INDICACIONES

- Para la resolución de ecuaciones o para la simplificación algebraica, puede utilizar cualquier asistente computacional, pero debe incluir una captura de pantalla de la operación realizada.
- Cada resolución debe estar correctamente redactada, explicada y justificada para obtener el puntaje completo. En caso de obtener una respuesta correcta pero no presentar justificaciones, la puntuación máxima asignada será del 25 % del puntaje.
- Se recomienda, donde sea necesario, aplicar la metodología de solución vista en clases: Variables, Planteamiento, Resolución y Respuesta.

EJERCICIOS

1. Resolver, justificando cada paso, la siguiente ecuación:

$$-x^3(x-5)(3+x) = 24 + 34x + 3x^4 - 5x^2.$$

Luego, utilizar un asistente computacional para comprobar su respuesta. (2.5pt)

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}
&-x^3(x-5)(3+x) = 24+34x+3x^4-5x^2 \implies && \\
&\implies -x^3(x^2-2x-15) = 24+34x+3x^4-5x^2 && \text{Manipulación algebraica}\\
&\implies -x^5+2x^4+15x^3 = 24+34x+3x^4-5x^2 && \text{Proposición 5a y 5c}\\
&\implies -5x^5-x^4+15x^3+5x^2-34x-24=0 && \text{Manipulación algebraica}\\
&\implies -(x-3)(x-2)(x+1)^2(x+4)=0. && \text{Factorización}\\
&\implies -(x-3)=0 \quad\vee\quad (x-2)=0 \quad\vee\quad (x+1)^2=0 \quad\vee\quad (x+4)=0 && \text{Proposición 5m}\\
&\implies x=3 \quad\vee\quad x=2 \quad\vee\quad x=-1 \quad\vee\quad x=-4 &&
\end{aligned}$$

Así, las soluciones de la ecuación propuesta son: $x=-4$, $x=-1$, $x=2$ y $x=3$. Usando Geogebra

```
ResoluciónC(−x^3(x−5)(3+x)=24+34x+3x^4−5x^2)
```
$\to \{x=-4, x=-1, x=2, x=3\}$

□

2. Se desea construir una rampa cuya pendiente sea del 25 % y cuya longitud sea 10 metros, determine la altura a la que llegará la rampa y la distancia horizontal que alcanzará. (1.5pt)

Solución.

Variables: Tomamos:

- A: el punto inicial de la rampa;
- B: el punto final de la rampa;
- x: la primera componente del punto B;
- y: la segunda componente del punto B.

Si ubicamos el inicio de la rampa en el origen de coordenadas, tenemos que,

$$A=(0,0) \qquad \text{y} \qquad B=(x,y).$$

Planteamiento: Para que el valor de la pendiente sea 20 %, aplicamos la fórmula de la pendiente entre dos puntos y tenemos

$$\frac{25}{100} = m_{A,B} = \frac{0-y}{0-x}. \tag{1}$$

Para que la longitud de la rampa sea 10 metros, utilizamos la fórmula de la distancia entre dos puntos y tenemos

$$10 = d(A,B) = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{2}$$

Resolución: De (1) tenemos que

$$x = 4y,$$

reemplazando en (2), obtenemos que

$$\sqrt{(4y)^2+y^2} = 10,$$

notemos que

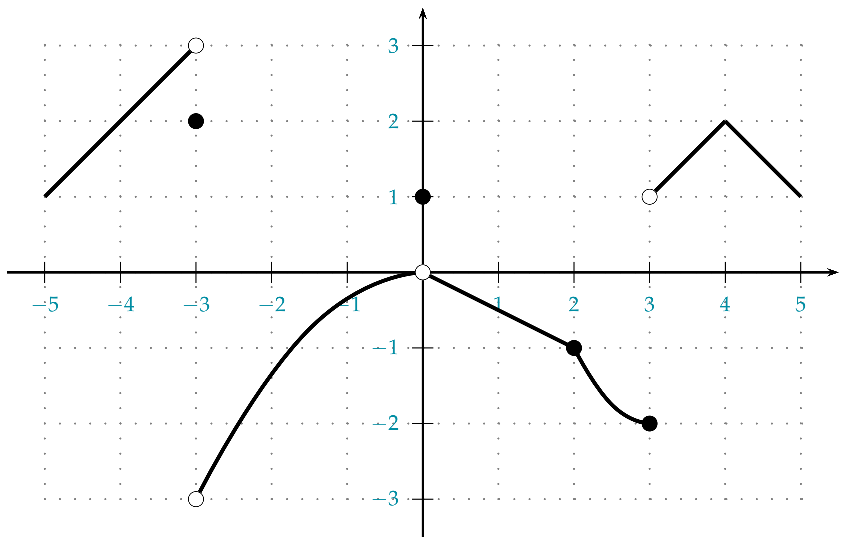
$$\begin{aligned} \sqrt{(4y)^2+y^2} = 10 \quad &\Longleftrightarrow \quad 17y^2 = 100 \\ &\Longleftrightarrow \quad y^2 = \frac{100}{17} \\ &\Longleftrightarrow \quad y = \sqrt{\frac{100}{17}} \approx 2{,}43. \end{aligned}$$

Con esto, $y \approx 2{,}43$ y

$$x \approx 4(2{,}43) = 9,72.$$

Respuesta: La rampa llegará a una altura de 2.43 metros, aproximadamente, y tendrá una longitud horizontal de 9.72 metros, aproximadamente. □

3. Considere la función $f\colon [-5,5] \to \mathbb{R}$ cuya gráfica se muestra a continuación. (2.0pt)



a) Determine los intervalos donde es estrictamente creciente.

b) Determine los intervalos donde es estrictamente decreciente.

c) Determine el valor de $f(-3)$, $f(0)$ y $f(3)$.

d) Determine $\mathrm{img}(f)$.

Solución.

a) La función es estrictamente creciente en $[-5,-3[$, $]-3,0]$ y $[3,4]$.

b) La función es estrictamente decreciente en $[0,3]$ y $[4,5]$.

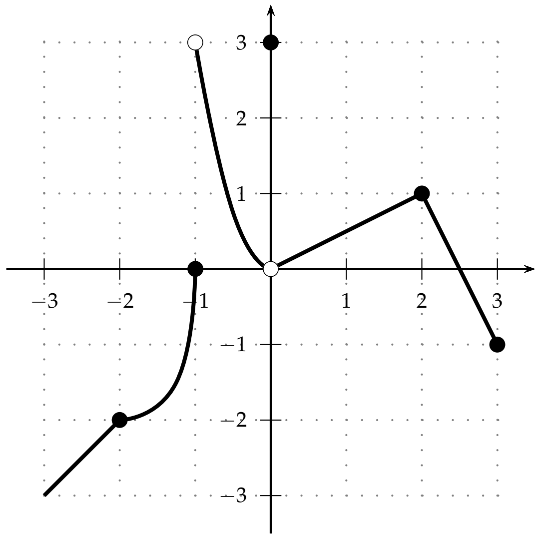
c) Tenemos que $f(-3)=2$, $f(0)=1$ y $f(3)=-2$.

d) Tenemos que $\operatorname{img}(f) =]-3,0[\cup[1,3[$. □

4. Dibuje una función $f\colon[-3,3]\to\mathbb{R}$ tal que (2.5pt)

- $f(-2)=-2$, $f(-1)=0$, $f(0)=3$, $f(3)=-1$, $f(2)=1$;
- sea estricta creciente en $[-3,-1]$;
- sea estricta decreciente en $[2,3]$;
- sea estricta creciente en $[0,2[$;
- sea estricta decreciente en $[-1,0]$.

