna propiedad directamente. Para continuar con el análisis, calculemos el límite del numerador:

$$\lim_{x\to -5}(x^2+3x-10) = (-5)^2+3(-5)-10 = 0,$$

como el límite del numerador también es 0, procedemos a realizar una manipulación algebraica, notemos que para todo $x \neq -5$, tenemos que

$$\frac{x^2+3x-10}{x+5} = \frac{(x+5)(x-2)}{(x+5)} = (x-2).$$

Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -5} \frac{x^2+3x-10}{x+5} &= \lim_{x\to -5}(x-2) \\ &= -5-2 = -7.\end{aligned}$$

c) Primero, determinemos el límite del denominador, tenemos que

$$\lim_{x\to -1^+}(x^2+2x+1) = (-1)^2+2(-1)+1 = 0,$$

como este límite es igual a 0, no podemos aplicar ninguna propiedad directamente. Para continuar con el análisis, calculemos el límite del numerador:

$$\lim_{x\to -1^+}(x^2+3x+2) = (-1)^2+3(-1)+2 = 0,$$

como el límite del numerador también es 0, procedemos a realizar una manipulación algebraica, notemos que para todo $x \neq -1$, tenemos que

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}.$$

Con esto, tenemos que

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x+2}{x+1}.$$

Como tenemos nuevamente una fracción, calculamos el límite del denominador:

$$\lim_{x\to -1^+} (x+1) = -1+1 = 0,$$

como este límite es igual a 0, no podemos aplicar ninguna propiedad directamente. Para continuar con el análisis, calculemos límite del numerador:

$$\lim_{x\to -1^+} (x+2) = (-1)+2 = 1.$$

Como el límite del numerador existe y es diferente de 0 y el del denominador es igual a 0, el límite podría ser infinito, para esto, analicemos los signos:

- Numerador: $\lim_{x\to -1^+} (x+2) = (-1)+2 = 1$, positivo.
- Denominador: $(x+1)$, cuando x se aproxima a -1, $x+1$ se acerca a 0, por otro lado, dado que x se acerca por derecha, tenemos que $x > -1$, de donde, $x+1 > 0$, por lo tanto es positivo, así, $x+1$ es positivo.

Con esto, tenemos que

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x+1} = +\infty.$$

d) Tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} \frac{2x-5}{4x^2-2x+9} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}(2x-5)}{\frac{1}{x^2}(4x^2-2x+9)} \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{4-\frac{2}{x}+\frac{9}{x^2}} \\ &= \frac{0-0}{4-0+0} = \frac{0}{4} = 0.\end{aligned}$$

□

4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Dada la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 2, \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si } 2 \le x < 3, \\ 2x - a + b & \text{si } x \ge 3 \end{cases}\end{aligned}$$

¿cuáles deben ser los valores de a y b para que los límites $\lim_{x\to 2} f(x)$ y $\lim_{x\to 3} f(x)$ existan? (3.0pt)

Solución. Calculemos, primero, los límites laterales en $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x+2) = (2)+2 = 4,$$

por otro lado,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (ax^2 - bx + 3) = a(2)^2 - b(2) + 3 = 4a - 2b + 3.$$

Para que el límite exista, estos límites deben ser iguales, por lo tanto, es necesario que $4 = 4a - 2b + 3$, es decir,

$$4a - 2b = 1. \tag{1}$$

Ahora, calculemos los límites laterales en $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (ax^2 - bx + 3) = a(3)^2 - b(3) + 3 = 9a - 3b + 3,$$

por otro lado,

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (2x-a+b) = 2(3)-a+b = 6-a+b.$$

Así, para que el límite exista, estos límites deben ser iguales, por lo tanto, es necesario que $9a-3b+3 = 6-a+b$, es decir,

$$10a-4b=3. \tag{2}$$

De donde, tomando las ecuaciones (1) y (2), tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4a-2b &= 1 \\ 10a-4b &= 3. \end{cases}$$

Así, el valor de a y b para que los límites $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ existan es $1/2$. □

5. Dada la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2+4x}{3-2x}, \end{aligned}$$

determine, utilizando la definición, $f'(x)$, para $x\in\mathbb{R}$. (2.0pt)

Solución. Tenemos que la razón de cambio promedio de la función es

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\dfrac{(x+h)^2+4(x+h)}{3-2(x+h)} - \dfrac{x^2+4x}{3-2x}}{h} \\ &= \frac{\dfrac{(3-2x)((x+h)^2+4(x+h))-(x^2+4x)(3-2(x+h))}{(3-2x)(3-2(x+h))}}{h} \\ &= \frac{3h^2+12h-2x^2h-2xh^2+6xh}{h(3-2x)(3-2(x+h))} \\ &= \frac{3h+12-2x^2-2xh+6x}{(3-2x)(3-2(x+h))} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h+12-2x^2-2xh+6x}{(3-2x)(3-2(x+h))} = \frac{-2x^2+6x+12}{(3-2x)^2} = -\frac{2x^2-6x-12}{(3-2x)^2}.$$

