INDICACIONES

- Para la resolución de ecuaciones o para la simplificación algebraica, puede utilizar cualquier asistente computacional, pero debe incluir una captura de pantalla de la operación realizada.
- Cada resolución debe estar correctamente redactada, explicada y justificada para obtener el puntaje completo. En caso de obtener una respuesta correcta pero no presentar justificaciones, la puntuación máxima asignada será del 25 % del puntaje.

EJERCICIOS

1. Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) ¿Qué fila o columna utilizaría para calcular el determinante de A por el método de los cofactores? (0.5pt)

b) Calcule el determinante de A, paso a paso, utilizando el método de los cofactores en la tercera columna de la matriz A y, en los determinantes de orden 3×3, utilizar siempre la primera fila. (1.5pt)

c) En el procedimiento anterior, ¿cuántos determinantes de 2×2 se calcularon a la final? (0.5pt)

d) Si una matriz de 4×4 tuviese todos sus elementos diferentes de 0 y se quisiera calcular su determinante, ¿cuántos determinantes de 2×2 serían necesarios calcular? (0.5pt)

Solución.

a) Escogeríamos la segunda columna ya que es la que más entradas igual a cero tiene y esto reduciría el número de operaciones que se deben realizar.

b) Su determinante está dado por:

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Calculamos los determinantes de orden 3×3, menos el tercero pues está multiplicado por 0 tenemos, para el primero:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

para el segundo:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

y para el cuarto:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sumando los términos obtenidos, tenemos que

$$\det(A) = 1(0) - 3(0) + 0 - 2(0) = 0. \qquad \square$$

c) Se deberían calcular 12 determinantes de orden 2×2.

2. Sea $a \in \mathbb{R}$. ¿Para qué valores de a se tiene que el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & a \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

es 2? (2.0pt)

Solución.

Utilicemos Mathematica para resolver este problema. Primero, definamos la matriz A:

```
In[1]:= A={{-2,1,-2},{3,2,a},{1,-1,2}};
        A//MatrixForm
```

Out[1]=

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & a \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Realicemos el proceso de Gauss-Jordan. Para transformar el -2 de la primera fila-primera columna, en 1, realizamos la transformación: $-(1/2)F_1 \to F_1$:

```
In[2]:= A[[1]]=(-1/2)*A[[1]];
        A//MatrixForm
```

Out[2]=

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 2 & a \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para transformar el 3 de la segunda fila-primera columna, en 0, realizamos la transformación: $-3F_1 + F_2 \to F_2$:

```
In[3]:= A[[2]]=(-3)*A[[1]]+A[[2]];
        A//MatrixForm
```

Out[3]=

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & a-3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para transformar el 1 de la tercera fila-primera columna, en 0, realizamos la transformación: $-1F_1 + F_3 \to F_3$:

```
In[4]:= A[[3]]=(-1)*A[[1]]+A[[3]];
        A//MatrixForm
```

Out[4]=

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & a-3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Para transformar el $7/2$ de la segunda fila-segunda columna, en 1, realizamos la transformación: $(2/7)F_2 \to F_2$:

```
In[5]:= A[[2]]=(2/7)*A[[2]];
        A//MatrixForm
```

Out[5]=

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2(a-3)}{7} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Para transformar el $-\frac{1}{2}$ de la primera fila-segunda columna, en 0, realizamos la transformación: $(1/2)F_2 + F_1 \to F_1$:

```
In[6]:= A[[1]]=(1/2)*A[[2]]+A[[1]];
        A//MatrixForm
```

Out[6]=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a-3}{7}+1 \\ 0 & 1 & \frac{2(a-3)}{7} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Para transformar el $-1/2$ de la tercera fila-segunda columna, en 0, realizamos la transformación: $(1/2)F_2 + F_3 \to F_3$:

```
In[7]:= A[[3]]=(1/2)*A[[2]]+A[[3]];
        A//MatrixForm
```

Out[7]=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a-3}{7}+1 \\ 0 & 1 & \frac{2(a-3)}{7} \\ 0 & 0 & \frac{a-3}{7}+1 \end{pmatrix}$$

Con esto, si

$$\frac{a-3}{7}+1=0,$$

se tendrá que el rango de A es 2, así, resolviendo la ecuación:

```
In[8]:= Solve[(a-3)/7+1==0,a]
```

```
Out[8]= {{a→-4}}
```

Con lo cual, el valor de a para tener rango 2 es -4. □

3. Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere el sistema

$$\begin{cases} x \quad\quad + \ z - 3aw + t = 3, \\ ax + \ y \quad\quad + \ 2w + t = 0, \\ x \quad\quad + 2z + \ 2w + t = 0, \\ 2x + 2y - 2z - \ 2w - t = 0, \\ \quad - \ y + 4z + \ aw + t = 2. \end{cases}$$

¿Para qué valores de a se tiene que el sistema no posee solución? Tenga en cuenta que es un sistema cuadrado. (2.0pt)

Solución. Primero, llamemos A a la matriz asociada al sistema, tenemos que:

In[9]:=
```
A={{1,0,1,-3a,1},{a,1,0,2,1},{1,0,2,2,1},{2,2,-2,-2,-1},{0,-1,4,a,1}};
A//MatrixForm
```

Out[9]=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3a & 1 \\ a & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Como es un sistema cuadrado, para que no posea solución solo debemos tener que el determinante de la matriz asociada sea igual a cero, por lo tanto, calculemos el determinante de A:

In[10]:=
```
Det[A]
```

Out[10]= $-26-7a+10a^2$

Así, necesitamos que

$$10a^2 - 7a - 26 = 0,$$

resolvemos esta ecuación:

In[11]:=
```
NSolve[-26-7 a+10 a^2 ==0,a]
```

Out[11]= {{a→-1.3},{a→2.}}

Con esto, tenemos que los valores de a para que el sistema no tenga solución son, aproximadamente, $-1{,}3$ o 2. □