Solución. Una posible respuesta es:



□

5. Considere las funciones

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\longmapsto 2x^2+3x-4 \qquad \text{y} \qquad g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\longmapsto\frac{2x}{x^2+4},$$

determinar, para $x,h\in\mathbb{R}$ y $h\neq 0$,

a) $f(5)$; (0.25pt)

b) $g(-2)$; (0.25pt)

c) $f(x-2x^2)$; (0.5pt)

d) $(f\circ g)(x)$; (0.5pt)

e) $(g\circ f\circ f)(x)$; (1.0pt)

f) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$; (1.0pt)

g) $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$. (1.0pt)

Solución.

a) $f(5)=2(5)^2+3(5)-4=2(25)+15-4=61$.

b) $$g(-2) = \frac{2(-2)}{((-2)^2+4)}$$
$$= \frac{-4}{(4+4)}$$
$$= \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

c) $$f(x-2x^2) = 2(x-2x^2)^2 + 3(x-2x^2) - 4$$
$$= 2(x^2 - 4x^3 + 4x^4) + 3X - 6x^2 - 4$$
$$= 2x^2 - 8x^3 + 8x^4 + 3x - 6x^2 - 4$$
$$= 8x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 3x - 4.$$

d) $$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
$$= f\left(\frac{2x}{(x^2+4)}\right)$$
$$= 2\left(\frac{2x}{(x^2+4)}\right)^2 + 3\left(\frac{2x}{(x^2+4)}\right) - 4$$
$$= 2\left(\frac{4x^2}{(x^2+4)^2}\right) + \frac{6x}{(x^2+4)} - 4$$
$$= \frac{8x^2}{(x^2+4)^2} + \frac{6x}{(x^2+4)} - 4$$
$$= \frac{8x^2 + 6x(x^2-4) - 4(x^2+4)^2}{(x^2+4)^2}$$
$$= \frac{-4x^4 + 6x^3 - 24x^2 - 24x - 64}{(x^2+4)^2}.$$

e) $$(g \circ f \circ f)(x) = g\left(f(f(x))\right)$$
$$= g\left(f(2x^2+3x-4)\right)$$
$$= g(2(2x^2+3x-4)^2 + 3(2x^2+3x-4) - 4)$$
$$= g(8x^4 + 24x^3 - 8x^2 - 39x + 16)$$
$$= \frac{2\left(8x^4 + 24x^3 - 8x^2 - 39x + 16\right)}{\left(8x^4 + 24x^3 - 8x^2 - 39x + 16\right)^2 + 4}.$$

f) $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2(x+h)^2 + 3(x+h) - 4 - (2x^2+3x-4)}{h}.$$
$$= \frac{2h^2 + 4hx + 3h}{h}$$
$$= 2h + 4x + 3$$

g) $$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{\dfrac{2(x+h)}{(x+h)^2+4} - \dfrac{2x}{x^2+4}}{h}$$
$$= \frac{\dfrac{(x^2+4)2(x+h) - 2x((x+h)^2+4)}{((x+h)^2+4)(x^2+4)}}{h}$$
$$= \frac{\dfrac{-2h^2x - 2hx^2 + 8h}{((x+h)^2+4)(x^2+4)}}{h}$$
$$= \frac{\dfrac{-2h(x^2+xh-4)}{((x+h)^2+4)(x^2+4)}}{h}$$
$$= \frac{-2h(x^2+xh-4)}{h((x+h)^2+4)(x^2+4)}$$
$$= -\frac{2(+x^2+xh-4)}{((x+h)^2+4)(x^2+4)}.$$

□

6. Considere la función (4.0pt)

$$\begin{aligned} g\colon [-2,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3+2x^2-x-1. \end{aligned}$$

a) Defina y grafique la función en Geogebra.

b) Halle sus máximos y mínimos locales y globales.

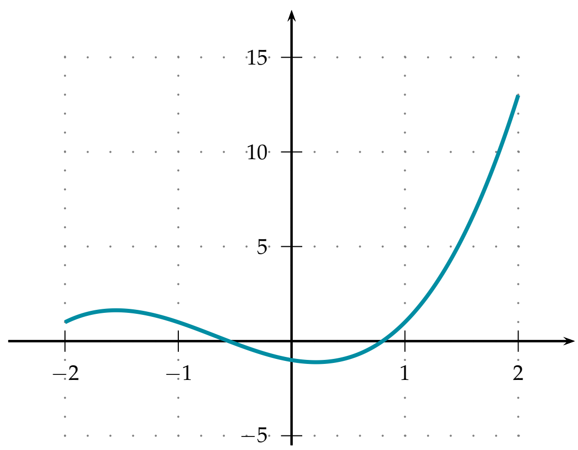
c) Con ayuda de lo datos del literal anterior, determine la imagen de la función.

d) Con ayuda del segundo literal, determine los intervalos de monotonía.

Solución.

a) Definimos la función y graficamos

```
g(x):=Función(x^3+2x^2−x−1,−2,2)
```
$\rightarrow g(x) \;:=\; Si\left(-2 \le x \le 2, x^3 + 2\,x^2 - x - 1\right)$



b) La función empieza con un mínimo local en -2, donde el mínimo es

```
g(−2)
```
$\rightarrow 1$

Luego alcanza un máximo local; busquemos este

```
Extremo(g,−2,0)
→ (−1,55, 1,63)
```

Así, tenemos que la función alcanza un máximo local en $-1{,}55$ y el máximo es $1{,}63$. Ahora, la función alcanza un mínimo global, busquemos este

```
Extremo(g,−1,1)
→ (0,22, −1,11)
```

Así, la función alcanza un mínimo global en $0{,}22$ y el mínimo es $-1{,}11$ Finalmente, la función alcanza un máximo global en 2 donde el máximo es

```
g(2)
→ 13
```

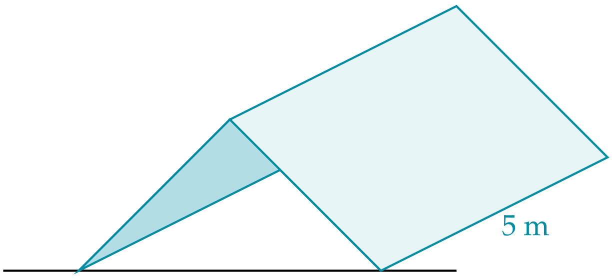
c) Tenemos que la imagen de la función es

$$\operatorname{img}(g) = [-1{,}11\ ,\ 13]\,.$$

d) Tenemos que:

- la función es creciente en : $[-2\ ,\ -1{,}55]$ y $[0{,}21\ ,\ 2]$;
- la función es decreciente en $[-1{,}55\ ,\ 0{,}21]$. □

7. Se dispone de un plástico rectangular de 5×10 metros, con este se quiere generar una carpa como se muestra en la figura.



a) Modele el volumen que cubrirá la carpa en función de la altura de la misma. (4.0pt)

b) Si se quiere una altura de 2 m, ¿cuál será el volumen que encierra la carpa? (1.0pt)

c) Si se quiere cubrir un volumen de 10 m^3, ¿cuál debe ser la altura de la carpa? (1.0pt)

d) ¿Para qué altura se tendrá el máximo volumen? ¿cuál es este volumen? (1.0pt)

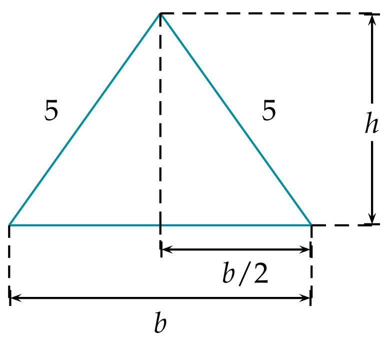
Solución.

a) Para el moldeamiento consideremos lo siguiente:

Variables:

- h : altura de la carpa en metros;
- b : base de la carpa en metros;
- $V(h)$: volumen de la carpa en función de la altura, en metros cúbicos.

Planteamiento: Para el planteamiento del problema consideremos la siguiente gráfica que muestra un corte transversal de la carpa



Así, por el teorema de pitágoras tenemos que

$$\frac{b}{2} = \sqrt{25 - h^2}.$$

Por lo tanto, el área del triángulo que conforma la sección transversal de la carpa está dada por

$$h\sqrt{25 - h^2}.$$

De donde, como la carpa tiene la forma de un prisma triangular, se tiene que el volumen está dado por el producto del área de su base por su altura; por lo tanto, se tiene que la función que modela el volumen como función de la altura está dada por:

$$\begin{aligned} V : [0,5[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto 5h\sqrt{25 - h^2}. \end{aligned}$$

b) Evaluamos la función V en $h = 2$; así, tenemos que

$$V(2) = 10\sqrt{21} \approx 45{,}83.$$

Así, cuando la altura es igual a 2 metros, se tiene que el volumen que cubre la carpa es aproximadamente de 45,83 metros cúbicos.

c) Buscamos h tal que $V(h) = 10$. Usando Geogebra, tenemos que

```
V(h):=5*h*(25-h^2)^(1/2)
```
$\rightarrow V(h) := 5\,h\,\sqrt{-h^2 + 25}$

```
ValorNumérico(ResoluciónC(V(h)=10))
```
$\rightarrow \{h = 0{,}4, h = 4{,}98\}$

Así, tenemos que cuando la altura es igual a 0,4 metros o a 4,98 metros; el volumen cubierto por la carpa es igual a 10 metros cúbicos.

d) Usando Geoegebra, tenemos que

```
Extremo(V,0,5)
```
$\rightarrow (3{,}54, 62{,}5)$

Así, tenemos que para $h \approx 3{,}54$ metros se tiene que el volumen cubierto por la carpa es máximo y, además, este es igual a 62,5 metros cúbicos. $\square$

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA
LÓGICA DEL DISEÑO DE PRODUCTOS • EXAMEN NO. 02

Semestre 2020-2 | Mat. Andrés Merino

INDICACIONES

- Para la resolución de ecuaciones o para la simplificación algebraica, puede utilizar cualquier asistente computacional, pero debe incluir una captura de pantalla de la operación realizada.
- Cada resolución debe estar correctamente redactada, explicada y justificada para obtener el puntaje completo. En caso de obtener una respuesta correcta pero no presentar justificaciones, la puntuación máxima asignada será del 25 % del puntaje.
- La respuesta a cada pregunta se la debe realizar de manera explícita.

