1. En un determinado sistema, una contraseña debe estar conformada por 6 o 7 caracteres que pueden ser letras, dígitos y caracteres especiales (existe una lista de 7 caracteres especiales válidos). Si se solicita al usuario que su contraseña tengan exactamente 2 dígitos y 1 carácter especial, ¿cuántas posibles contraseñas puede ingresar el usuario?

Solución. Tomemos los siguientes conjuntos:

a) C_6: contraseñas con 6 caracteres;
b) C_7: contraseñas con 7 caracteres.

Procedamos a calcular la cantidad de elementos de cada uno de ellos:

a) Para C_6, podemos hacer el siguiente proceso:
   1) Seleccionar los lugares donde irán los dos dígitos: como se tiene 6 posibilidades, tenemos que existen
   $$C(6,2) = \frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{6!}{4!2!} = 15$$
   formas de seleccionar los lugares.
   2) Seleccionar los dígitos: como en cada lugar puede ir cualquiera de los 10 dígitos, se tienen
   $$10 \cdot 10 = 100$$
   posibilidades.
   3) Seleccionar la casilla donde irán el carácter especial: Como se tiene 4 posibilidades restantes, tenemos que existen
   $$C(4,1) = \frac{4!}{(4-1)!1!} = \frac{4!}{3!} = 4$$
   formas de seleccionar el lugar.
   4) Seleccionar el carácter: Como existen 7 caracteres, tenemos
   $$7$$
   posibilidades.
   5) Finalmente, Seleccionar el resto de letras: Como restan 3 lugares para colocar letras, tenemos
   $$27 \cdot 27 \cdot 27 = 27^3$$
   posibilidades.

   Con esto y el principio de multiplicación, tenemos
   $$|C_6| = C(6,2) \cdot 10^2 \cdot C(4,1) \cdot 7 \cdot 27^3 = 826'686\,000.$$

b) Para C_7, por un procedimiento similar
   $$C_7 = C(7,2) \cdot 10^2 \cdot C(5,1) \cdot 7 \cdot 27^4 = 39\,060'913\,500.$$

Ahora, como la contraseña puede ser de 6 o 7 caracteres y $C_6 \cap C_7 = \varnothing$, por el principio de adición:
$$|C_6 \cup C_7| = |C_6| + |C_7| = 826'686\,000 + 39\,060'913\,500 = 39\,887'599\,500.$$

Es decir, el usuario puede ingresar $39\,887'599\,500$ contraseñas. □

2. El laboratorio del segundo parcial de la asignatura de Estructuras Discretas II tendrá 10 ejercicios y se lo realizará de forma grupal. El grupo conformado por Ada, Turing y Euler piensa distribuirse estos ejercicios para realizarlos en el menor tiempo posible.

   a) ¿De cuántas formas se pueden distribuir los ejercicios entre las tres personas suponiendo que cada persona realiza al menos un ejercicio?

   b) Considerando que Ada es la mejor programadora de la clase, el grupo tomará la siguiente estrategia: Ada se hará cargo de 4 ejercicios, Turing se hará cargo de 3, y Euler del resto. ¿De cuántas formas se puede hacer ahora la distribución de los ejercicios?

Solución.

a) Podemos ver el problema como repartir 10 objetos (ejercicios) en 3 grupos (estudiantes). Dado que cada estudiante debe realizar al menos un ejercicio, solo se deben repartir 7 ejercicios. Utilizando combinaciones generalizadas, tenemos

$$C(7+3-1, 3-1) = C(9,2) = \frac{9!}{(9-2)!2!} = 36$$

formas de distribuir los ejercicios.

b) Podemos considerar:

- 10 objetos (ejercicios);
- 3 tipos: 4 del primer tipo (los ejercicios de Ada),
- 3 del segundo tipo (los ejercicios de Turing) y
- 3 del tercer tipo (los ejercicios de Euler).

Con esto, utilizando permutaciones generalizadas, tenemos:

$$\frac{10!}{4!3!3!} = 4\,200$$

formas de distribuir los ejercicios. □

3. Se tiene un programa que imprime un número entero aleatorio entre 1 y 17. ¿Cuántas veces se debe correr el programa para garantizar que este imprime un mismo número 100 veces?