□

6. Determinar, paso a paso, (4.0pt)

a) $\left(\dfrac{e^x-1-x}{x^2}\right)'$

b) $(\operatorname{sen}(\cos(2x+1)))'$

c) $\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}\right)'$

d) $\left(2x^4(x^2+2x)\sqrt{x}\right)'$

Solución.

a) $$\left(\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)' = \frac{(e^x-1-x)'(x^2)-(e^x-1-x)(x^2)'}{(x^2)^2}$$
$$= \frac{(e^x-1)(x^2)-2x(e^x-1-x)}{x^4}$$
$$= \frac{x^2e^x-x^2-2xe^x+2x+2x^2}{x^4}$$
$$= \frac{x^2e^x-2xe^x+x^2+2x}{x^4}$$
$$= \frac{e^x(x-2)+x+2}{x^3}.$$

b) $$(\operatorname{sen}(\cos(2x+1)))' = \cos(\cos(2x+1))(\cos(2x+1))'$$
$$= \cos(\cos(x+1))(-\operatorname{sen}(2x+1))(2x+1)'$$
$$= -\cos(\cos(x+1))\operatorname{sen}(x+1)(2)$$
$$= -2\cos(\cos(x+1))\operatorname{sen}(x+1).$$

c) $$\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}\left(x+\sqrt{x+1}\right)'$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x+1)'\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right).$$

d) $$\left(2x^4(x^2+2x)\sqrt{x}\right)' = \left(2x^4(x^2+2x)\right)'\sqrt{x}+\left(2x^4(x^2+2x)\right)\left(\sqrt{x}\right)'$$
$$= \left((2x^4)'(x^2+2x)+(2x^4)(x^2+2x)'\right)\sqrt{x}+\left(2x^4(x^2+2x)\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \left(8x^3(x^2+2x)+2x^4(2x+2)\right)\sqrt{x}+\frac{x^4(x^2+2x)}{\sqrt{x}}$$
$$= \left(12x^5+20x^4\right)\sqrt{x}+x^{9/2}(x+2)$$
$$= 4x^4(3x+5)\sqrt{x}+x^{9/2}(x+2)$$
$$= x^{9/2}(13x+22).$$

□

7. Considere la función
$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{xe^x}{\cos(x)+2} \end{aligned}$$
Determine (utilizando un asistente computacional para el cálculo de la derivada) las aproximaciones lineal y cuadrática de f alrededor de 0, con estas, determinar valores aproximados de $f(0{,}1)$. (3.0pt)

Solución. Primero, determinemos las derivadas de la función: para $x \in \mathbb{R}$ se tiene que
$$f'(x) = \frac{e^x(2x+\operatorname{sen}(x)+(x+1)\cos(x)+2)}{(\cos(x)+2)^2},$$
y
$$f''(x) = \frac{(\cos(x)+2)^2(xe^x+2e^x)+xe^x((\cos(x)+2)\cos(x)+2\operatorname{sen}^2(x))+2(\cos(x)+2)(xe^x+e^x)\operatorname{sen}(x)}{(\cos(x)+2)^3}$$
evaluamos la función y las derivadas en el punto requerido:
$$f(0)=0, \qquad f'(0)=\frac{1}{3} \qquad \text{y} \qquad f''(0)=\frac{2}{3}.$$

Con esto, la aproximación lineal de f alrededor de 0 está definida por

$$\begin{aligned} F(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) \\ &= 0 + \frac{1}{3}(x) \\ &= \frac{1}{3}x. \end{aligned}$$

De esta manera, tenemos que

$$f(0{,}1) \approx F(0{,}1) = \frac{1}{3}(0{,}1) \approx 0{,}0333.$$

Por otra parte, la aproximación cuadrática de f alrededor de 0 está definida por

$$\begin{aligned} G(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2 \\ &= 0 + \frac{1}{3}(x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x)^2 \\ &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2. \end{aligned}$$

Con esto, tenemos que

$$f(0{,}1) \approx G(0{,}1) = \frac{1}{3}(0{,}1) + \frac{1}{3}(0{,}1)^2 \approx 0{,}0366. \qquad \square$$

1. Suponga que se tienen inversiones a interés simple en dos empresas: A y B. Inicialmente, el capital base invertido en A es \$120 000 y en B, \$150 000; por otro lado, el rendimiento de A es del 1,1 % mensual mientras que el de B es de 1,6 % mensual. Por una crisis, el rendimiento de B empieza a bajar a razón de 0,1 por mes, mientras que el de A aumenta a razón de 0,2 por mes. Para tratar de no caer en la crisis, empezamos a mover nuestro monto base invertido de la compañía B a la A a razón de \$5000 por mes. Determine si nuestro ingreso aumenta o disminuye y en qué razón lo hará, para esto, plantee el problema como un problema de razones de cambio relacionadas. (Recuerde que, en interés simple, los ingresos se calculan multiplicando el monto base por el tiempo y por el rendimiento).