4. Considere los sistemas

$$(1) \begin{cases} 36x_1 \quad\quad + 12x_3 = 36, \\ 3x_1 + \ 4x_2 + 16x_3 = 47, \\ 3x_1 + 10x_2 + 22x_3 = 102, \\ \quad\quad 6x_2 + \ 6x_3 = 55. \end{cases} \quad \text{y} \quad (2) \begin{cases} 36x_1 \quad\quad + 12x_3 = 36, \\ 3x_1 + \ 4x_2 + 16x_3 = 47, \\ 3x_1 + 10x_2 + 22x_3 = 101, \\ \quad\quad 6x_2 + \ 6x_3 = 55. \end{cases}$$

a) Plantee las matrices asociada y la matrices ampliada del sistema (dar nombres diferentes). (0.5pt)

b) ¿Se puede utilizar el determinante para saber si estos sistemas tienen solución única? Justifique. (0.5pt)

c) Uno de los sistemas tiene solución única, determine, de forma justificada, cuál es. (1.0pt) *d*) Utilizando la reducción por filas de la matriz ampliada, determine la solución del sistema. (1.5pt)

Solución.

a) Para el sistema (1), tenemos que las matrices asociadas y ampliadas son

$$A = \begin{pmatrix} 36 & 0 & 12 \\ 3 & 4 & 16 \\ 3 & 10 & 22 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 36 & 0 & 12 & 36 \\ 3 & 4 & 16 & 47 \\ 3 & 10 & 22 & 102 \\ 0 & 6 & 6 & 55 \end{array}\right),$$

respectivamente. Para el sistema (2), tenemos que las matrices asociadas y ampliadas son

$$B = \begin{pmatrix} 36 & 0 & 12 \\ 3 & 4 & 16 \\ 3 & 10 & 22 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad (B|d) = \left(\begin{array}{ccc|c} 36 & 0 & 12 & 36 \\ 3 & 4 & 16 & 47 \\ 3 & 10 & 22 & 101 \\ 0 & 6 & 6 & 55 \end{array}\right),$$

b) No, ya que las matrices asociadas no son matrices cuadradas y el determinante solo puede aplicarse a matrices cuadradas.

c) Para determinar cuál de los sistemas tiene solución, calculemos el rango de cada matriz; para esto, utilicemos Mathematica. Primero ingresemos todas las matrices del primer sistema:

```
In[12]:= A={{36,0,12},{3,4,16},{3,10,22},{0,6,6}};
         Ab={{36,0,12,36},{3,4,16,47},{3,10,22,102},{0,6,6,55}};
```

y del segundo sistema:

```
In[13]:= B={{36,0,12},{3,4,16},{3,10,22},{0,6,6}};
         Bd={{36,0,12,36},{3,4,16,47},{3,10,22,101},{0,6,6,55}};
```

Ahora, calculemos los rangos de todas las matrices:

```
In[14]:= MatrixRank[A]
Out[14]= 3
In[15]:= MatrixRank[Ab]
Out[15]= 3
In[16]:= MatrixRank[B]
Out[16]= 3
In[17]:= MatrixRank[Bd]
Out[17]= 4
```

Así, tenemos que

$$\text{rang}(A) = 3, \qquad \text{rang}(A|b) = 3, \qquad \text{rang}(B) = 3, \qquad \text{y} \qquad \text{rang}(B|d) = 4.$$

Como $\text{rang}(B) \neq \text{rang}(B|d)$, se tiene que el sistema (2) es inconsistente, por lo tanto no tiene solución. Por otro lado, como $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b)$, se tiene que el sistema (1) es consistente, por lo tanto tiene solución, además, como tiene 3 incógnitas, se tiene que la solución es única.