EJERCICIOS

1. Calcular el volumen del sólido cuya base está en el plano xy y es limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = -0{,}4x^2 + 2x$ y $y = -\sqrt{x} + 0{,}5x$, y sus secciones transversales perpendiculares al eje x tienen la forma de un rectángulo que guarda proporción áurea cuya base es su lado mayor. Generar gráficos similares a los expuestos en las soluciones de las hojas de ejercicios. (3.0pt)

Solución.

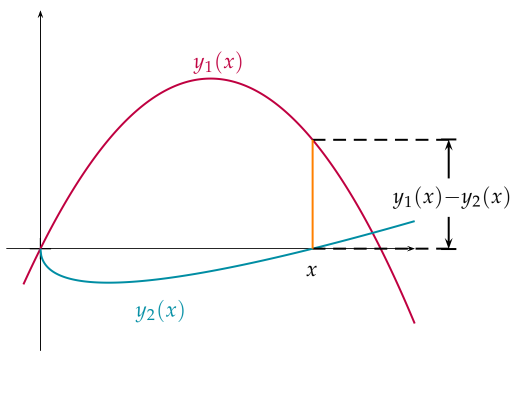
Para la solución del ejercicio vamos a considerar las siguientes notaciones:

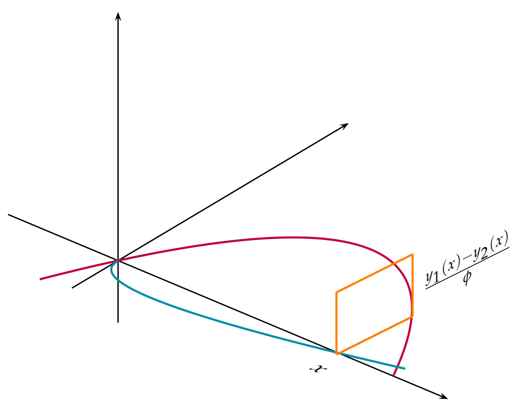
- $y_1(x) = -0{,}4x^2 + 2x$,
- $y_2(x) = -\sqrt{x} + 0{,}5x$.

Así, se realiza un corte al sólido a una altura x, la sección transversal que se obtiene es un rectángulo cuyo lado mayor es igual a $y_1(x) - y_2(x)$ y cuya altura, al guardar la proporción áurea, es igual a $\frac{y_1(x)-y_2(x)}{\phi}$; por lo tanto, el área de la sección transversal es:

$$A(x) = \frac{(y_1(x) - y_2(x))^2}{\phi}.$$

Para ilustrar esto, consideremos el siguiente gráfico





Por otra parte, notemos que los cortes se pueden realizar desde $x = 0$ hasta la intersección de las curvas y_1 y y_2; para encontrar este punto, resolvemos la ecuación

$$-0{,}4x^2 + 2x = -\sqrt{x} + 0{,}5x.$$

Usando Geogebra, tenemos que

```
Resuelve(−0.4x^2+2x=−sqrt(x)+0.5x)
```
$\rightarrow \{x = 0, x = 4{,}88\}$

De esta manera, los cortes se pueden realizar desde $x = 0$ hasta $x = 4{,}88$; por lo tanto, el volumen del sólido es

$$\int_0^{4{,}88} A(x)\,dx = \int_0^{4{,}88} \frac{(y_1(x) - y_2(x))^2}{\varphi}\,dx = \int_0^{4{,}88} \frac{(-0{,}4x^2 + 1{,}5x + \sqrt{x})^2}{\varphi}\,dx.$$

Usando Geogebra,

```
ValorNumérico(Integral((−0.4x^2+1.5x+sqrt(x))^2/1.618, 0, 4.88))
```
$\rightarrow 13{,}56$

De donde,

$$\int_0^{4{,}88} A(x)\,dx = \frac{(-0{,}4x^2 + 1{,}5x + \sqrt{x})^2}{\varphi} = 13{,}56.$$

Así, el volumen del sólido es de aproximadamente 13,56 unidades cúbicas. □

2. Colocar los siguientes vectores en su forma polar indicando cada paso: (1.0pt)

$$\vec{A} = -3\vec{i} - 4\vec{j} \qquad \text{y} \qquad \vec{B} = 4\vec{j}.$$

Solución.

a) Notemos que $-3\vec{i} - 4\vec{j} = (-3, -4)$. Así, el módulo del vector está dado por:

$$|\vec{A}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5;$$

y su dirección está dada por

$$\theta = \arctan\left(\frac{-4}{-3}\right) - 180^\circ = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) - 180^\circ \approx -126{,}87^\circ.$$

Por lo tanto, el vector $\vec{A}$ expresado en coordenadas polares está dado por:

$$(5; -126{,}87^\circ).$$

b) Notemos que $-4\vec{j} = (0, -4)$. Así, el módulo del vector está dado por:

$$|\vec{B}| = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4;$$

y su dirección está dada por

$$\theta = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ.$$

Por lo tanto, el vector $\vec{B}$ expresado en coordenadas polares está dado por:

$$(4; -90^\circ).$$

□

3. La primera componente del vector $\vec{A}$ es 23 y su módulo es 40. Determine cuál es el vector $\vec{A}$. (2.0pt)

Solución. Tenemos:

- b: la segunda componente del vector $\vec{A}$.

Con esto, $\vec{A} = (23, b)$. Ahora, para que el módulo del vector sea 40, es necesario que

$$|\vec{A}| = \sqrt{23^2 + b^2} = 40.$$

Usando Geogebra

```
Resuelve(sqrt(23^2+b^2)=40,b)
```

$\to \left\{b = -3\sqrt{119}, b = 3\sqrt{119}\right\}$

Por lo tanto, el vector $\vec{A}$ está dado por:

$$\vec{A} = (23, \pm 3\sqrt{119}).$$

□

4. Un golfista novato en el campo requiere tres golpes para meter la pelota. Los desplazamientos sucesivos de la pelota son 4,00 m a 20° al noreste, 2,00 m al noroeste y 1,00 m a 15° al suroeste. Partiendo del mismo punto inicial, un golfista experto podría meter la pelota en un solo desplazamiento, determine el desplazamiento que realizaría el golfista experto (para la suma de vectores, realizar manualmente todo el procedimiento). (2.5pt)

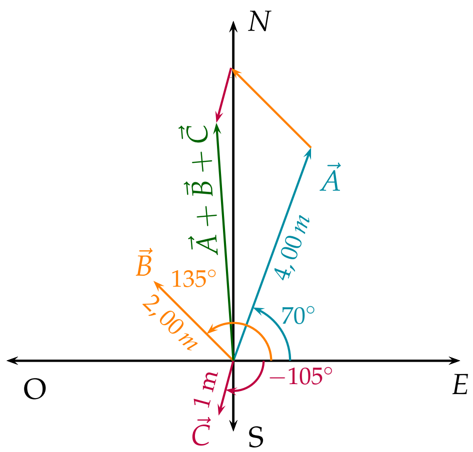
Solución. Para el modelamiento, consideremos lo siguiente, llamemos:

- $\vec{A}$: desplazamiento del primer golpe;
- $\vec{B}$: desplazamiento del segundo golpe;
- $\vec{C}$: desplazamiento del tercer golpe.

Con esto

$$\vec{A} = (4; 70^\circ), \quad \vec{B} = (2; 135^\circ) \quad \text{y} \quad \vec{C} = (1; -105^\circ).$$

Adicionalmente, consideremos el siguiente gráfico que ilustra los golpes realizados por los golfistas



Notemos que el desplazamiento necesario para que el golfista experto logre un «hoyo en uno» es igual a la suma de los desplazamientos sucesivos realizados por el golfista novato. Así, calculamos las componentes de cada vector. Para el desplazamiento del primer golpe:

$$A_x = 4\cos(70^\circ) \approx 1{,}37,$$
$$A_y = 4\,\text{sen}(70^\circ) \approx 3{,}76;$$

para el desplazamiento del segundo golpe:

$$B_x = 2\cos(135^\circ) \approx -1{,}41,$$
$$B_y = 2\,\text{sen}(135^\circ) \approx 1{,}41;$$

y, para el último golpe:

$$C_x = 1\cos(-105^\circ) \approx -0{,}26,$$
$$C_y = 1\operatorname{sen}(-105^\circ) \approx -0{,}97.$$

Sumando los vectores, tenemos que

$$\begin{aligned}\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} &= (1{,}37-1{,}41-0{,}26)\vec{i}+(3{,}76+1{,}41-0{,}97)\vec{j}\\ &= -0{,}3\vec{i}+4{,}2\vec{j}.\end{aligned}$$