2. Suponga que una empresa tiene una utilidad marginal de \$13,55 por unidad producida cuando se están produciendo 32 unidades de un artículo. Si se sabe que, a este nivel de producción, el costo por artículo es de \$100,05, el precio por artículo es de \$125,25 y este está disminuyendo a razón de \$2,05 por unidad producida; a este nivel de producción, ¿el costo por artículo está disminuyendo o aumentando?, ¿a qué razón lo hace?

3. La ecuación de la demanda de un artículo está dada por
$$p = \sqrt{250 - 2q + q^2},$$
donde q representa la cantidad de un producto y p su precio.

    a) Determine el precio al que se vende este artículo cuando se venden 150 unidades.

    b) Determine la elasticidad puntual de la demanda cuando se demandan 150 unidades.

    c) Si la demanda disminuye de 150 a 140, utilizando el literal anterior, estime el porcentaje de cambio en el precio por unidad.

4. Considere la función
$$\begin{aligned} h\colon [-2,3] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -(x+1)^3(5x^3 + x^2 - 48x + 36) \end{aligned}$$

    a) Determine los extremos globales de la función (si son máximo o mínimo, el lugar dónde los alcanzan y su valor).

    b) Determine los extremos locales de la función (si son máximos o mínimos, el lugar dónde los alcanzan y su valor).

5. Suponga que vende un artículo a \$175 la unidad, a este precio, puede vender 24 unidades de este artículo. Luego de realizar un estudio de elasticidad de la demanda, se concluye que por cada rebaja en el precio de \$2,5 aumentará sus ventas en 2 unidades. Determine el precio que generarán la mayor cantidad de ingresos.

6. Grafique una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumpla las siguientes condiciones:

	$]-\infty,-3[$	-3	$]-3,0[$	0	$]0,2[$	2	$]2,4[$	4	$]4,5[$	5	$]5,+\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$

Además, escribir una tabla, análoga a la realizada en el taller, que analice el comportamiento de la función.

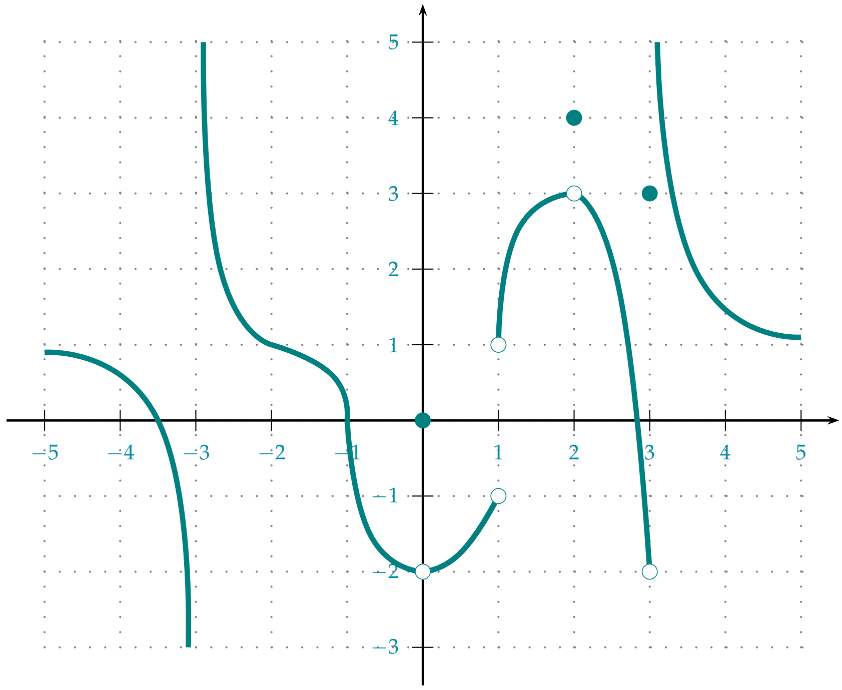
7. Grafique en un asistente computacional la siguiente función:

$$\begin{aligned} g\colon [-4,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -27x^6 - 90x^5 + 459x^4 + 1716x^3 - 837x^2 - 4698x - 619; \end{aligned}$$

además, determine los puntos en los cuales la primera y segunda derivada se anulan y realice una tabla de signos de sus derivadas (análoga a la del ejercicio anterior).

---

1. Considere la gráfica de la función $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-3,1\}\to\mathbb{R}$, cuya gráfica se muestra a continuación:



Determine: (4.0pt)

a) $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)$
b) $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)$
c) $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$
d) $f(-3)$
e) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$
f) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$
g) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$
h) $f(-2)$
i) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$
j) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$
k) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$
l) $f(0)$
m) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$
n) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$
ñ) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$
o) $f(1)$
p) $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$
q) $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$
r) $\lim\limits_{x\to3} f(x)$
s) $f(3)$

Además: (2.2pt)

t) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
u) ¿f es continua en -3?
v) ¿f es continua en -2?
w) ¿f es continua en -1?
x) ¿f es continua en 1?
y) ¿f es continua en 2?