d) Realicemos la reducción por filas de la matriz ampliada del primer sistema:

```
In[18]:= RowReduce[Ab]//MatrixForm
Out[18]=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con esto, obtenemos que el sistema (1) es equivalente a

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{9}, \\ x_2 = \dfrac{17}{2}, \\ x_3 = \dfrac{2}{3}, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Así, hemos obtenido la solución del sistema. □

5. Un saldo compensatorio se refiere a la práctica en la cual un banco requiere a quien solicita un crédito, mantenga en depósito una cierta parte del préstamo durante el plazo del mismo. Por ejemplo, si una empresa obtiene un préstamo de \$100 000, el cual requiere de un saldo compensatorio del 20 %, tendría que dejar \$20 000 en depósito y usar sólo \$80 000. Para pago de nómina, una empresa requiere \$230 000 y decide solicitar un préstamo para cubrir esta cantidad, la entidad que dará el préstamo solicita un saldo compensatorio del 15 %. ¿Cuál debe ser el monto que la empresa debe solicitar para poder cubrir el pago de la nómina? (3.0pt)

Solución.

Variables: Tomemos:

- m: monto que la empresa debe solicitar.

Planteamiento: La cantidad que la empresa va a recibir es

$$(1 - 0{,}15)m,$$

para cubrir el pago de nómina, se necesita que

$$(1 - 0{,}15)m = 230000.$$

Resolución: Resolvemos la ecuación. Despejando tenemos que

$$\begin{aligned} (1 - 0{,}15)m = 230\,000 \quad &\Longleftrightarrow \quad 0{,}85m = 230\,000 \\ &\Longleftrightarrow \quad m = \frac{230\,000}{0{,}85} \approx 270\,588{,}23 \end{aligned}$$

Respuesta: Deben solicitarse un monto de \$270 588,23, aproximadamente. □

Indicaciones

- Para la resolución de ecuaciones o para la simplificación algebraica, puede utilizar cualquier asistente computacional, pero debe incluir una captura de pantalla de la operación realizada.
- Cada resolución debe estar correctamente redactada, explicada y justificada para obtener el puntaje completo. En caso de obtener una respuesta correcta pero no presentar justificaciones, la puntuación máxima asignada será del 25 % del puntaje.

Ejercicios

1. Considere las funciones

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2-3x-x^2 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{2x}{x+2}, \end{aligned}$$

determinar, para $x, h \in \mathbb{R}$ y $h \neq 0$:

a) $f(3)$ (0.3pt)

b) $g(-2)$ (0.3pt)

c) $f(1-x^2)$ (0.5pt)

d) $(f \circ g)(x)$ (0.7pt)

e) $(g \circ f)(x)$ (0.7pt)

f) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (1.0pt)

g) $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ (1.0pt)

Solución.

a) $f(3) = 2-3(3)-(3)^2 = -16.$

b) $g(-2)$ no existe

c) $f(1-x^2) = 2-3(1-x^2)-(1-x^2)^2 = -x^4+5x^2-2.$

d)
$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\frac{2x}{x+2}\right) \\ &= 2-3\left(\frac{2x}{x+2}\right)-\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2 \\ &= \frac{-8x^2-4x+8}{(x+2)^2}. \end{aligned}$$

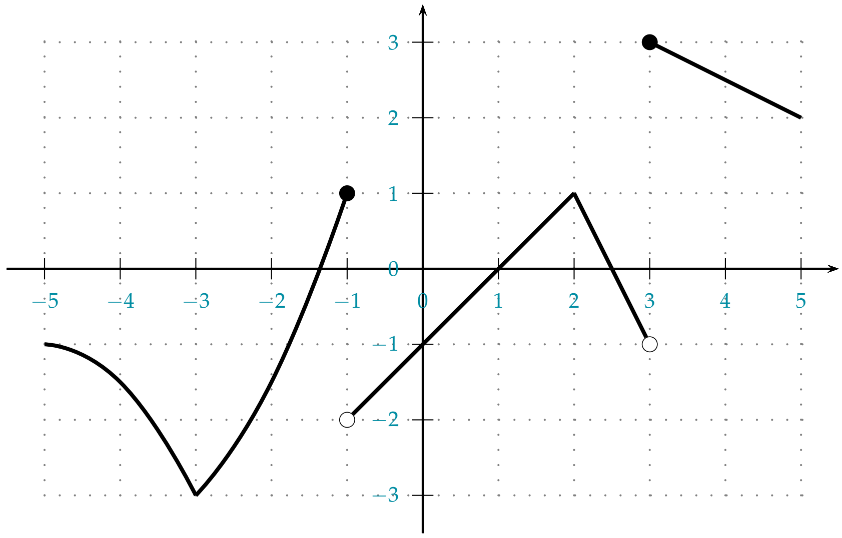
e)
$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2-3x-x^2) \\ &= \frac{2(2-3x-x^2)}{(2-3x-x^2)+2} \\ &= \frac{4-6x-2x^2}{4-3x-x^2}. \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{2-3(x+h)-(x+h)^2-(2-3x-x^2)}{h} \\ &= \frac{-h^2-2xh-3h}{h} \\ &= -h-2x-3. \end{aligned}$$

g) $$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{\dfrac{2(x+h)}{(x+h)+2} - \dfrac{2x}{x+2}}{h}$$
$$= \frac{\dfrac{2(x+h)(x+2)-2x(x+h+2)}{(x+h+2)(x+2)}}{h}$$
$$= \frac{\dfrac{4h}{(x+h+2)(x+2)}}{h}$$
$$= \frac{4}{(x+h+2)(x+2)}.$$