Así, el desplazamiento necesario para que el golfista experto meta la pelota en el hoyo en un solo golpe es el vector cuyas componentes son $-0{,}3\vec{i}$ y $4{,}2\vec{j}$. □

5. Una partícula tiene función de velocidad $v(t) = 5t - t^2$, donde el tiempo está medido en segundo y la distancia está medida en metros.

   a) Determine la función de la aceleración de la partícula. (0.5pt)

   b) Si se conoce que en el tiempo $t = 5$ la partícula está en la posición 3 m, determine la función de posición de la partícula. (1.0pt)

   c) ¿En qué momentos la partícula se detiene? ¿dónde se encuentra en esos momentos la partícula? (1.0pt)

   d) Dibuje la función de velocidad. ¿En qué momentos la partícula tiene velocidad máxima? ¿dónde se ubica la partícula en ese momento? (1.0pt)

Solución.

a) Para determinar la aceleración de la partícula, derivamos la velocidad en función del tiempo; así, tenemos que

$$a(t) = 5 - 2t.$$

b) Notemos que la posición de una partícula en el tiempo t está dada por

$$r(t) = r(t_1) + \int_{t_1}^{t} v(x)\,dx.$$

Así, como $t_1 = 5$, entonces $r(t_1) = 3$; por lo tanto, reemplazando e integrando en la expresión anterior se tiene que

$$r(t) = r(5) + \int_5^t 5x - x^2\,dx = -\frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} - \frac{107}{6}.$$

c) La partícula se detiene cuando la velocidad de la misma es igual a cero. Por lo tanto, para encontrar estos momentos resolvemos la ecuación

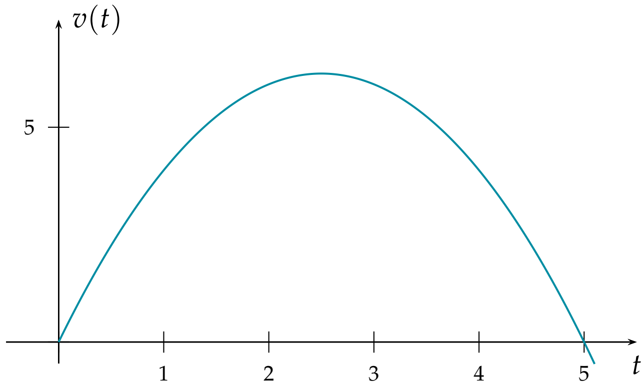
$$v(t) = 5t - t^2 = 0.$$

De donde, tenemos que en los tiempos $t = 0$ y $t = 5$ la partícula se detiene. Finalmente, para encontrar la posición de la partícula, en los momentos en los que esta se detiene, evaluamos la función de la posición

$$r(0) = -\frac{107}{6} \approx -17{,}83 \qquad \text{y} \qquad r(5) = 3.$$

Así, en el tiempo $t = 0$ la partícula se encuentra a aproximadamente $-17{,}83$ metros de distancia y para el tiempo $t = 5$ la partícula se encuentra a 5 metros de distancia.

d) La gráfica de la función velocidad está dada por



Así, tenemos que la velocidad máxima se encuentra en el vértice de la parábola. Usando Geogebra

```
Extremo(5x−x^2, 0, 5)
→ (2,5 , 6,25)
```

Por lo tanto, tenemos que la velocidad máxima se alcanza en $t = 2{,}5$ y es igual a $6{,}25$ unidades por segundo. Finalmente, la partícula se ubica en $r(2{,}5) = -7{,}42$. □

6. Se tiene tres partículas con movimiento rectilíneo. La primera de ellas tiene movimiento uniforme con velocidad 4 m/s; la segunda tiene aceleración constante 2 m/s^2 y parte del reposo; y la tercera tiene función de velocidad $v_3(t) = t^2$. Todas parten del origen.

   a) Determine la función de posición de cada partícula. (2.0pt)

   b) Luego de un segundo, ¿qué partícula está más alejada del origen? (1.0pt)

   c) Luego de cinco segundo, ¿qué partícula está más alejada del origen. (1.0pt)

   d) Determinar todos lo momentos en que una partícula rebasa a otra. (2.0pt)

Solución. Para la solución del ejercicio consideremos las siguientes notaciones:

- $r_1(t)$: función de posición de la primera partícula;
- $r_2(t)$: función de posición de la segunda partícula;
- $r_3(t)$: función de posición de la tercera partícula.

a) Tomando $t_1 = 0$ y dado que $r_1(t_1) = r_2(t_1) = r_3(t_1) = 0$, tenemos que:

- Para la primera partícula, como estamos en un movimiento rectilíneo uniforme, tenemos

$$r_1(t) = r_0 + 4t = 4t \qquad \text{y} \qquad v_1(t) = 4.$$

- Para la segunda partícula; como estamos en un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, tenemos

$$r_2(t) = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(2)t^2, \qquad v_2(t) = v_0 + 2t \qquad \text{y} \qquad a_2(t) = 2,$$

  con lo cual

$$r_2(t) = t^2.$$

- Para la tercera partícula, como $v_3(t) = t^2$; entonces, reemplazando e integrando en la fórmula de la posición

$$r_3(t) = r_3(t_1) + \int_{t_1}^{t} v(\tau)\, d\tau;$$

  se tiene que

$$r_3(t) = \frac{t^3}{3}.$$

b) Evaluando las funciones de posición de cada una de las partículas, tenemos que

$$r_1(1) = 4, \qquad r_2(1) = 1 \qquad \text{y} \qquad r_3(1) = \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, luego de un segundo la partícula que se encuentra más alejada del origen es la primera.

c) Evaluando las funciones de posición de cada una de las partículas, tenemos que

$$r_1(5) = 20, \qquad r_2(5) = 25 \qquad \text{y} \qquad r_3(5) = \frac{125}{3} \approx 41{,}67.$$

Por lo tanto, luego de cinco segundos la partícula que se encuentra más alejada del origen es la tercera.

d) Para determinar los momentos en los que una partícula rebasa a otra, vamos a comparar las posiciones de cada una de las partículas entre si.

- Entre la primera y la segunda partícula, para determinar el momento en el que una rebasa a la otra resolvemos la siguiente ecuación:

$$r_1(t) = r_2(t) \iff 4t = t^2.$$

Así, para $t = 4$ una partícula rebasa a la otra.

- Entre la primera y la tercera partícula, para determinar el momento en el que una rebasa a la otra resolvemos la siguiente ecuación:

$$r_1(t) = r_3(t) \iff 4t = \frac{t^3}{3}.$$

Así, para $t = 2\sqrt{3}$ una partícula rebasa a la otra.

- Entre la segunda y la tercera partícula, para determinar el momento en el que una rebasa a la otra resolvemos la siguiente ecuación:

$$r_2(t) = r_3(t) \iff t^2 = \frac{t^3}{3}.$$

Así, para $t = 3$ una partícula rebasa a la otra. □

INDICACIONES

- Para la resolución de ecuaciones o para la simplificación algebraica, puede utilizar cualquier asistente computacional, pero debe incluir una captura de pantalla de la operación realizada.
- Cada resolución debe estar correctamente redactada, explicada y justificada para obtener el puntaje completo. En caso de obtener una respuesta correcta pero no presentar justificaciones, la puntuación máxima asignada será del 25 % del puntaje.
- La respuesta a cada pregunta se la debe realizar de manera explícita.
- Para la resolución de cada ejercicios, se deben utilizar los métodos vistos en clases, en caso de utilizar otros métodos y llegar a la respuesta correcta, se asignará máximo el 50 % de la nota.