Solución. Tenemos que:

a) $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)=-\infty$
b) $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)=+\infty$
c) $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$ no existe
d) $f(-3)$ no existe
e) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=1$
f) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=1$
g) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=1$
h) $f(-2)=1$
i) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-2$
j) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-2$
k) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-2$
l) $f(0)=0$
m) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-1$
n) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=1$
ñ) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ no existe
o) $f(1)$ no existe
p) $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=-2$
q) $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=+\infty$
r) $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ no existe
s) $f(3)=3$

Además:

t) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$
u) f no es continua en -3 dado que la función no está definida en ese punto y el límite no existe.

v) f si es continua en -2 dado que el límite existe y conincide con el valor de la función en ese punto.

w) f si es continua en -1 dado que el límite existe y coincide con el valor de la función en ese punto.

x) f no es continua en 1 dado que la función no está definida en ese punto y el límite no existe.

y) f no es continua en 2 dado que el límite no coincide con el valor de la función en ese punto. $\square$

2. Grafique una función $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ que cumpla las siguientes condiciones:

	$]-\infty,-5[$	-5	$]-5,-3[$	-3	$]-3,-1[$	-1	$]-1,0[$	0	$]0,1[$	1	$]1,+\infty[$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$		$+$

Además, que cumpla que (5.0pt)

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

b) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 3$

e) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 2$

f) $f(-5) = 0$

g) $f(-3) = -2$

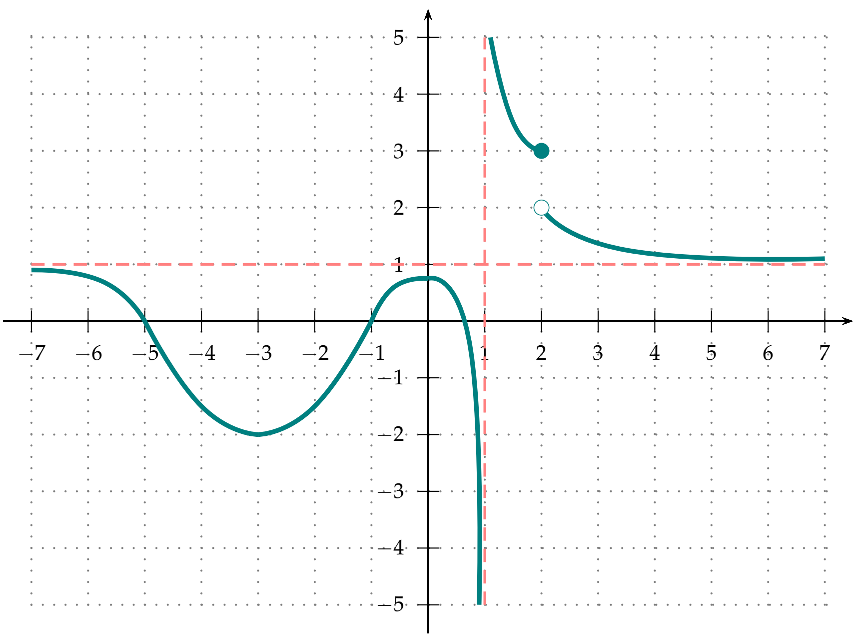
h) $f(0) = 0{,}75$

i) $f(2) = 3$

Solución. Con los datos, podemos hacer el siguiente análisis de la función:

x	Descripción	Gráfica
$]-\infty,-5[$	decreciente cóncava	
-5	punto de inflexión	
$]-5,-3[$	decreciente convexa	
-3	punto crítico y mínimo local	
$]-3,-1[$	creciente convexa	
-1	punto de inflexión	
$]-1,0[$	creciente cóncava	
0	punto crítico, mínimo local	
$]0,1[$	decreciente cóncava	
1		
$]1,+\infty[$	decreciente convexa	

Una posible gráfica para la función es:



$\square$

3. Determine, paso a paso, los siguientes límites (no utilizar la regla de l'Hôpital): (3.0pt)

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3+11x^2+3x-135}{x^3-4x^2+x+6}$ *b)* $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^3+2x^2-29x-30}{x^2+x-6}$

Solución.

a) Primero, determinemos el límite del denominador, tenemos que

$$\lim_{x\to 3}(x^3+11x^2+3x-135) = (3)^3+3(3)^2+3(11)-135 = 0,$$

como este límite es igual a 0, no podemos aplicar ninguna propiedad directamente. Para continuar con el análisis, calculemos el límite del numerador:

$$\lim_{x\to 3}(x^3-4x^2+x+6) = (3)^3-4(3)^2+(3)+6 = 0,$$

como el límite del numerador también es 0, procedamos a realizar una manipulación algebraica, notemos que para todo $x \neq 3$, tenemos que

$$\frac{x^3+11x^2+3x-135}{x^3-4x^2+x+6} = \frac{(x+5)(x+9)(x-3)}{(x-3)(x+1)(x-2)} = \frac{(x+5)(x+9)}{(x+1)(x-2)}.$$