□

2. Considere la función $f\colon [-5,5] \to \mathbb{R}$ cuya gráfica se muestra a continuación.



a) Determine los intervalos donde es estrictamente creciente. (1.0pt)

b) Determine los intervalos donde es estrictamente decreciente. (1.0pt)

c) Determine el valor de $f(-1)$, $f(0)$ y $f(1)$. (0.5pt)

d) Determine $\operatorname{img}(f)$. (0.5pt)

Solución.

a) La función es estrictamente creciente en $[-3,-1]$ y $]-1,2]$.

b) La función es estrictamente decreciente en $[-5,-3]$, $[2,3[$ y $[3,5]$.

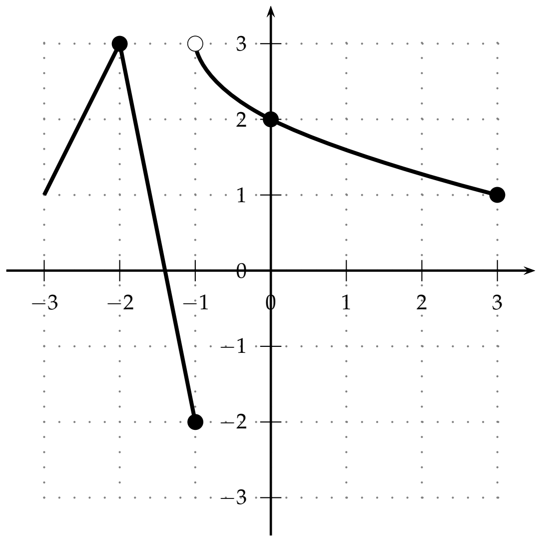
c) Tenemos que $f(-1) = 1$, $f(0) = -1$ y $f(1) = 0$.

d) Tenemos que $\operatorname{img}(f) = [-3,1] \cup [2,3]$. □

3. Dibuje una función $f\colon [-3,3] \to \mathbb{R}$ tal que

- $f(-2) = 3$, $f(-1) = -2$, $f(0) = 2$, $f(3) = 1$; (0.8pt)
- sea estricta creciente en $[-3,-2]$; (0.4pt)
- sea estricta decreciente en $[-2,-1[$; (0.4pt)
- sea estricta decreciente en $[-1,3]$. (0.4pt)

Solución. Una posible respuesta es:



□

4. Una empresa fabrica dos productos: zapatos y zapatillas. Por la infraestructura, la empresa solo puede fabricar 100 productos en total. Por otro lado, la empresa tiene un gasto fijo semanal de \$1600, el costo de fabricar los zapatos es de \$40 el par y el de las zapatillas, \$50. Cada par de zapatos se vende en \$60 y el de zapatillas, \$75.

   a) Modele la utilidad que obtiene la empresa en función de la cantidad de zapatos producidos. (2.0pt)

   b) Si se producen 40 zapatos, ¿cuál es la utilidad de la empresa? (0.5pt)

   c) Si se desea tener una utilidad semanal de \$300, ¿cuántos pares de zapatos y zapatillas deben producirse? (1.0pt)

Solución.

a) Para el modelamiento, consideremos lo siguiente:

Variables:

- x: cantidad de zapatos que la empresa produce.
- y: cantidad de zapatillas que la empresa produce.
- $U(x)$: utilidad que obtiene la empresa en función de la cantidad de zapatos producidos.

Planteamiento: Tenemos que el ingreso por zapatos y zapatillas es:

$$60x + 75y,$$

respectivamente; por otro lado, los gastos están dados por

$$1600 + 40x + 50y,$$

por lo tanto, la utilidad está dada por (recordando que solo se podrían fabricar un máximo de 100 zapatos):

$$\begin{aligned} U\colon [0,100] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 60x + 75y - (1600 + 40x + 50y) = 20x + 25y - 1600. \end{aligned}$$

Ahora, dado que solo se pueden producir 100 artículos, es necesario que

$$x + y = 100,$$

de donde

$$y = 100 - x,$$

con esto, la función U nos queda

$$\begin{aligned} U\colon [0,100] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 20x + 25(100-x) - 1600 = 900 - 5x. \end{aligned}$$

b) Evaluemos la función en $x = 40$:

$$U(40) = 900 - 5(40) = 700.$$

Por lo tanto, la utilidad de la empresa si se producen 40 pares de zapatos es de $\$700$.

c) Buscamos x tal que $U(x) = 300$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} U(x) = 300 \quad &\Longleftrightarrow \quad 900 - 5x = 300 \\ &\Longleftrightarrow \quad -5x = -600 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 120. \end{aligned}$$

Pero x no está en el dominio de la función, por lo tanto, no existe una cantidad de zapatos y zapatillas que se pueda producir que generen una utilidad de \$300. □

5. Determinar los intervalos de monotonía y la imagen de la función (4.0pt)

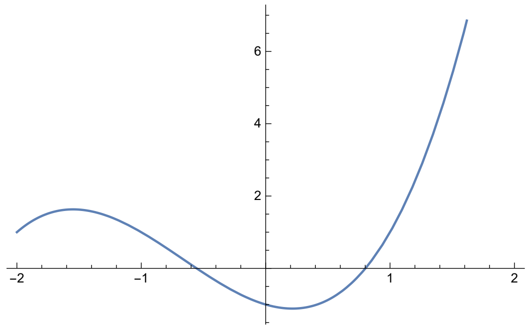
$$\begin{aligned} g\colon [-2,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 + 2x^2 - x - 1. \end{aligned}$$

Solución.

Definimos la función y graficamos:

```
In[1]:= g[x_]=x^3+2x^2-x-1;
        Plot[g[x],{x,-2,2}]
```

Out[1]=



Determinemos los máximos y los mínimos de la función:

- La función empieza con un mínimo en -2, donde el mínimo es

```
In[2]:= g[-2]
Out[2]= 1.
```

- Buscamos un máximo en $[-2,-1]$

```
In[3]:= FindMaximum[{g[x],-2≤x≤-1},x] // N
Out[3]= {1.63113,{x→-1.54858}}.
```

Así, tenemos que la función alcanza un máximo en $-1{,}54858$ y el máximo es $1{,}6311$.

- Buscamos un mínimo en $[-1, -1]$

```
In[4]:= FindMinimum[{g[x],-1≤x≤1},x]

Out[4]= {-1.11261,{x→0.21525}}
```

  Así, la función alcanza un mínimo en 0,21525 y el mínimo es $-1{,}11261$.

- Finalmente, la función alcanza un máximo en 2 donde el máximo es

```
In[5]:= g[2]

Out[5]= 13.
```

Por lo tanto, tenemos que la imagen de la función es

$$\operatorname{img}(g) = [-1{,}11261\ ,\ 13]\,.$$

De esta manera, la función

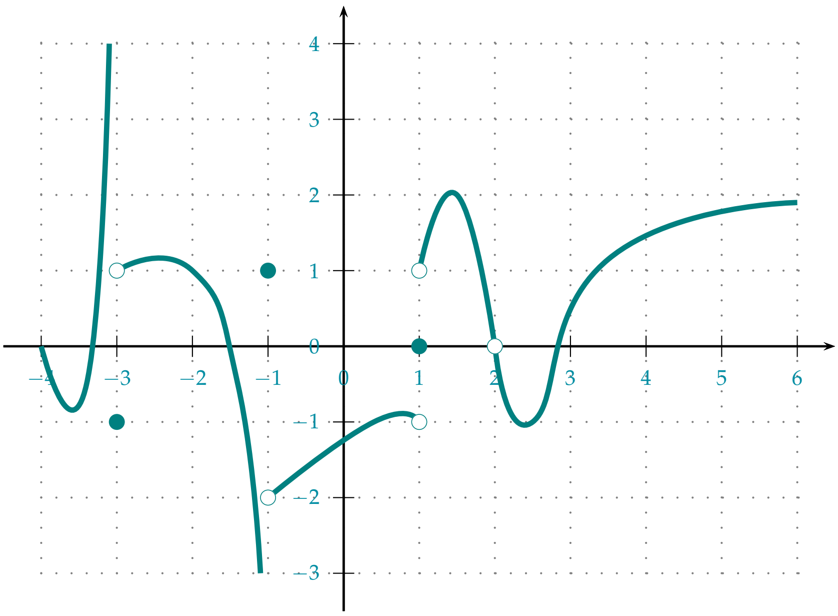
- crece en $[-2\ ,\ -1{,}54858]$ y $[0{,}24525\ ,\ 2]$;
- decrece en $[-1{,}54858\ ,\ 0{,}24525]$. $\square$

Indicaciones

- Para la resolución de ecuaciones o para la simplificación algebraica, puede utilizar cualquier asistente computacional, pero debe incluir una captura de pantalla de la operación realizada.
- Cada resolución debe estar correctamente redactada, explicada y justificada para obtener el puntaje completo. En caso de obtener una respuesta correcta pero no presentar justificaciones, la puntuación máxima asignada será del 25 % del puntaje.
-

Ejercicios

1. Considere la gráfica de la función $f\colon\ [-4,+\infty[\ \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, cuya gráfica se muestra a continuación:



Determine: (4.0pt)

a) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

d) $f(-3)$

e) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

h) $f(-2)$

i) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

j) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

k) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

l) $f(-1)$

m) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

n) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

ñ) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

o) $f(1)$

p) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

q) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

r) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

s) $f(2)$

Además (para las preguntas de continuidad justificar la respuesta): (2.2pt)

t) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

u) ¿f es continua en -3?

v) ¿f es continua en -2?

w) ¿f es continua en -1?

x) ¿f es continua en 1?

y) ¿f es continua en 2?

Solución. Tenemos que:

a) $\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$ *e)* $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 1$ *i)* $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ *m)* $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$ *p)* $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$

b) $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 1$ *f)* $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 1$ *j)* $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -2$ *n)* $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ *q)* $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$

c) $\lim_{x\to -3} f(x)$ no existe *g)* $\lim_{x\to -2} f(x) = 1$ *k)* $\lim_{x\to -1} f(x)$ no existe *ñ)* $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe *r)* $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$

d) $f(-3) = -1$ *h)* $f(-2) = 1$ *l)* $f(-1) = 1$ *o)* $f(1) = 0$ *s)* $f(2)$ no existe

Además:

t) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$

u) f no es continua en -3 dado que el límite no existe.

v) f es continua en -2 dado que el límite coincide con el valor de la función.

w) f no es continua en -1 dado que el límite no existe.

x) f no es continua en 1 dado que el límite no existe.

y) f no es continua en 2 dado que la función no está definida en ese punto. □

2. Dibuje una función $f\colon \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$, que cumpla que (3.6pt)

a) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$

b) $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 2$

c) $f(-2) = 1$

d) $\lim_{x\to 0} f(x)$ no exista

e) $f(0) = -3$

f) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 4$

g) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -1$

h) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 1$

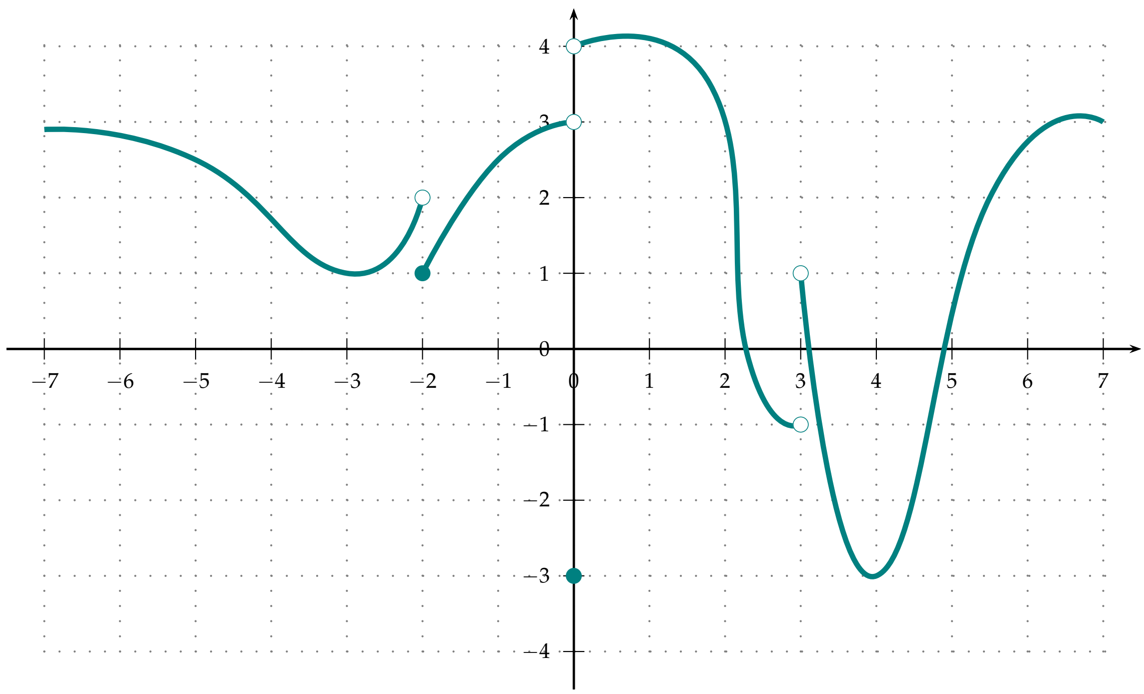
i) $f'(4) = 0$

j) f' sea negativa en $]3,4[$

k) f' sea positiva en $]-3,-2[$

l) $f(2) = 3$

Solución. Una posible gráfica puede ser



□

3. Determine los siguientes límites de manera analítica explicando cada paso: (4.0pt)

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^4-1}$

b) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2+2x-8}{x+4}$

c) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2+4x+3}{x^2+2x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^2-2x+9}{2x^2-5}$

Solución.

a) Primero, determinemos el límite del denominador, tenemos que

$$\lim_{x\to 1}(x^4-1) = (1)^4 - (1) = 0,$$

como este límite es igual a 0, no podemos aplicar ninguna propiedad directamente. Para continuar con el análisis, calculemos el límite del numerador