Solución. Agrupemos los resultados impresos por número; así, tenemos:

- N: número de veces que debe correr el programa;
- k: número de posibles resultados (17).

Por el principio del palomar generalizado

$$\left\lceil \frac{N}{17} \right\rceil = 100$$

de donde, como se busca el menor N, tenemos

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{N}{17} \right\rceil = 100 &\iff \frac{N-1}{17} 100 - 1 \\ &\iff N = 1684. \end{aligned}$$

Es decir, necesitamos correr el programa 1684 veces para garantizar que se imprima 100 veces el mismo número. □

4. Se considera el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Se desea determinar las dos permutaciones que prosiguen a 13287654. Para esto, utilice el algoritmo visto en clases y explique detalladamente los pasos realizados.

Solución. Para la primera permutación:

- Buscamos el primer incremento desde la derecha

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & \boxed{2} & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ \searrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow \end{array}$$

- En la cola, seleccionamos el primer elemento mayor que 2 desde la derecha:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & \boxed{2} & 8 & 7 & 6 & 5 & \boxed{4} \end{array}$$

- Intercambiamos los elementos

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & 4 & 8 & 7 & 6 & 5 & 2 \end{array}$$

- Escribimos la cola en el orden inverso

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

Así, la siguiente permutación es 13425678.

Para la segunda permutación:

- Buscamos el primer incremento desde la derecha

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 & \boxed{7} & 8 \\ \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \nearrow \end{array}$$

- En la cola, seleccionamos el primer elemento mayor que 2 desde la derecha:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 & \boxed{7} & \boxed{8} \end{array}$$

- Intercambiamos los elementos

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 & 8 & 7 \end{array}$$

- Escribimos la cola en el orden inverso

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 & 8 & 7 \end{array}$$

Así, la siguiente permutación es 13425687. □

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA
ESTRUCTURAS DISCRETAS II • EXAMEN NO. 02

Semestre 2022-1 Mat. Andrés Merino

1. Resolver la relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 2, \\ a_n &= 2a_{n-1} - 2a_{n-2}, \qquad n \geq 2. \end{aligned}$$

Determinar a_5 utilizando tanto la relación de recurrencia como la fórmula explícita encontrada. (2.0pt)

Solución. La ecuación polinomial que representa la relación es

$$t^2 = 2t - 2.$$

Resolviendo, las soluciones son

$$t = 1 + i \quad \vee \quad t = 1 - i.$$

Con esto, obtenemos que la solución es, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \alpha \cdot (1+i)^n + \beta \cdot (1-i)^n,$$

donde α y β son constantes a determinar. Para esto, utilizamos las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} 1 = a_0 &= \alpha \cdot (1+i)^0 + \beta \cdot (1-i)^0, \\ 2 = a_1 &= \alpha \cdot (1+i)^1 + \beta \cdot (1-i)^1. \end{aligned}$$

Así, tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ (1+i)\alpha + (1-i)\beta = 2. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos que

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}.$$

Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) \cdot (1+i)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) \cdot (1-i)^n.$$

Así, el término buscado es

$$a_5 = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) \cdot (1+i)^5 + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) \cdot (1-i)^5 = -8.$$

□

2. Considere la siguiente función:

```
def f(n):
    x = 1
    if n==0:
        x = x + 1
        return x
    elif n==1:
        x = (x + 2)*3
        x = x * 2
        return x
    else:
        a = f(n-2)
        b = f(n-2)
        c = f(n-2)
        return f(n-2)
```

Realice el análisis de la complejidad computacional de la función, obteniendo una expresión explícita, e indique su orden. Contabilice únicamente las operaciones (no las comparaciones ni asignaciones) e ignore las operaciones de resta en las líneas 11 a 14. (2.0pt)

Solución. consideremos $t(n)$ el número de operaciones que ejecuta la función cuando $n \in \mathbb{N}$ es el argumento. Tenemos lo siguiente:

- si $n = 0$, solo se genera la operación de la linea 4, por lo tanto
$$t(0) = 1.$$
- si $n = 1$, se ejecutan únicamente las lineas $7, 8$ y 9, por lo tanto
$$t(1) = 3.$$
- si $n \geq 2$, se ejecutan las lineas 11 a 14, en la linea 11 se ejecutan $t(n-2)$ operaciones , igual en las otras 3 lineas, por lo tanto
$$t(n) = 4t(n-2).$$