Con esto, tenemos que

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3+11x^2+3x-135}{x^3-4x^2+x+6} = \lim_{x\to 3}\frac{(x+5)(x+9)}{(x+1)(x-2)}.$$

Como tenemos nuevamente una fracción, calculamos el límite del denominador:

$$\lim_{x\to 3}((x+1)(x-2)) = 4,$$

como este límite es diferente de 0, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{x^3+11x^2+3x-135}{x^3-4x^2+x+6} &= \lim_{x\to 3}\frac{(x+5)(x+9)}{(x+1)(x-2)}\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x+5)(x+9)}{\lim\limits_{x\to 3}(x+1)(x-2)}\\ &= 24.\end{aligned}$$

b) Primero, determinemos el límite del denominador, tenemos que

$$\lim_{x\to -2^-}(x^2+x-6) = (-2)^2+(-2)-6 = -4,$$

como este límite es distinto de 0, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2^-}\frac{x^3+2x^2-29x-30}{x^2+x-6} &= \frac{\lim\limits_{x\to -2^-}(x^3+2x^2-29x-30)}{\lim\limits_{x\to -2^-}(x^2+x-6)}\\ &= \frac{(-2)^3+2(-2)^2-29(-2)-30}{(-2)^2+(-2)-6}\\ &= -7.\end{aligned}$$

$\square$

4. Sean $b, c \in \mathbb{R}$. Dada la función

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} x^2 + 3b - c & \text{si } x < 1, \\ bx + 4c & \text{si } 1 \leq x < 6, \\ 3x - 2 & \text{si } 6 \leq x \end{cases}$$

¿cuáles deben ser los valores de b y c para que los límites $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ y $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$ existan? ¿cuáles son los valores de $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ y $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$? (3.0pt)

Solución. Calculemos, primero, los límites laterales en $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^-} (bx + 4c) = b(2) + 4c = 2b + 4c,$$

por otro lado,

$$\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} (bx + 4c) = b(2) + 4c = 2b + 4c.$$

Para que el límite exista, estos límites deben ser iguales, por lo tanto, es necesario que $2b + 4c = 2b + 4c$, es decir,

$$0 = 0; \tag{1}$$

como esta ecuación es verdad siempre, no existe una restricción. Ahora, calculemos los límites laterales en $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3^-} h(x) = \lim_{x\to 3} (bx + 4c) = b(3) + 4c = 3b + 4c,$$

por otro lado,

$$\lim_{x\to 3^+} h(x) = \lim_{x\to 3} (bx + 4c) = b(3) + 4c = 3b + 4c.$$

Así, para que el límite exista, estos límites deben ser iguales, por lo tanto, es necesario que $3b + 4c = 3b + 4c$, es decir,

$$0 = 0. \tag{2}$$

De donde, tomando las ecuaciones (1) y (2), se concluye que no hay restricción para los valores de b y c, es decir, los límites existen para todos los valores de b y c. Con esto, los límites son

$$\lim_{x\to 2} h(x) = 2b + 4c \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 3} h(x) = 3b + 4c.$$ □

5. Suponga que se dispone de \$10 000 para invertir durante 4 años. Existen dos planes de inversión:

- **Plan A:** capitalizaciones mensuales con taza de interés máximo del 7 % anual.
- **Plan B:** capitalizaciones trimestrales con taza de interés máximo del 6 % anual.

En ambos planes, la taza de interés varía dependiendo el monto que se deposite, esta se calcula dividiendo el monto para 10000 y multiplicando por la taza de interés máximo.

a) Modele el monto al final de la inversión en función del monto inicial depositado en el plan A (llamarlo m). Para esto, primero indique cuál sería la taza en cada plan en función de m, luego, cuál sería el monto final luego de los tres años, en cada plan, en función de m y, finalmente, presente la función. (4.0pt)

b) ¿Cuál es el monto final si inicialmente se divide la inversión en partes iguales? (1.0pt)

c) ¿Cómo se debe dividir las inversiones para tener el máximo monto al final de la inversión? ¿Cuál sería la peor forma de dividir la inversión? (2.0pt)

Solución.

a) Tomemos

- m: monto inicial depositado en el plan A.
- $P(m)$: monto total al final de la inversión en función del monto inicial depositado en el plan A.