$$\lim_{x\to 1}(x^5-1) = (1)^5 - 1 = 0,$$

como el límite del numerador también es 0, procedemos a realizar una manipulación algebraica, notemos que para todo $x \neq 1$, tenemos que

$$\frac{x^5-1}{x^4-1} = \frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^3+x^2+x+1)} = \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}.$$

Con esto, tenemos que

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^4-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}.$$

Como tenemos nuevamente una fracción, calculamos el límite del denominador:

$$\lim_{x\to 1}(x^3+x^2+x+1) = 4,$$

como este límite es diferente de 0, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^4-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to 1} x^4+x^3+x^2+x+1}{\lim\limits_{x\to 1} x^3+x^2+x+1}\\ &= \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

b) Primero, determinemos el límite del denominador, tenemos que

$$\lim_{x\to -4}(x+4) = -4+4 = 0,$$

como este límite es igual a 0, no podemos aplicar ninguna propiedad directamente. Para continuar con el análisis, calculemos el límite del numerador:

$$\lim_{x\to -4}(x^2+2x-8) = (-4)^2 + 2(-4) - 8 = 0,$$

como el límite del numerador también es 0, procedemos a realizar una manipulación algebraica, notemos que para todo $x \neq -4$, tenemos que

$$\frac{x^2+2x-8}{x+4} = \frac{(x+4)(x-2)}{(x+4)} = (x-2).$$

Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -4}\frac{x^2+2x-8}{x+4} &= \lim_{x\to -4}(x-2)\\ &= -4-2 = -6.\end{aligned}$$

c) Primero, determinemos el límite del denominador, tenemos que

$$\lim_{x\to -1^+}(x^2+2x+1) = (-1)^2+2(-1)+1 = 0,$$

como este límite es igual a 0, no podemos aplicar ninguna propiedad directamente. Para continuar con el análisis, calculemos el límite del numerador:

$$\lim_{x\to -1^+}(x^2+4x+3) = (-1)^2+4(-1)+3 = 0,$$

como el límite del numerador también es 0, procedemos a realizar una manipulación algebraica, notemos que para todo $x \neq -1$, tenemos que

$$\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x+1} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+1)} = \frac{x+3}{x+1}.$$

Con esto, tenemos que

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to -1^+}\frac{x+3}{x+1}.$$

Como tenemos nuevamente una fracción, calculamos el límite del denominador:

$$\lim_{x\to -1^+}(x+1) = -1+1 = 0,$$

como este límite es igual a 0, no podemos aplicar ninguna propiedad directamente. Para continuar con el análisis, calculemos límite del numerador:

$$\lim_{x\to -1^+}(x+3) = (-1)+3 = 2.$$

Como el límite del numerador existe y es diferente de 0 y el del denominador es igual a 0, el límite podría ser infinito, para esto, analicemos los signos:

- Numerador: $\lim\limits_{x\to -1^+}(x+3) = (-1)+3 = 2$, positivo.
- Denominador: $(x+1)$, cuando x se aproxima a -1, $x+1$ se acerca a 0, por otro lado, dado que x se acerca por derecha, tenemos que $x > -1$, de donde, $x+1 > 0$, por lo tanto es positivo, así, $x+1$ es positivo.

Con esto, tenemos que

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to -1^+}\frac{x+3}{x+1} = +\infty.$$

d) Tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty}\frac{4x^2-2x+9}{2x^2-5} &= \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x^2}\left(4x^2-2x+9\right)}{\frac{1}{x^2}\left(2x^2-5\right)} \\ &= \lim_{x\to +\infty}\frac{4-\frac{2}{x}+\frac{9}{x^2}}{2-\frac{5}{x^2}}.\end{aligned}$$

Analicemos el límite del denominador:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(2-\frac{5}{x^2}\right) = 2 \neq 0,$$

como es diferente de 0, tenemos que

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{4-\frac{2}{x}+\frac{9}{x^2}}{2-\frac{5}{x^2}} = \frac{4-0+0}{2-0} = \frac{4}{2} = 2.$$ □

4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Dada la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x+3 & \text{si } x<4, \\ ax^2-bx+3 & \text{si } 4\leq x<5, \\ 2x-a+b & \text{si } x\geq 5 \end{cases} \end{aligned}$$

¿cuáles deben ser los valores de a y b para que los límites $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ existan? (4.0pt)

Solución. Calculemos, primero, los límites laterales en $x=4$:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-}(x+3) = (4)+3 = 7,$$

por otro lado,

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+}(ax^2-bx+3) = a(4)^2-b(4)+3 = 16a-4b+3.$$

Para que el límite exista, estos límites deben ser iguales, por lo tanto, es necesario que $7=16a-4b+3$, es decir,

$$4a-b=1. \tag{1}$$

Ahora, calculemos los límites laterales en $x=5$:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-}(ax^2-bx+3) = a(5)^2-b(5)+3 = 25a-5b+3,$$

por otro lado,

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+}(2x-a+b) = 2(5)-a+b = 10-a+b.$$

Así, para que el límite exista, estos límites deben ser iguales, por lo tanto, es necesario que $25a-5b+3 = 10-a+b$, es decir,

$$26a-6b=7. \tag{2}$$

De donde, tomando las ecuaciones (1) y (2), tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4a-b &= 1 \\ 26a-6b &= 7. \end{cases}$$

Así, el valor de a y b para que los límites $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ existan es $1/2$ y 1 respectivamente. □

5. Dada la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}\setminus\{2/3\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2+3x}{2-3x}, \end{aligned}$$