Así, obtenemos la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{aligned}
t(0) &= 1, \\
t(1) &= 3, \\
t(n) &= 4t(n-2), \qquad n \geq 2.
\end{aligned}$$

Notando $t(n) = a_n$, tenemos

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_1 &= 3, \\
a_n &= 4a_{n-2}, \qquad n \geq 2.
\end{aligned}$$

El polinomio que representa la relación es

$$t^2 = 4.$$

Resolviendo, las soluciones son

$$t = -2 \quad \vee \quad t = 2.$$

Con esto, obtenemos que la solución es, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \alpha \cdot (-2)^n + \beta \cdot 2^n,$$

donde α y β son constantes a determinar. Para esto, utilizamos las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
1 = a_0 &= \alpha \cdot (-2)^0 + \beta \cdot 2^0, \\
3 = a_1 &= \alpha \cdot (-2)^1 + \beta \cdot 2^1.
\end{aligned}$$

así, tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ -2\alpha + 2\beta = 3. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos que $\alpha = -\frac{1}{4}$ y $\beta = \frac{5}{4}$. Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$t(n) = a_n = -\frac{1}{4} \cdot (-2)^n + \frac{5}{4} \cdot 2^n.$$

Así, tenemos que la función tiene orden exponencial. $\square$

3. Suponiendo que a y b son números naturales impares menores que 6 y c es un número natural par menor o igual que 6, determine el número de soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $a + b + c = 8$

b) $a + b + c = 9$

c) $a + b + c = 10$

d) $a + b + c < 10$

Para esto, utilice funciones generadoras. (2.0pt)

Solución. Notemos que las funciones generatrices para cada variable son:

- Para a: $x^1 + x^3 + x^5$
- Para b: $x^1 + x^3 + x^5$
- Para c: $x^0 + x^2 + x^4 + x^6$

Entonces, la función generatriz para la suma es

$$(x^1 + x^3 + x^5)(x^1 + x^3 + x^5)(x^0 + x^2 + x^4 + x^6)$$

que es igual a

$$x^2 + 3x^4 + 6x^6 + 8x^8 + 8x^{10} + 6x^{12} + 3x^{14} + x^{16},$$

con esto, tenemos las siguientes conclusiones:

a) El número de formas para que la suma sea 8 es el coeficiente de x^8, es decir, hay 8 soluciones de la ecuación.

b) El número de formas para que la suma sea 9 es el coeficiente de x^9, es decir, no hay soluciones para la ecuación.

c) El número de formas para que la suma sea 10 es el coeficiente de x^{10}, es decir, hay 8 soluciones de la ecuación.

d) El número de formas para que la suma sea menor que 10 es la suma de los números de formas en los que se obtiene un valor mejor que 10, es decir, hay 18 soluciones para la inecuación. □

4. Se da la oportunidad a los estudiantes de Estructuras Discretas II para participar en un juego contra el docente en el que se apostará un cierto puntaje de la nota correspondiente al segundo parcial. El juego es el siguiente: se lanza un dado de 8 caras, si cae en una cara par, el estudiante pierde 3 puntos; en caso de que sea un número impar, el estudiante gana el número de puntos marcado. Calcule el valor esperado de este juego, basado en este resultado, ¿participaría en el juego? (2.0pt)

Solución. Tomemos

- Espacio muestral es
$$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 8\}.$$
- La función de probabilidad es, para $n \in \{1, \ldots, 8\}$,
$$P(\{n\}) = \frac{1}{8}.$$
- La variable aleatoria es, para $n \in \{1, \ldots, 8\}$,
$$X(n) = \begin{cases} -3 & \text{si } n \text{ es par,} \\ n & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Con esto, el valor esperado es

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{n\in\Omega} P(\{n\}) \cdot X(n) \\
&= P(\{1\}) \cdot X(1) + P(\{2\}) \cdot X(2) + \cdots + P(\{8\}) \cdot X(8) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{8} + 5 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{8} + 7 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Dado que el valor esperado es positivo, sí participaría en el juego. □