Primero, calculemos la taza de interés correspondientes a cada plan. Para el plan A, sería,

$$\frac{m}{10000} \cdot 7\,\%$$

y para el plan B

$$\frac{10000 - m}{10000} \cdot 6\,\%$$

con esto, el monto final del plan A (teniendo en cuanta que en 4 años existen 48 meses) sería

$$m\left(1 + \frac{\frac{m}{10000}0{,}07}{12}\right)^{48} = m(1 + 5{,}8333 \times 10^{-7}m)^{48}$$

y el monto final del plan B (teniendo en cuanta que en 4 años existen 16 trimestres) sería

$$(10000 - m)\left(1 + \frac{\frac{(10000-m)}{10000}0{,}06}{4}\right)^{16} = (10000 - m)(1 + 1{,}5 \times 10^{-6}(10000 - m))^{16}.$$

Con esto, la función es

$$\begin{aligned} P\colon [0, 10000] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ m &\longmapsto m(1 + 5{,}8333 \times 10^{-7}m)^{48} + (10000 - m)(1 + 1{,}5 \times 10^{-6}(10000 - m))^{16}. \end{aligned}$$

b) Si dividimos la inversión en partes iguales, tendríamos que $m = 5000$, por lo tanto, debemos evaluar P en este valor:

$$P(5000) = 11385{,}2.$$

Por lo tanto, luego de 4 años, dividiendo la inversión inicial en partes iguales, el monto total será de \$11 385,2.

c) Determinemos la primera de P

$$\begin{aligned} P'(m) = &-\left(1 + 1{,}5 \times 10^{-6}(10000 - m)\right)^{16} - 0{,}000024\left(1 + 1{,}5 \times 10^{-6}(1000 - m)\right)^{15}(1000 - m) + \\ &(1 + 5{,}8333 \times 10^{-7}m)^{48} + 0{,}000028(1 + 5{,}83333 \times 10^{-7}m)^{47}m \end{aligned}$$

Busquemos los puntos críticos, para eso, igualemos la primera derivada a 0:

$$P'(m) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x \approx 4605{,}57.$$

Así, la función tiene un punto crítico en $m \approx 4605{,}57$. Con esto, para determinar los extremos globales de la función evaluamos la función en el punto crítico y en los extremos de definición de la función:

m	$P(m)$
0	12689,9
4605,57	11375,4
10000	13220,5

Así, tenemos que P alcanza un mínimo en $m \approx 4605{,}57$ y un máximo en 10 000. Por lo tanto, para tener el máximo monto al final de la inversión, se debe colocar inicialmente \$10 000 en el plan A y \$0 en el plan B. Por otro lado, la peor forma de dividir las inversiones es destinar \$4605,57 en el plan A y \$5394,43 en el plan B. □

6. Considere la función

$$\begin{aligned} f: [-5,3] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x. \end{aligned}$$

a) Realice la suma de Riemann de f con una partición regular de orden 4 y etiquetas derechas, además, realice un gráfico de lo que representa esta suma. (2.0pt)

b) Realice la suma de Riemann de f con una partición regular de orden n y etiquetas izquierdas, con esto, calcule la integral de la función. (1.5pt)

Solución.

a) Tomando una partición regular de orden 4, tenemos que

$$\Delta x = \frac{3-(-5)}{4} = \frac{8}{4} = 2 \qquad \text{y} \qquad x_k = 2k$$

con $k = 0, \ldots, n$. Además, como son etiquetas derechas, tenemos que

$$c_k = -5 + 2k$$

con $k = 1, \ldots, n$. Con esto, utilizando las etiquetas derechas, obtenemos que

$$S(f,P,C) = \sum_{k=1}^{4} f(c_k)\Delta x = \sum_{k=1}^{4} f(-5+2k)\, 2.$$

Así, utilizando Mathematica, tenemos que la partición es:

```
In[1]:= Table[ -5+2k , {k,0,4} ]
Out[1]= {-5,-3,-1,1,3}
```

Por otro lado, las etiquetas derechas son:

```
In[2]:= Table[ -5+2k, {k,1,4}]
Out[2]= {-3,-1,1,3}
```

Así, tenemos que

$$S(f,P,C) = \sum_{k=1}^{4} f(c_k)\Delta x.$$

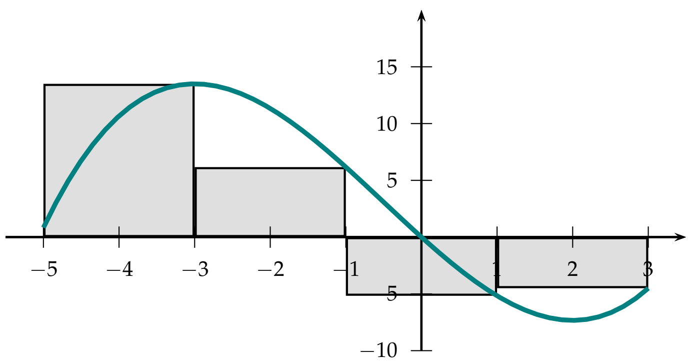
Utilizando Mathematica, con las etiquetas derechas, tenemos que:

```
In[3]:= f[x_]=x^3/3+x^2/2-6x;
        Sum[ f[-5+ 2k]* 2 , {k,1,4}] // N
Out[3]= 20
```