determine, utilizando la definición, $f'(x)$, para $x\in\mathbb{R}\setminus\{2/3\}$, finalmente, comprobar la respuesta en un sistema computacional. (2.0pt)

Solución. Tenemos que la razón de cambio promedio de la función es

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\dfrac{(x+h)^2+3(x+h)}{2-3(x+h)} - \dfrac{x^2+3x}{2-3x}}{h} \\ &= \frac{\dfrac{(2-3x)((x+h)^2+3(x+h)) - (x^2+3x)(2-3(x+h))}{(2-3x)(2-3(x+h))}}{h} \\ &= \frac{-3h^2x+2h^2-3hx^2+4hx+6h}{h(2-3x)(2-3(x+h))} \end{aligned}$$

$$= \frac{-3hx + 2h - 3x^2 + 4x + 6}{(2-3x)(2-3(x+h))}$$

por lo tanto

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-3hx + 2h - 3x^2 + 4x + 6}{(2-3x)(2-3(x+h))} = \frac{-3x^2 + 4x + 6}{(2-3x)^2}.$$

Podemos comprobar esto en Mathemtaica con el comando `D[(x^2+3x)/(2-3x),x]`. $\square$

Escuela de Ciencias Físicas y Matemática
Matemática Aplicada • Examen Final

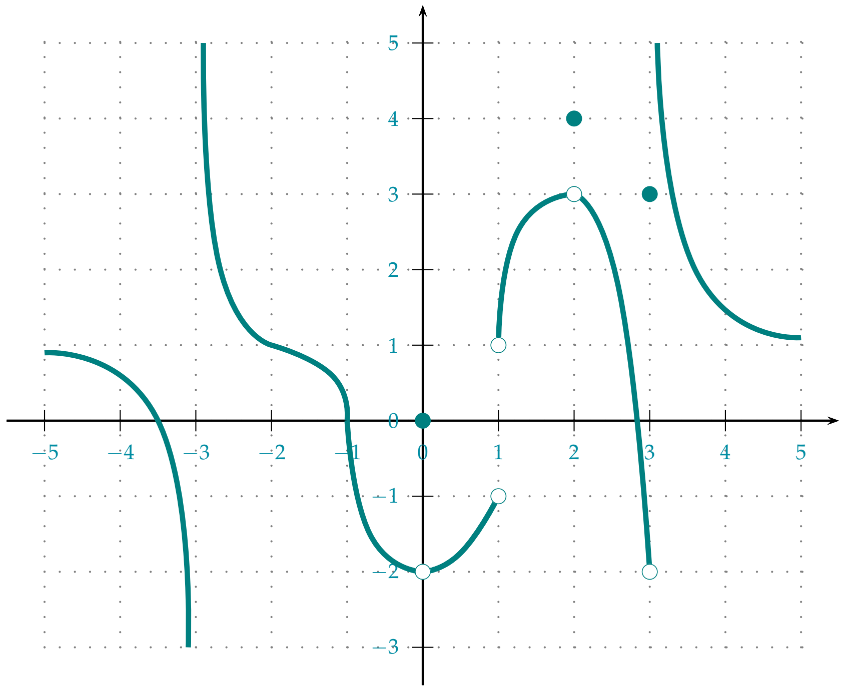
Semestre 2020-2 — Mat. Andrés Merino

Indicaciones

- Para la resolución de ecuaciones o para la simplificación algebraica, puede utilizar cualquier asistente computacional, pero debe incluir una captura de pantalla de la operación realizada.
- Cada resolución debe estar correctamente redactada, explicada y justificada para obtener el puntaje completo, a menos que se indique lo contrario. En caso de obtener una respuesta correcta pero no presentar justificaciones, ni explicaciones del procedimiento, la nota asignada será del 0 %.
- Cada variable que aparezca en la resolución de cada ejercicio debe estar de manera explícita su significado, caso contrario, la nota asignada será del 0 %.
- La respuesta a cada pregunta se la debe realizar de manera explícita, en caso de no ser así, no contará como respuesta.
- Para la resolución de cada ejercicios, se deben utilizar los métodos vistos en clases, en caso de utilizar otros métodos y llegar a la respuesta correcta, se asignará máximo el 50 % de la nota.
- En caso de presentarse una sospecha de deshonestidad académica (copia), el examen no será calificado y se presentará el caso a las autoridades pertinente para que sean ellas quienes determinen el procedimiento correspondiente.
- La solución del examen debe ser entregada hasta el día domingo 13 de diciembre, a las 7:00. Esta fecha no será aplazada bajo ninguna circunstancia.

Ejercicios

1. Considere la gráfica de la función $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\} \to \mathbb{R}$, cuya gráfica se muestra a continuación:



Determine (no necesita presentar justificaciones del numeral 1.1 al 1.20): (4.0pt)

1.1) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$	*1.5)* $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$	*1.9)* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$	*1.13)* $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$	*1.17)* $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$
1.2) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$	*1.6)* $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$	*1.10)* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$	*1.14)* $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$	*1.18)* $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$
1.3) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$	*1.7)* $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$	*1.11)* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$	*1.15)* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$	*1.19)* $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$
1.4) $f(-3)$	*1.8)* $f(-2)$	*1.12)* $f(0)$	*1.16)* $f(1)$	*1.20)* $f(3)$

Además: (2.2pt)

1.21) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

1.22) ¿f es continua en -3?

1.23) ¿f es continua en -2?

1.24) ¿f es continua en -1?

1.25) ¿f es continua en 1?

1.26) ¿f es continua en 2?

Finalmente: (3.5pt)

1.27) Determine los intervalos donde es estrictamente creciente (no necesita presentar justificaciones).

1.28) Determine los intervalos donde es estrictamente decreciente (no necesita presentar justificaciones).

1.29) ¿$f'(-4)$ es positiva, negativa o 0?

1.30) ¿$f'(5)$ es positiva, negativa o 0?

1.31) ¿$f'(-1)$ es positiva, negativa o 0?

Solución. Tenemos que:

a) $\lim_{x\to-3^-} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x\to-3^+} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x\to-3} f(x)$ no existe

d) $f(-3)$ no existe

e) $\lim_{x\to-2^-} f(x) = 1$

f) $\lim_{x\to-2^+} f(x) = 1$

g) $\lim_{x\to-2} f(x) = 1$

h) $f(-2) = 1$

i) $\lim_{x\to0^-} f(x) = -2$

j) $\lim_{x\to0^+} f(x) = -2$

k) $\lim_{x\to0} f(x) = -2$

l) $f(0) = 0$

m) $\lim_{x\to1^-} f(x) = -1$

n) $\lim_{x\to1^+} f(x) = 1$

ñ) $\lim_{x\to1} f(x)$ no existe

o) $f(1)$ no existe

p) $\lim_{x\to3^-} f(x) = -2$

q) $\lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty$

r) $\lim_{x\to3} f(x)$ no existe

s) $f(3) = 3$

Además:

t) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

u) f no es continua en -3 dado que la función no está definida en ese punto y el límite no existe.

v) f si es continua en -2 dado que el límite existe y conincide con el valor de la función en ese punto.