5. Basado en el enunciado anterior, y en un giro inesperado de eventos, descubre que el dado que trajo el docente para el juego está «trucado» de tal forma que las caras pares tienen el doble de probabilidad de salir que las caras impares. Basado en esta nueva información, calcule el valor esperado de este juego, basado en el resultado, ¿participaría ahora en el juego? (2.0pt)

Solución. Tomemos

- Espacio muestral

$$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 8\}.$$

- La función de probabilidad

$$P(\{n\}) = \begin{cases} \frac{2}{12} & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{1}{12} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

- La variable aleatoria es, para $n \in \{1, \ldots, 8\}$,

$$X(n) = \begin{cases} -3 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ n & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Con esto, el valor esperado es

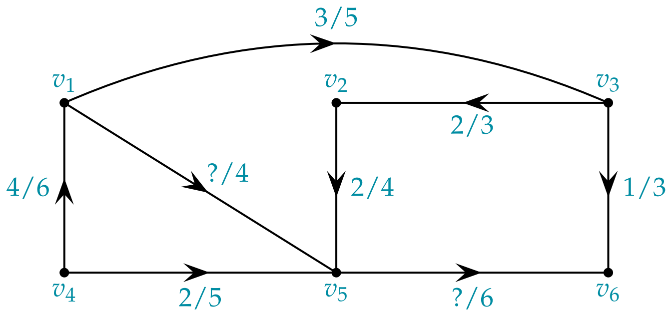
$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{n\in\Omega} P(\{n\}) \cdot X(n) \\
&= P(\{1\}) \cdot X(1) + P(\{2\}) \cdot X(2) + \cdots + P(\{8\}) \cdot X(8) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{12} - 3 \cdot \frac{2}{12} + 3 \cdot \frac{1}{12} - 3 \cdot \frac{2}{12} + 5 \cdot \frac{1}{12} - 3 \cdot \frac{2}{12} + 7 \cdot \frac{1}{12} - 3 \cdot \frac{2}{12} \\
&= -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Dado que el valor esperado es negativo, no participaría en el juego. □

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA
ESTRUCTURAS DISCRETAS II • EXAMEN NO. 03

Semestre 2022-1 | Mat. Andrés Merino

1. Considere la siguiente red de transporte con un flujo dado. Como se puede observar, por problemas de procesado de datos, se ha perdido la información del flujo por algunas aristas.



Realice las siguientes actividades:

a) Determine los valores adecuados para completar el flujo (indiqué detenidamente cómo determinó los valores). (1.0pt)

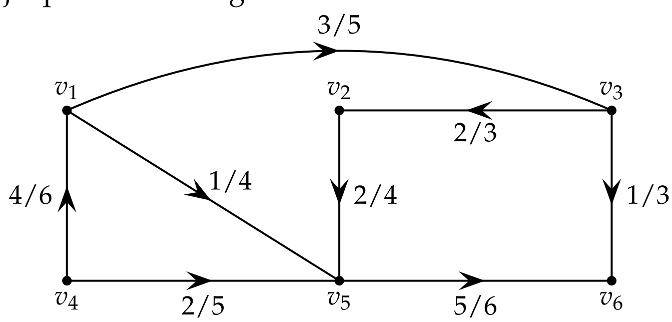
b) Considere el camino $v_4v_1v_5v_2v_3v_6$, ¿cuánto flujo se puede aumentar por este camino?, de ser posible, calcule cómo aumentaría el flujo (dibuje el camino aparte e indique detenidamente los pasos realizados). (1.5pt)

Solución.

a) Analicemos el flujo en v_1, tenemos que ingresan 4 unidades, pero salen solo 3, por lo tanto, debe salir una unidad más en dirección a v_5.

Ahora, analicemos en v_5, tenemos que ingresan 5 unidades, por lo tanto, deben salir 5 unidades igualmente.

Con esto, la red y el flujo quedan de la siguiente manera:



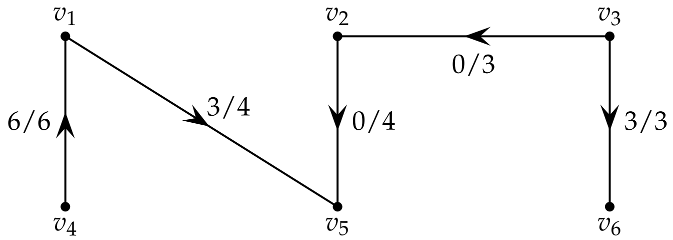
b) En el camino tenemos las siguientes aristas:

- con orientación adecuada (v_4, v_1), (v_1, v_5), (v_3, v_6).
- con orientación no adecuada (v_2, v_5), (v_3, v_2).