Por lo tanto,

$$S(f,P,C) = \sum_{k=1}^{4} f(c_k)\Delta x = 20.$$

Finalmente, la gráfica que representa esta suma es:



b) Tomando una partición regular de orden n, tenemos que

$$\Delta x = \frac{3-(-5)}{n} = \frac{8}{n} \qquad \text{y} \qquad x_k = \frac{8k}{n}$$

con $k = 0, \ldots, n$. Además, como son etiquetas izquierdas, tenemos que

$$c_k = -5 + \frac{8(k-1)}{n}$$

con $k = 1, \ldots, n$. con esto, utilizando etiquetas izquierdas, obtenemos que

$$S(f,P,C) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f\left(-5 + \frac{8(k-1)}{n}\right)\frac{8}{n}.$$

Utilizando Mathematica:

```
In[4]:= f[x_]=x^3/3+x^2/2-6x;
        Sum[ f[-5+ (8(k-1))/n]*8/n , {k,1,n} ]
```

$$\text{Out[4]=} \quad \frac{4\ (-32+16\ n+21\ n^2)}{3\ n^2}$$

Por lo tanto,

$$S(f,P,C) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x = \frac{4\left(21n^2+16n-32\right)}{3n^2}.$$

Con esto, dado que la función es continua, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{-5}^{3} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x\,dx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{4\left(21n^2+16n-32\right)}{3n^2} \\
&= 28.
\end{aligned}$$

Utilizando nuevamente Mathematica:

```
In[5]:= Limit[ (4 (-32+16 n+21 n^2))/(3 n^2) , n→ Infinity ]
Out[5]= 28
```

Por lo tanto,

$$\int_{-5}^{3} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x\,dx = 28.$$

□

7. Calcular, utilizando un sistema computacional para hallar una primitiva y el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, las siguientes integrales

$$\int_{-2}^{2} \frac{3}{x^4+2x^2+1}\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_{0}^{2} \frac{3}{x^4+2x^2+1}\,dx.$$

Además, comparar los resultados y, realizando un gráfico de la función integrada, interpretar la comparación mediante la interpretación gráfica de la integral. (3.0pt)

Solución. Utilizando Mathematica, tenemos que

```
In[6]:= Integrate[ 3/(x^4+2x^2+1) , x ]
```

$$\text{Out[6]=} \quad \frac{3}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}+\text{ArcTan}[x]\right)$$

por lo tanto,

$$\int \frac{3}{x^4+2x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \tan^{-1}(x)\right) + c$$

con $c \in \mathbb{R}$.

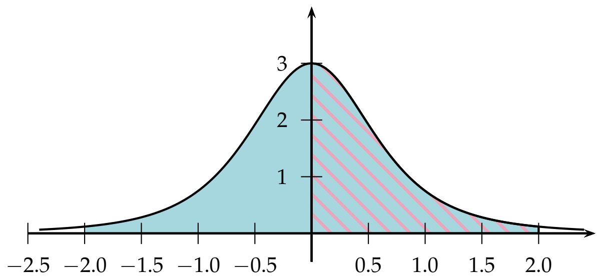
a) Por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} \frac{3}{x^4+2x^2+1}\,dx &= \frac{3}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\tan^{-1}(x)\right)\Big|_{-2}^{2}\\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{2}{(2)^2+1}+\tan^{-1}(2)\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{-2}{(-2)^2+1}+\tan^{-1}(-2)\right)\\ &= 3\left(\frac{2}{5}+\tan^{-1}(2)\right)\approx 4{,}5214.\end{aligned}$$

b) Por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2} \frac{3}{x^4+2x^2+1}\,dx &= \frac{3}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\tan^{-1}(x)\right)\Big|_{0}^{2}\\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{2}{(2)^2+1}+\tan^{-1}(2)\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{0}{(0)^2+1}+\tan^{-1}(0)\right)\\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}+\tan^{-1}(2)\right)\approx 2{,}2607.\end{aligned}$$

Finalmente, para comparar los resultados, consideremos la siguiente gráfica



donde la integral calculada en el literal *a*) representa el área azul y la integral calculada en el literal *b*) representa el área sombreada de color rosa; como el área azul es simétrica, entonces el área rosada representa, exactamente, la mitad de el área azul. □

8. Suponga que

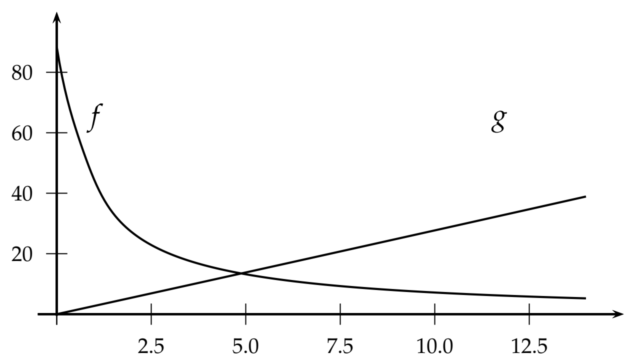
$$p=\frac{15\ln(200-q)}{q+1}+\frac{9}{q^4+1} \qquad \text{y} \qquad p=3q-\frac{\sqrt[3]{q}+25q}{q+100}$$

son las ecuaciones de la demanda y la oferta, respectivamente. Grafique las funciones de la oferta y la demanda, determine el punto de equilibrio, los excedentes de los consumidores y productores, y pinte en la gráfica de las funciones la representación de estos excedentes. (3.0pt)