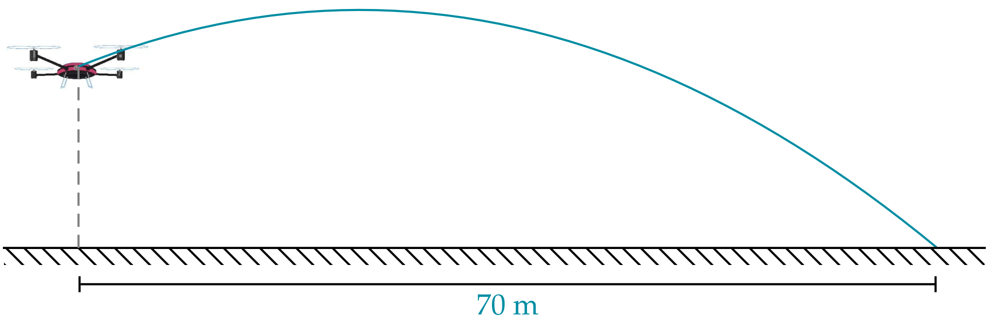
EJERCICIOS

1. Un dron se encontraba volando con velocidad $(30, 10)$ m/s, en ese instante sus motores deja de funcionar. El dron que cayó a 70 m del lugar en donde los motores dejaron de funcionar. Se desea conocer a qué altura estaba volando el dron cuando sus motores se detuvieron, para esto, realice el siguiente procedimiento:

   a) Ubique un sistema de referencia para el movimiento y en base a este plantee la posición inicial y la velocidad inicial del dron. (1.0pt)

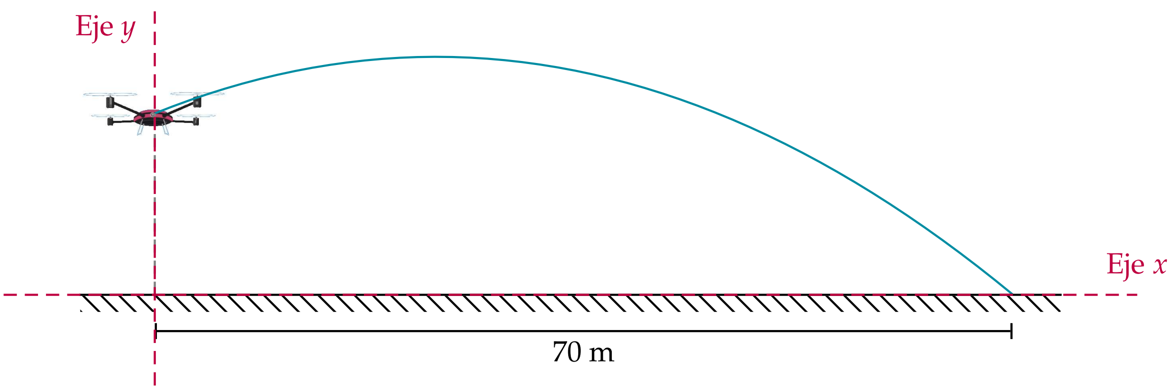
   b) En base al literal anterior, plantee la función del movimiento. (1.0pt)

   c) Utilizando el literal anterior, plantee las condiciones necesarias para conocer la altura a la que volaba el dron y resuelva el sistema de ecuaciones resultante. (2.0pt)



Solución.

a) Colocamos el sistema de referencia en la ubicación en la que se encontraba el dron cuando sus motores dejaron de funcionar.



Con esto,

$$\vec{r}_0 = (0, y_0)$$
$$\vec{v}_0 = (30, 10).$$

b) Se sigue que las funciones del movimiento están dadas por:

- Para la posición

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \\ &= (0, y_0) + (30, 10)t + \frac{1}{2}(0, -9{,}8)t^2 \\ &= (30t, y_0 + 10t - 4{,}9t^2).\end{aligned}$$

- Para la velocidad

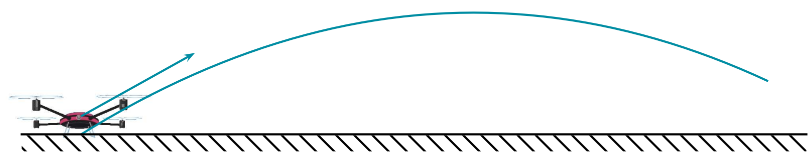
$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \vec{v}_0 + \vec{g}t^2 \\ &= (30, 10) + (0, -9{,}8)t \\ &= (30, 10 - 9{,}8t).\end{aligned}$$

c) Usando las funciones obtenidas en el literal anterior y como $r(t) = (70, 0)$, se sigue que

$$30t = 70 \tag{1}$$
$$y_0 + 10t - 4{,}9t^2 = 0 \tag{2}$$

De donde, por (1), sabemos que $t = 2{,}33$; reemplazando esto en (2), tenemos que la altura a la que volaba el dron es de aproximadamente 3,30 m. □

2. Los motores de un dron de 5 kg aplican sobre este una fuerza de 70 N en la misma dirección en la que despegue. Un determinado día, se desea realizar un vuelo con el dron, el viento ejerce un fuerza horizontal de 10 N y se despega con una rapidez inicial de 20 m/s con una inclinación de 60° respecto al suelo en contra del viento.



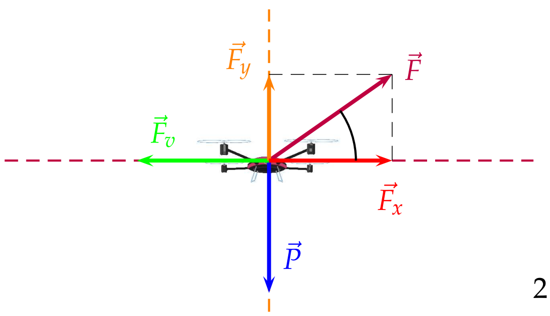
a) Elabore un diagrama de cuerpo libre sobre el dron y utilizando este, determine la aceleración del dron. (2.0pt)

b) Ubique un sistema de referencia y plantee la función de la posición del dron. (1.0pt)

c) Utilizando el literal determine la posición del dron 15 segundos después de haber iniciado el movimiento. (1.0pt)

Solución.

a) Generemos el diagrama de cuerpo libre:



- $\vec{P}$: peso del dron
- $\vec{F}$: fuerza del dron
- $\vec{F}_v$: fuerza del viento

Con esto, tenemos que

$$\vec{P} = (0\ ,\ -49)$$
$$\vec{F} = (F\ ;\ 60^\circ) = (35\ ,\ 60{,}62)$$
$$\vec{F_v} = (-10\ ,\ 0).$$

Aplicando la segunda ley de Newton, tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{F} + \vec{F_v} &= m \cdot \vec{a} \\ (35 - 10\ ,\ 60{,}62 - 49) &= 5 \cdot \vec{a} \\ (25\ ,\ 11{,}62) &= 5 \cdot \vec{a}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la aceleración es igual a

$$\vec{a} = (5\ ,\ 2{,}32).$$

b) Usando las funciones del movimiento y dado que la velocidad inicial es de $\vec{v_0} = (v_0\ ;\ 60^\circ) = (10\ ,\ 17{,}32)$, se sigue que

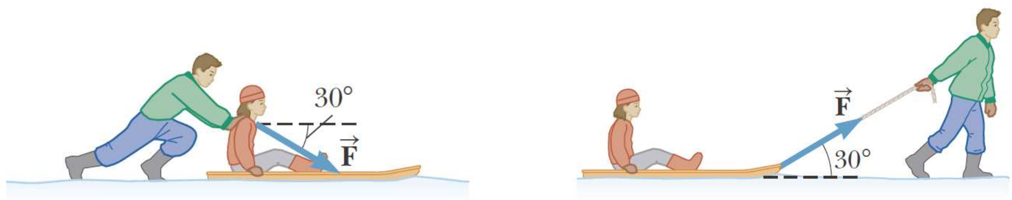
$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r_0} + (10\ ,\ 17{,}32)t + \frac{1}{2}(5\ ,\ 2{,}32)t^2 \\ &= (10t + 2{,}5t^2\ ,\ 17{,}32t + 1{,}16t^2). \end{aligned}$$

c) Evaluando la función en $t = 15$,

$$r(15) = (712{,}5\ ,\ 520{,}8).$$

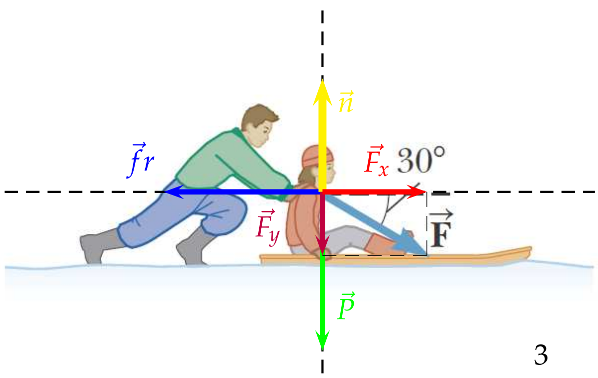
Así, luego de 15 segundos, el dron se encuentra en el punto de coordenadas $(712{,}5\ ,\ 520{,}8)$ m, respecto al punto de partida. □

3. Suponga que su amiga está sentada sobre un trineo y le pide que la mueva por un campo plano y horizontal. Usted tiene la opción de empujarla desde atrás aplicando una fuerza hacia abajo sobre sus hombros a 30° debajo de la horizontal o colocar una cuerda en el frente del trineo y jalar con fuerza con un ángulo de 30° por encima de la horizontal (ver figura). Se sabe que el coeficiente de fricción es de 0,2 y se quiere tener una aceleración de 2 m/s^2, para cada caso, calcule la magnitud de la fuerza necesaria y determine cuál opción es mejor, sabiendo que la masa de su amiga es de 50 kg. (1.5pt por el cálculo de la primera fuerza, 1.5pt por el cálculo de la segunda fuerza, 1.0pt por la conclusión)



Solución.

a) Para el primer caso, realicemos el diagrama de cuerpo libre:



- $\vec{P}$: peso de amiga
- $\vec{F}$: fuerza ejercida
- $\vec{f_r}$: fuerza de rozamiento
- $\vec{n}$: normal

Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= (0\,,\ -490);\\
\vec{n} &= (0\,,\ n);\\
\vec{F} &= (F\,;\ -30^\circ);\\
\vec{a} &= (2\,,\ 0).
\end{aligned}$$

Utilizando la tercera ley de Newton, tenemos que

$$\begin{aligned}
\vec{F}+\vec{P}+\vec{n}+\vec{f}r &= m\cdot\vec{a}\\
(F\cos(-30^\circ)-n\,,\ n-mg+F\,\mathrm{sen}(-30^\circ)) &= 50(2\,,\ 0).
\end{aligned}$$

De donde, tenemos que

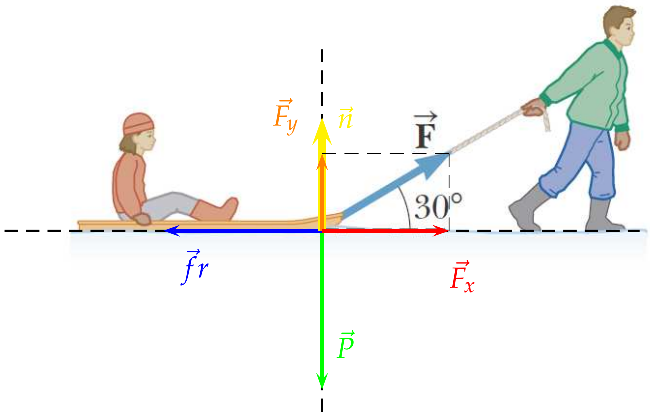
$$n = m\,g + F\,\mathrm{sen}(30^\circ).$$

Reemplazando el valor de la normal, tenemos que

$$\begin{aligned}
F\cos(30^\circ)-\mu\,(m\,g+F\,\mathrm{sen}(30^\circ)) = 100 \quad &\Longrightarrow \quad F\cos(30^\circ)-\mu\,m\,g-\mu\,F\,\mathrm{sen}(30^\circ) = 100\\
&\Longrightarrow \quad F(\cos(30^\circ)-\mu\,\mathrm{sen}(30^\circ)) = 100+98\\
&\Longrightarrow \quad F = \frac{198}{\cos(30^\circ)-0{,}2\,\mathrm{sen}(30)}\\
&\Longrightarrow \quad F = \frac{198}{0{,}77} \approx 257{,}14.
\end{aligned}$$

Así, la fuerza requerida para mover a su amiga con una aceleración de $2\,\mathrm{m/s^2}$ es de $257{,}14\,\mathrm{N}$.

b) Para el segundo caso, realicemos el diagrama de cuerpo libre



- $\vec{P}$: peso de amiga
- $\vec{F}$: fuerza ejercida
- $\vec{f}_r$: fuerza de rozamiento
- $\vec{n}$: normal

Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= (0\,,\ -490)\\
\vec{n} &= (0\,,\ n)\\
\vec{F} &= (F\,;\ 30^\circ)\\
\vec{a} &= (2\,,\ 0).
\end{aligned}$$

Utilizando la tercera ley de Newton, tenemos que

$$\begin{aligned}
\vec{F}+\vec{P}+\vec{n}+\vec{f}r &= m\cdot\vec{a}\\
(F\cos(30^\circ)-n\,,\ n+F\,\mathrm{sen}(30^\circ)-mg) &= 50(2,0).
\end{aligned}$$

De donde, tenemos que

$$n = mg - F\,\mathrm{sen}(30^\circ).$$

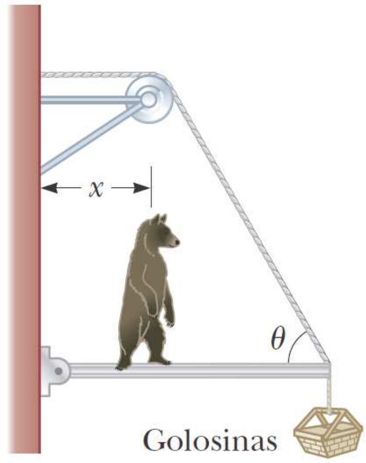
Reemplazando el valor de la normal, tenemos que

$$\begin{aligned} F\cos(30^\circ) - \mu\,(m\,g - F\,\mathrm{sen}(30^\circ)) = 100 \quad &\Longrightarrow \quad F\cos(30^\circ) - \mu\,m\,g + \mu\,F\,\mathrm{sen}(30^\circ) = 100 \\ &\Longrightarrow \quad F(\cos(30^\circ) + \mu\,\mathrm{sen}(30^\circ)) = 100 + 98 \\ &\Longrightarrow \quad F = \frac{198}{\cos(30^\circ) + 0{,}2\,\mathrm{sen}(30^\circ)} \\ &\Longrightarrow \quad F = \frac{198}{0{,}97} \approx 206{,}25. \end{aligned}$$

Así, la fuerza requerida para mover a su amiga con una aceleración de $2\,\mathrm{m/s^2}$ es de $206{,}25\,\mathrm{N}$.

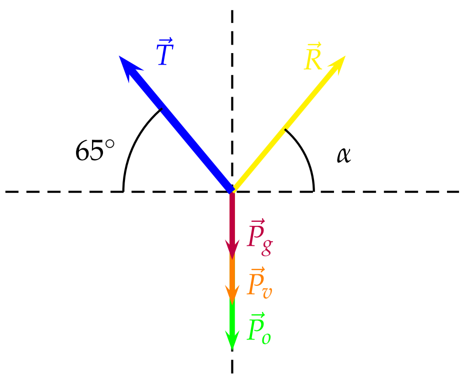
De esta manera, la segunda opción es la mejor pues requiere una menor fuerza y por tanto un menor esfuerzo. □

4. Un oso hambriento que pesa 600 N camina por una viga intentando recoger una canasta con golosinas que cuelga en el extremo. La viga es uniforme, pesa 220 N, tiene una longitud de 6 m y está sostenida por un cable con un ángulo de $\theta = 65{,}0^\circ$. La canasta pesa 70 N. Cuando el oso se encuentra en $x = 1$ m, encuentre la tensión en el cable que soporta la viga y las componentes de la fuerza ejercida por el muro sobre el extremo izquierdo de la viga. Si el cable puede soportar una tensión máxima de 800 N, ¿cuál es la distancia máxima que puede caminar el oso antes de que se rompa el cable? (4.0pt)



Solución.

a) Realizamos el diagrama de cuerpo libre



- $\vec{T}$: tensión en la cuerda
- $\vec{R}$: Reacción de la pared
- $\vec{P}_g$: Peso de las golosinas
- $\vec{P}_v$: Peso de la viga
- $\vec{P}_o$: Peso del oso

Con esto, tenemos que

$$\vec{P}_g = (0, -70);$$

$$\vec{P}_v = (0, -220);$$
$$\vec{P}_o = (0, -600).$$

Utilizando la tercera ley de Newton, tenemos que

$$\vec{T} + \vec{R} + \vec{P}_o + \vec{P}_v + \vec{P}_g = (0,0)$$
$$(R\cos(\alpha) + T\cos(115^\circ), T\,\text{sen}(115^\circ) + R\,\text{sen}(\alpha) - 600 - 220 - 70) = (0,0).$$

De donde, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} R\cos(\alpha) + T\cos(115^\circ) & = 0, \\ T\,\text{sen}(115^\circ) + R\,\text{sen}(\alpha) - 600 - 220 - 70 & = 0. \end{cases}$$

Ahora, como existe posibilidad de giro, calculamos las torsiones:

$$\tau_o = 1 \cdot 600 = 600;$$
$$\tau_v = 3 \cdot 220 = 660;$$
$$\tau_g = 6 \cdot 70 = 420;$$
$$\tau_T = 6 \cdot T\,\text{sen}(65^\circ) = 5{,}43T.$$

De donde, para que exista equilibrio se necesita que

$$\begin{aligned} \tau_T - \tau_o - \tau_v - \tau_g = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 600 + 660 + 420 = 5{,}43T \\ &\Longrightarrow \quad T = \frac{1680}{5{,}43} \approx 309{,}39. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la tensión que el cable está soportando con el oso a un metro de distancia es de 309,39 N.

b) Para determinar las componente de la fuerza ejercida por el muro sobre el extremo izquierdo, reemplazamos el valor de la tensión encontrado en el literal anterior y despejamos. Así,

$$R_x = R\cos(\alpha) = -T\cos(115^\circ) = 130{,}75\,N,$$
$$R_y = 600 + 220 + 70 - T\,\text{sen}(115^\circ) = 609{,}60\,N.$$

Por lo tanto, la fuera de reacción ejercida por el muro es igual a

$$R = (130{,}75, 609{,}60)\,N.$$

c) Para determinar la distancia máxima a la que puede caminar el oso, calculamos las torsiones:

$$\tau_o = x \cdot 600 = 600x;$$
$$\tau_v = 3 \cdot 220 = 660;$$
$$\tau_g = 6 \cdot 70 = 420;$$
$$\tau_T = 6 \cdot 800\,\text{sen}(65^\circ) = 4350{,}28.$$