Con esto, el flujo que puede aumentar es

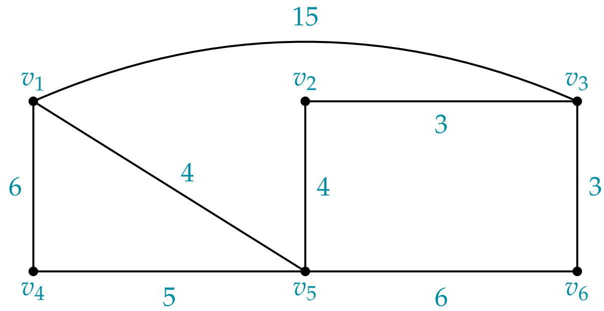
- (v_4, v_1): $6 - 4 = 2$,
- (v_1, v_5): $4 - 1 = 3$,
- (v_3, v_6): $3 - 1 = 2$,
- (v_2, v_5): 2,
- (v_3, v_2): 2.

Tomando el mínimo de estos valores, tengo que el valor del flujo puede aumentar en 2 unidades, quedando así:



□

2. Considere el siguiente grafo ponderado:



Realice las siguientes actividades:

a) Utilice el algoritmo de Dijkstra (indicando el paso a paso) para determinar la distancia entre v_1 y v_6. (2.0pt)

b) Al terminar el algoritmo, ¿qué otras distancias quedan ya determinadas con certeza? (0.5pt)

Solución.

a) En las líneas de la 1 a la 5, se tiene

$$T = (0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty),$$
$$L = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}.$$

Entramos al ciclo *while* de la línea 8 ($v_6 \in T$):

- Paso 1: Tomo $v = v_1$ (línea 9 y línea 10):
$$T = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$
con esto (líneas 11 y 12):
$$L = \{0, \infty, 15, 6, 4, \infty\}.$$
Como $v_6 \in T$, repito el ciclo.
- Paso 2: Tomo $v = v_5$ (línea 9 y línea 10):
$$T = \{v_2, v_3, v_4, v_6\},$$
con esto (líneas 11 y 12):
$$L = (0, 8, 15, 6, 4, 10).$$
Como $v_6 \in T$, repito el ciclo.
- Paso 3: Tomo $v = v_4$ (línea 9 y línea 10):
$$T = \{v_2, v_3, v_6\},$$
con esto (líneas 11 y 12):
$$L = (0, 8, 15, 6, 4, 10).$$
Como $v_6 \in T$, repito el ciclo.

- Paso 4: Tomo $v = v_2$ (línea 9 y línea 10):

$$T = \{v_3, v_6\},$$

con esto (líneas 11 y 12):

$$L = (0, 8, 11, 6, 4, 10).$$

Como $v_6 \in T$, repito el ciclo.

- Paso 5: Tomo $v = v_6$ (línea 9 y línea 10):

$$T = \{v_3\},$$

con esto (líneas 11 y 12):

$$L = (0, 8, 11, 6, 4, 10).$$

Como $v_6 \notin T$, termino el ciclo.

Con esto, tenemos que la distancia de v_1 a v_6 es 10.

b) Como $T = \{v_3\}$, se tiene con certeza las distancias de v_1 a v_1, v_2, v_4, v_5, v_6; es decir, a todas menos a v_3. □

3. Considere el grafo del ejercicio anterior (no tome en cuenta los pesos), realice las siguientes actividades:

   a) Utilice el algoritmo BFS (tal como se vio en clase) para determinar un árbol de expansión con raíz en v_6 (indique detenidamente el paso a paso, tome siempre los vértices en orden del subíndice). (2.0pt)

   b) Dibuje el árbol de expansión que se obtiene. (0.5pt)

Solución.

a) El paso inicial (línea 2 y 3) tenemos:

$$Q = (v_6), \qquad M = \{v_6\} \qquad \text{y} \qquad T = \varnothing.$$

Para el ciclo «mientras $Q \neq ()$» (línea 4):