Solución. Tomemos

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto \frac{15\ln(200-q2)}{q+1}+\frac{9}{q^4+1}\end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g:\mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto 3q-\frac{\sqrt[3]{q}+25q}{q+100},\end{aligned}$$

las funciones de la demanda y oferta, respectivamente, cuya gráfica es:



Para encontrar el punto de equilibro es necesario encontrar el punto en el que estas funciones son iguales; es decir, necesitamos encontrar q tal que

$$f(q) = g(q).$$

Utilizando Mathematica, tenemos que

```
In[7]:= f[q_]=(15*Log[200-q])/(q+1)+9/(q^4+1);
        g[q_]=3q-(q^(1/3)+25q)/(q+100);
        FindRoot[f[q]==g[q],{q,1}]

Out[7]= {q→4.88164}
```

Por lo tanto, el punto de equilibro está en $q \approx 4{,}88164$ con $f(q) = g(q) \approx 13{,}4651$. Por otra parte, el excedente de los consumidores y productores están dados por:

$$\int_0^{q_0} (g(q) - p_0)\, dq \qquad \text{y} \qquad \int_0^{q_0} (p_0 - f(q)),$$

respectivamente, donde $p_0 = 4{,}8816$ y $q_0 = 13{,}4651$. Así, el excedente de consumidores es igual a

$$\int_0^{13{,}4651} (g(q) - 4{,}8816)\, dq = \int_0^{13{,}4651} 3q - \frac{\sqrt[3]{q} + 25q}{q + 100} - 4{,}8816\, dq.$$

```
In[8]:= Integrate[g[q]-4.8816,{q,0,13.4651}]

Out[8]= 185.194
```

por lo tanto,

$$\int_0^{13{,}4651} (g(q) - 4{,}8816)\, dq = 185{,}194.$$

Así, el excedente de consumidores es igual a 185,194. Además, el excedente de productores es igual a

$$\int_0^{13{,}4651} (4{,}8816 - f(q))\, dq = \int_0^{13{,}4651} 4{,}8816 - \frac{15\ln(200 - q)}{q + 1} + \frac{9}{q^4 + 1}\, dq.$$

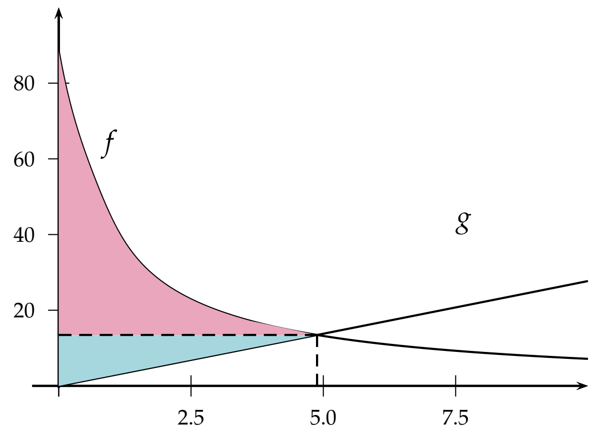
```
In[9]:= Integrate[4.8816-f[q],{q,0,13.4651}]

Out[9]= -155.775
```

por lo tanto,

$$\int_0^{13{,}4651} (4{,}8816 - f(q))\, dq = -155{,}775.$$

Así, el excedente de productores es igual a $-155{,}775$. Finalmente, la gráfica del excedente de consumidores y productores es:



donde el área rosada representa el excedente del consumidor y el área celeste representa el excedente del productor. □

9. Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la idea del Cálculo diferencial? (0.5pt)

b) ¿Cuál es la idea del Cálculo integral? (0.5pt)

c) ¿Qué resultado relaciona el Cálculo integral con el Cálculo diferencial? ¿por qué? (0.5pt)

d) ¿De qué manera intervienen el concepto de límites en el Cálculo diferencial y en el Cálculo integral? ¿es importante? (0.5pt)

e) ¿Cuál es la herramienta (no tecnológica) que le ha parecido más interesante del Cálculo diferencial o Cálculo integral? ¿por qué? (0.5pt)

f) ¿Qué opina de la herramienta Wolfram Mathematica? ¿ha sido de ayuda? (0.5pt)

Solución.

a) La idea del Cálculo diferencial es el estudio de la tendencia a variación de una función.

b) La idea del Cálculo integral es aproximar problemas mediante problemas más simples y unirlos para generar una Suma de Riemann.

c) Los Teoremas fundamentales del cálculo ya que estos nos indican que la integral y la derivación puede verse como operaciones opuestas.

d) Interviene en la definición de derivada e integral ya que la derivada es el límite de la razón de cambio promedio de una función y la integral es el límite de las sumas de Riemann.

e) Respuesta personal: la herramienta más interesante para mi es la aproximación lineal y cuadrática ya que ayuda a la simplificación de problemas.

□