Así, para exista equilibro, se necesita que

$$\begin{aligned} \tau_T - \tau_o - \tau_g - \tau_v = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 4350{,}28 - 600x - 660 - 420 = 0, \\ &\Longrightarrow \quad x = \frac{3270{,}26}{600} \approx 5{,}45\,m. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia máxima que puede caminar el oso antes de que se rompa el cable es de aproximadamente 5,45 m. □

Escuela de Ciencias Físicas y Matemática
Lógica del Diseño de Productos • Examen Final

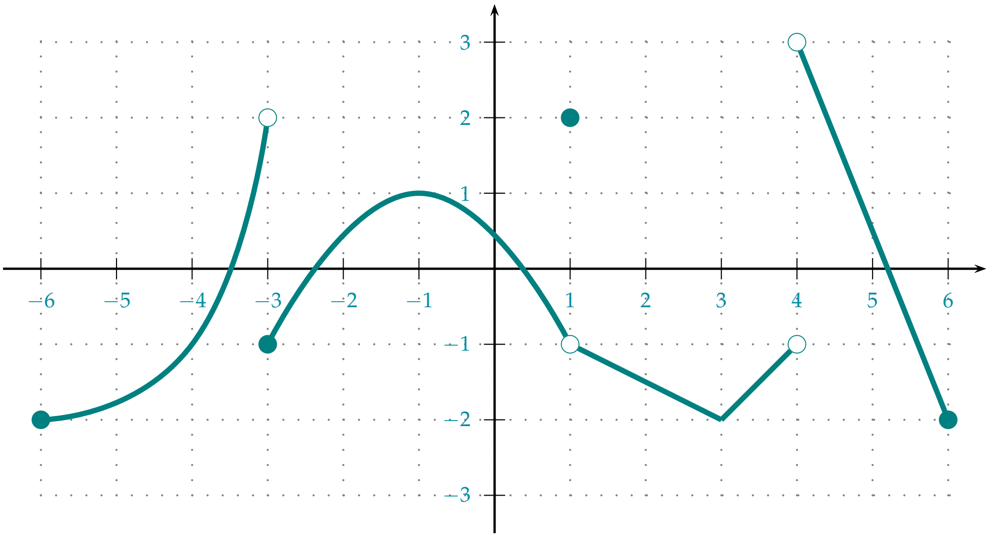
Semestre 2020-2 Mat. Andrés Merino

Indicaciones

- Para la resolución de ecuaciones o para la simplificación algebraica, puede utilizar cualquier asistente computacional, pero debe incluir una captura de pantalla de la operación realizada.
- Cada resolución debe estar correctamente redactada, explicada y justificada para obtener el puntaje completo. En caso de obtener una respuesta correcta pero no presentar justificaciones, la puntuación máxima asignada será del 25 % del puntaje.
- La respuesta a cada pregunta se la debe realizar de manera explícita.
- Para la resolución de cada ejercicios, se deben utilizar los métodos vistos en clases, en caso de utilizar otros métodos y llegar a la respuesta correcta, se asignará máximo el 50 % de la nota.

Ejercicios

1. Considere la gráfica de la función $g\colon [-6,6] \setminus \{4\} \to \mathbb{R}$, dada a continuación.



a) Determine los intervalos donde es estrictamente creciente. (1.0pt)

b) Determine los intervalos donde es estrictamente decreciente. (1.0pt)

c) Determine el valor de $g(-3)$, $g(-1)$, $g(1)$ y $g(4)$. (1.0pt)

d) Determine $\operatorname{img}(g)$. (0.5pt)

e) ¿$g'(-4)$ es positiva, negativa o 0? (0.5pt)

f) ¿$g'(5)$ es positiva, negativa o 0? (0.5pt)

g) ¿$g'(-1)$ es positiva, negativa o 0? (0.5pt)

Solución.

a) La función es estrictamente creciente en $[-6,-3[$, $[-3,-1]$ y $[3,4[$.

b) La función es estrictamente decreciente en $[-1,1[$, $[1,3]$ y $]4,6]$.

c) Tenemos que $g(-3) = -1$, $g(-1) = 1$, $g(1) = 2$ y $g(4)$ no existe

d) Tenemos que $\operatorname{img}(g) = [-2,3]$.

e) Tenemos que $g'(-4)$ es positiva.

f) Tenemos que $g'(5)$ es negativa.

g) Tenemos que $g'(-1)$ es 0. □

2. Considere las funciones

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{x^2+1} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2-2x\,, \end{aligned}$$

determinar, para $x, h \in \mathbb{R}$ y $h \neq 0$,

a) $f(2)$; (0.25pt)

b) $g(-2)$; (0.25pt)

c) $(f \circ g)(x)$; (0.5pt)

d) $(g \circ h)(x)$; (0.5pt)

e) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$; (1.0pt)

f) $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$. (1.0pt)

Solución.

a) $f(2) = \frac{2}{5}$.

b) $g(-2) = 8$.

c)
$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(x^2-2x\right) \\ &= \frac{x^2-2x}{(x^2-2x)^2+1} \\ &= \frac{x^2-2x}{x^4-4x^3+4x^2+1}. \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g\left(f(x)\right) \\ &= g\left(\frac{x}{x^2+1}\right) \\ &= \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2 - 2\frac{x}{x^2+1} \\ &= \frac{-2x^3+x^2-2x}{x^4+2x^2+1}. \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\dfrac{x+h}{(x+h)^2+1} - \dfrac{x}{x^2+1}}{h} \\ &= \frac{\dfrac{-h^2x-hx^2+h}{h^2x^2+h^2+2hx^3+2hx+x^4+2x^2+1}}{h} \\ &= \frac{-hx-x^2+1}{h^2x^2+h^2+2hx^3+2hx+x^4+2x^2+1}. \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2-2(x+h)-(x^2-2x)}{h} \\ &= \frac{2hx+h^2-2h}{h} \\ &= 2x+h-2. \end{aligned}$$

□

3. Calcular el volumen del sólido cuya base está en el plano xy y está limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = x^4 - 2x^2$ y $y = x/2$, con $x \geq 0$; además, sus secciones transversales perpendiculares al eje x tienen la forma de semicírculo. Generar gráficos similares a los expuestos en las soluciones de las hojas de ejercicios. (3.0pt)

Solución.

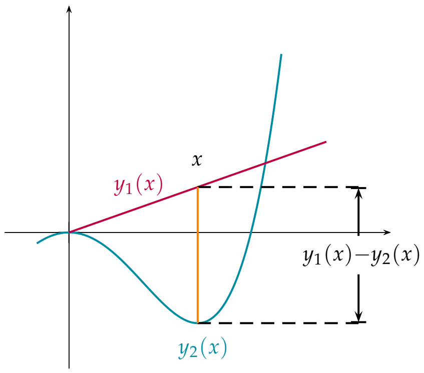
Para la solución del ejercicio vamos a considerar las siguientes notaciones:

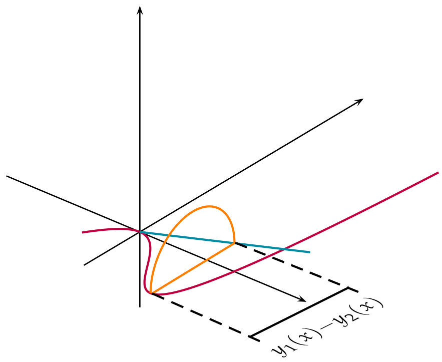
- $y_1(x) = \frac{x}{2}$,
- $y_2(x) = x^4 - 2x^2$.