- **Paso 1.** Tomamos (línea 5 y 6):

$$u = v_6, \qquad Q = ().$$

Ahora, iteramos w sobre $G[u] = \{v_3, v_5\}$ (línea 7):

  - Para $w = v_3$, como $v_3 \notin M$ (línea 8), ejecutamos las líneas 9 y 10, con lo que obtenemos

$$Q = (v_3), \qquad M = \{v_6, v_3\} \qquad \text{y} \qquad T = \{(v_3, v_6)\}.$$

  - Para $w = v_5$, como $v_5 \notin M$ (línea 8), ejecutamos las líneas 9 y 10, con lo que obtenemos

$$Q = (v_5, v_3), \qquad M = \{v_6, v_3, v_5\} \qquad \text{y} \qquad T = \{(v_3, v_6), (v_5, v_6)\}.$$

Como $Q \neq ()$, repito el ciclo.

- **Paso 2.** Tomamos (línea 5 y 6):

$$u = v_3, \qquad Q = (v_5).$$

Ahora, iteramos w sobre $G[u] = \{v_1, v_2\}$ (línea 7):

  - Para $w = v_1$, como $v_1 \notin M$ (línea 8), ejecutamos las líneas 9 y 10, con lo que obtenemos

$$Q = (v_1, v_5), \qquad M = \{v_6, v_3, v_5\} \qquad \text{y}$$

$$T = \{(v_3, v_6), (v_5, v_6), (v_1, v_3)\}.$$

– Para $w = v_2$, como $v_2 \notin M$ (línea 8), ejecutamos las líneas 9 y 10, con lo que obtenemos

$$Q = (v_2, v_1, v_5), \qquad M = \{v_6, v_3, v_5, v_2\} \qquad \text{y}$$

$$T = \{(v_3, v_6), (v_5, v_6), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\}.$$

Como $Q \neq ()$, repito el ciclo.

- **Paso 3.** Tomamos (línea 5 y 6):

$$u = v_5, \qquad Q = (v_2, v_1).$$

Ahora, iteramos w sobre $G[u] = \{v_2, v_4\}$ (línea 7):

– Para $w = v_2$, como $v_2 \in M$ (línea 8), no ejecutamos las líneas 9 y 10.

– Para $w = v_4$, como $v_4 \notin M$ (línea 8), ejecutamos las líneas 9 y 10, con lo que obtenemos

$$Q = (v_4, v_2, v_1), \qquad M = \{v_6, v_3, v_5, v_2, v_4\} \qquad \text{y}$$

$$T = \{(v_3, v_6), (v_5, v_6), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_4, v_5)\}.$$

Como $Q \neq ()$, repito el ciclo.

- **Paso 4.** Tomamos (línea 5 y 6):

$$u = v_1, \qquad Q = (v_4, v_2).$$

Ahora, iteramos w sobre $G[u] = \{v_3, v_4, v_5\}$ (línea 7):

– Para $w = v_3$, como $v_3 \in M$ (línea 8), no ejecutamos las líneas 9 y 10.

– Para $w = v_4$, como $v_4 \in M$ (línea 8), no ejecutamos las líneas 9 y 10.

– Para $w = v_5$, como $v_5 \in M$ (línea 8), no ejecutamos las líneas 9 y 10.

Como $Q \neq ()$, repito el ciclo.

- **Paso 5.** Tomamos (línea 5 y 6):

$$u = v_2, \qquad Q = (v_4).$$

Ahora, iteramos w sobre $G[u] = \{v_3, v_5\}$ (línea 7):

– Para $w = v_3$, como $v_3 \in M$ (línea 8), no ejecutamos las líneas 9 y 10.

– Para $w = v_5$, como $v_5 \in M$ (línea 8), no ejecutamos las líneas 9 y 10.

Como $Q \neq ()$, repito el ciclo.

- **Paso 6.** Tomamos (línea 5 y 6):

$$u = v_4, \qquad Q = \varnothing.$$

Ahora, iteramos w sobre $G[u] = \{v_1, v_5\}$ (línea 7):

– Para $w = v_1$, como $v_1 \in M$ (línea 8), no ejecutamos las líneas 9 y 10.