Así, se realiza un corte al sólido a una altura x, la sección transversal que se obtiene es un semicírculo cuyo radio es igual a $\frac{y_1(x)-y_2(x)}{2}$; por lo tanto, el área de la sección transversal es:

$$A(x) = \pi \left(\frac{y_1(x) - y_2(x)}{2} \right)^2.$$

Para ilustrar esto, consideremos el siguiente gráfico





Por otra parte, notemos que los cortes se pueden realizar desde $x = 0$ hasta la intersección de las curvas y_1 y y_2; para encontrar este punto, resolvemos la ecuación:

$$x^4 - 2x^2 = \frac{x}{2}.$$

Usando Geogebra, tenemos que

```
ResoluciónN(x^4-2x^2=x/2)
```
$\to \{x = -1{,}27, x = -0{,}26, x = 0, x = 1{,}53\}$

De esta manera, los cortes se pueden realizar desde $x = 0$ hasta $x = 1{,}53$; por lo tanto, el volumen del sólido es

$$\int_0^{1,53} A(x)\, dx = \int_0^{1,53} \pi \left(\frac{y_1(x) - y_2(x)}{2} \right)^2 dx = \int_0^{1,53} \pi \left(\frac{\frac{x}{2} - x^4 - 2x^2}{2} \right)^2 dx.$$

Usando Geogebra,

```
ValorNumérico(Integral(Pi*((x/2-x^4-2x^2)/2)^2,0,1.53))
```
$\to$ 14,49

De donde,

$$\int_0^{1,53} A(x)\, dx = 14{,}49.$$

Así, el volumen del sólido es de aproximadamente 14,49 unidades cúbicas. □

4. Una partícula tiene función de velocidad $v(t) = 2t - 0{,}1t^4$, con $t \geq 0$, donde el tiempo está medido en segundo y la distancia está medida en metros.

   a) Determine la función de la aceleración de la partícula. (0.5pt)

   b) Si se conoce que en el tiempo $t = 2$ la partícula está en la posición 2 m, determine la función de posición de la partícula. (1.0pt)

   c) ¿En qué momentos la partícula se detiene? ¿dónde se encuentra en esos momentos la partícula? (1.0pt)

   d) Dibuje la función de velocidad. ¿En qué momentos la partícula tiene velocidad máxima? ¿dónde se ubica la partícula en ese momento? (1.0pt)

Solución.

a) Para determinar la aceleración de la partícula, derivamos la velocidad en función del tiempo; así, tenemos que

$$a(t) = 2 - 0{,}4t^3.$$

b) Notemos que la posición de una partícula en el tiempo t está dada por

$$r(t) = r(t_1) + \int_{t_1}^{t} v(x)\, dx.$$

Así, como $t_1 = 2$, entonces $r(t_1) = 2$; por lo tanto, reemplazando e integrando en la expresión anterior se tiene que

$$r(t) = r(2) + \int_2^t 2x - 0{,}1x^4\, dx = -0{,}02t^5 + t^2 - 1{,}36.$$

c) La partícula se detiene cuando la velocidad de la misma es igual a cero. Por lo tanto, para encontrar estos momentos resolvemos la ecuación

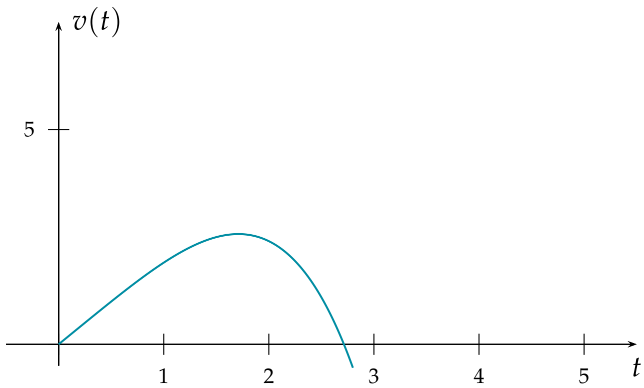
$$v(t) = 2t - 0{,}1t^4 = 0.$$

De donde, tenemos que en los tiempos $t = 0$ y $t = 2{,}71$ la partícula se detiene. Finalmente, para encontrar la posición de la partícula, en los momentos en los que esta se detiene, evaluamos la función de la posición

$$r(0) = -0{,}02(0)^5 + 0^2 - 1{,}36 = -1{,}36 \qquad \text{y} \qquad r(2{,}71) = -0{,}02(2{,}71)^5 + (2{,}71)^2 - 1{,}36 \approx 3{,}06.$$

Así, en el tiempo $t = 0$ la partícula se encuentra a $-1{,}36$ metros de distancia y para el tiempo $t = 2{,}71$ la partícula se encuentra a aproximadamente 3,06 metros de distancia.

d) La gráfica de la función velocidad está dada por

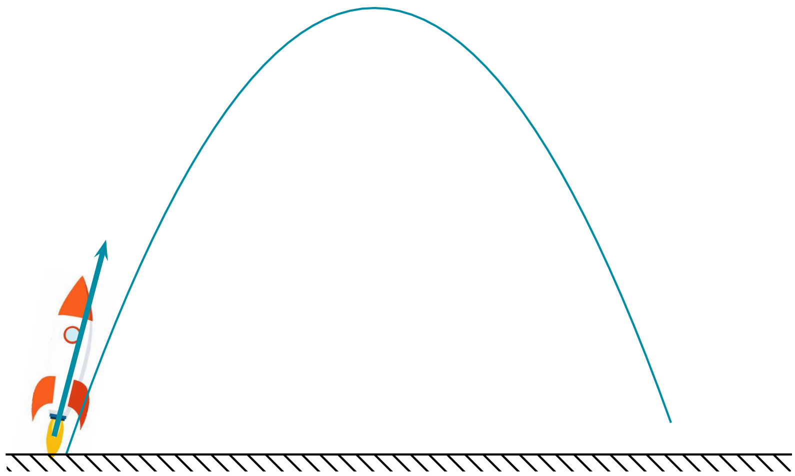


Así, tenemos que la velocidad máxima se encuentra en el vértice de la parábola. Usando Geogebra

```
Extremo(2x-0.1x^4, 0, 3)
```
$\rightarrow (1{,}71, 2{,}56)$

Por lo tanto, tenemos que la velocidad máxima se alcanza en $t = 1{,}71$ y es igual a $2{,}56$ metros por segundo. Finalmente, la partícula se ubica en $r(1{,}71) = 1{,}27$ metros del origen. $\square$

5. El motor de un cohete de juguete de 4 kg aplican sobre este una fuerza de 30 N en la misma dirección en la que despega. Un determinado día, se lanzar el cohete pero el viento ejerce un fuerza horizontal de 6 N. Se procede al lanzamiento con una rapidez inicial de 15 m/s con una inclinación de 80° respecto al suelo en contra del viento.



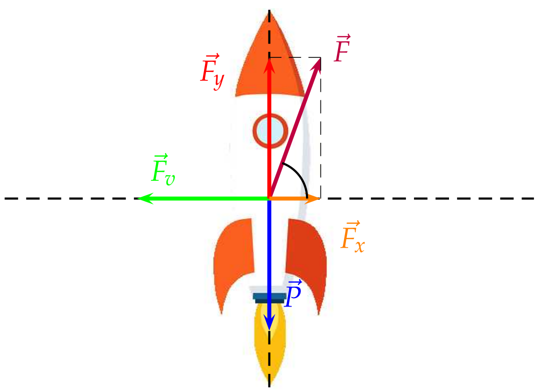
a) Elabore un diagrama de cuerpo libre sobre el cohete y, utilizando este, determine la aceleración del cohete. (2.0pt)

b) Ubique un sistema de referencia y plantee la función de la posición del cohete. (1.0pt)

c) Utilizando el literal determine cuánto tiempo le toma al cohete volver al suelo y a qué distancia horizontal llega. (1.0pt)

Solución.

a) Para el primer caso, realicemos el diagrama de cuerpo libre:



- $\vec{P}$: peso del cohete
- $\vec{F}$: fuerza del motor del cohete
- $\vec{F}_v$: fuerza del viento

Con esto, tenemos que

$$\vec{P} = (0\,,\ -39{,}2)$$
$$\vec{F} = (F\ ;\ 80°) = (5{,}21\ ,\ 29{,}54)$$
$$\vec{F}_v = (-6\ ,\ 0).$$

Aplicando la segunda ley de Newton, tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_v &= m \cdot \vec{a} \\ (5{,}21 - 6\ ,\ 29{,}54 - 39{,}2) &= 4 \cdot \vec{a} \\ (-0{,}79\ ,\ 11{,}62) &= 4 \cdot \vec{a}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la aceleración es igual a

$$\vec{a} = (-0{,}20\ ,\ -2{,}41).$$

b) Usando las funciones del movimiento y dado que la velocidad inicial es de $\vec{v_0} = (v_0\ ;\ 80^\circ) = (2{,}60\ ,\ 14{,}77)$, se sigue que

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r_0} + (2{,}60\ ,\ 14{,}77)t + \frac{1}{2}(-0{,}20\ ,\ -2{,}41)t^2 \\ &= (2{,}60t - 0{,}10t^2\ ,\ 14{,}77t - 1{,}21t^2). \end{aligned}$$

c) Para determinar el tiempo que le toma al cohete volver al suelo, resolvemos la ecuación

$$14{,}77t - 1{,}21t^2 = 0.$$

Usando Geogebra

```
ValorNumérico(Soluciones(14.77t-1.21t^2=0,t))
```
$\to \{0, 12{,}21\}$

Así, el tiempo que le toma al cohete volver al suelo es de $t = 12{,}21$ segundos. Para encontrar la distancia a horizontal a la que llega, evaluamos en $t = 12{,}21$,

$$2{,}60(12{,}21) - 0{,}10(12{,}21)^2 \approx 16{,}84$$

Así, luego de 12.21 segundos, la distancia horizontal a la que llega el cohete es de aproximadamente 16,84 metros. □