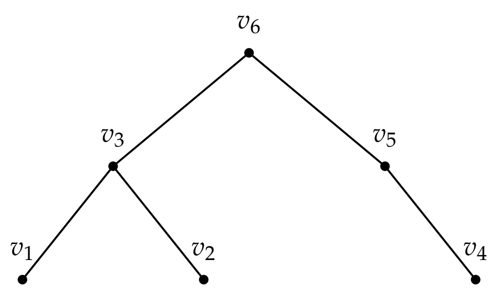
– Para $w = v_5$, como $v_5 \in M$ (línea 8), no ejecutamos las líneas 9 y 10.

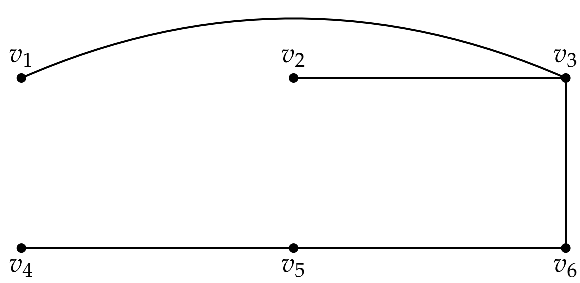
Como $Q = ()$, salgo del ciclo.

Con esto, termina el algoritmo. $\square$

b) El árbol es

$$T = \{(v_3, v_6), (v_5, v_6), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_4, v_5)\}.$$





4. Seleccione la respuesta correcta:

4.1 En un grafo ponderado, su matriz de distancias es simétrica (0.5pt)

a) siempre.

b) no siempre, solo a veces.

4.2 El algoritmo de Dijkstra, en el peor de los casos, es de orden (0.5pt)

a) $O(n)$.

b) $O(n^2)$.

c) $O(n^3)$.

4.3 En un mismo grafo, los algoritmos DFS y BFS generan árboles diferentes (0.5pt)

a) siempre.

b) no siempre, solo a veces.

4.4 ¿A qué vértices se les dice fuente? ¿A qué vértices se les llama sumidero? (0.5pt)

4.5 ¿Cuál es la definición de árbol? (0.5pt)

Solución.

a) La opción correcta es a.

b) La opción correcta es b.

c) La opción correcta es b.

d) Dados un grafo dirigido $G = (V, A)$ y $v \in V$, si $\mathrm{grad}_{\mathrm{s}}(v) = 0$, se dice que v es un sumidero, y si $\mathrm{grad}_{\mathrm{e}}(v) = 0$, se dice que v es una fuente.

e) Un árbol es un grafo conexo sin ciclos. $\square$

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA
ESTRUCTURAS DISCRETAS II • EXAMEN FINAL

Semestre 2022-1 — Mat. Andrés Merino

1. Se tiene un programa que imprime una letra del idioma español (27 letras). ¿Cuántas veces se debe correr el programa para garantizar que este imprime una misma letra 40 veces? (2.5pt)

2. Considere la siguiente función:

```
1  def f(n):
2      x = 1
3      if n==0:
4          return x
5      elif n==1:
6          x = (x - 2)*x
7          x = x * 3
8          return x
9      else:
10         a = f(n-1)
11         b = f(n-1)
12         c = f(n-2)
13         return f(n-2)
```

   ¿Cuál es el resultado de $f(3)$? Por otro lado, realice el análisis de la complejidad computacional de la función, obteniendo una expresión explícita, e indique su orden. Contabilice únicamente las operaciones (no las comparaciones ni asignaciones) e ignore las operaciones de resta en las líneas 10 a 13. (2.5pt)

3. De cuántas formas se pueden formar \$1.00 si se tienen dos monedas de \$0.05, cinco de \$0.10 y cuatro de \$0.25. Utilice funciones generadoras para resolver el problema. (2.5pt)

4. Un casino te contrata para generar un programa que controle una máquina para el siguiente juego: Se genera un número aleatorio entre 1 y 10, si el número es par, el jugador gana \$1, pero si el número sale impar, el jugador pierde \$1. Como el casino siempre quiere ganar, pero no quiere ser tan obvio, te pide que «truques» la máquina con la siguiente directiva: los números primos deben ser el doble de probables que los no primos.

Utilizando el concepto de valor esperado, ¿cuánto ganará en promedio el casino? (2.5pt)