w) f si es continua en -1 dado que el límite existe y coincide con el valor de la función en ese punto.

x) f no es continua en 1 dado que la función no está definida en ese punto y el límite no existe.

y) f no es continua en 2 dado que el límite no coincide con el valor de la función en ese punto. □

2. Sean $b, c \in \mathbb{R}$. Dada la función

$$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} x^2 + 3b - c & \text{si } x < 2, \\ bx + 4c & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 3x - 2 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

¿cuáles deben ser los valores de b y c para que la función sea continua en 2 y 3? Con los valores hallado, ¿a qué es igual $\lim_{x\to2} h(x)$ y $\lim_{x\to3} h(x)$? (3.0pt)

Solución. Calculemos, primero, los límites laterales en $x = 2$:

$$\lim_{x\to2^-} h(x) = \lim_{x\to2^-} (x^2 + 3b - c) = (2)^2 + 3b - c = 4 + 3b - c,$$

por otro lado,

$$\lim_{x\to2^+} h(x) = \lim_{x\to2^+} (bx + 4c) = b(2) + 4c = 2b + 4c.$$

Para que el límite exista, estos límites deben ser iguales, por lo tanto, es necesario que $4 + 3b - c = 2b + 4c$, es decir,

$$-b + 5c = 4. \tag{1}$$

Ahora, calculemos los límites laterales en $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3^-} h(x) = \lim_{x\to 3^-} (bx + 4c) = b(3) + 4c = 3b + 4c,$$

por otro lado,

$$\lim_{x\to 3^+} h(x) = \lim_{x\to 3^+} (3x - 2) = 3(3) - 2 = 7.$$

Así, para que el límite exista, estos límites deben ser iguales, por lo tanto, es necesario que $3b + 4c = 7$, es decir,

$$3b + 4c = 7. \tag{2}$$

De donde, tomando las ecuaciones (1) y (2), tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -b + 5c & = 4 \\ 3b + 4c & = 7. \end{cases}$$

Con esto, $b = 1$ y $c = 1$. Así, el valor de b y c para que los límites $\lim_{x\to 2} h(x)$ y $\lim_{x\to 3} h(x)$ existan es 1. Finalmente, tenemos que

$$\lim_{x\to 2} h(x) = 6 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 3} h(x) = 7. \qquad \square$$

3. Suponga que una empresa tiene una utilidad marginal de \$14,25 por unidad producida cuando se están produciendo 36 unidades de un artículo. Si se sabe que, a este nivel de producción, el precio por artículo es de \$126,75, el costo por artículo es de \$101,15 y este está disminuyendo a razón de \$1,15 por unidad producida; a este nivel de producción, ¿el precio por artículo está disminuyendo o aumentando?, ¿a qué razón lo hace? (Para resolver el ejercicio, plantee el problema como una razón de cambio relacionada). (4.0pt)

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- q : cantidad de unidades producidas.
- $p(q)$: precio unitario en función de la cantidad de unidades producidas, en dólares.
- $c(q)$: costo unitario en función de la cantidad de unidades producidas, en dólares.
- $U(q)$: utilidad en función de la cantidad de unidades producidas, en dólares.

Además, como al producir 36 unidades, su utilidad marginal es de \$14,25, tenemos que

$$U'(36) = 14{,}25,$$

por otro lado, como el costo unitario es de \$101,15, se tiene que

$$c(36) = 101{,}15,$$

y, como este disminuye a razón de \$1,15 por unidad producida, tenemos que

$$c'(36) = -1{,}15,$$

finalmente, como el precio por artículo es de \$126,75 por unidad producida, tenemos que

$$p(36) = 126{,}75.$$

Con esto, buscamos el precio marginal, es decir $p'(36)$.

Ahora, relacionando nuestras variables, tenemos que

$$U(q) = p(q) \cdot q - c(q) \cdot q.$$

Derivando, obtenemos que

$$U'(q) = p'(q) \cdot q + p(q) - (c'(q) \cdot q + c(q)),$$

evaluando en $q = 36$, tenemos que

$$U'(36) = p'(36)\cdot(36) + p(36) - (c'(36)\cdot(36) + c(36)),$$

con lo cual,

$$14{,}25 = p'(36)(36) + 126{,}75 - (-1{,}15(36) + 101{,}15),$$

de donde,

$$p'(36) = -1{,}4652.$$

Por lo tanto, el precio por artículo está disminuyendo a razón de \$1,46 por unidad producida. □

4. Considere la función

$$\begin{aligned} h\colon [-3,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (1-x)^3(5x^3 - x^2 - 48x - 36) \end{aligned}$$

a) Determine analíticamente los extremos globales de la función (si son máximo o mínimo, el lugar dónde los alcanzan y su valor). (2.0pt)

b) Determine analíticamente los extremos locales de la función (si son máximos o mínimos, el lugar dónde los alcanzan y su valor). (2.0pt)

Solución. Determinemos la primera y segunda derivada de h

$$h'(x) = -(1-x)^3\left(15x^2 - 2x - 48\right) - 3(1-x)^2\left(5x^3 - x^2 - 48x - 36\right)$$

y

$$h''(x) = (1-x)^3(-2+30x) - 6(1-x)^2(-48-2x+15x^2) + 6(1-x)(-36-48x-x^2+5x^3).$$

Busquemos los puntos críticos, para eso, igualemos la primera derivada a 0:

$$h'(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \left(x = -2 \quad\vee\quad x = -\frac{1}{3} \quad\vee\quad x = 1 \quad\vee\quad x = 3\right).$$

Como 3 no está en el dominio de la función, lo descartamos. Así, la función tiene puntos críticos en -2, $-\frac{1}{3}$ y 1.

Para determinar los extremos globales de la función; evaluamos la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo de definición de la función:

x	$h(x)$
-3	-2304
-2	432
$-\frac{1}{3}$	$-48{,}1097$
1	0
2	96

Por otro lado, para determinar los extremos relativos, evaluemos la segunda derivada de la función en los puntos críticos:

$$h''(-2) = -2250, \qquad h''\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 296{,}2962, \qquad \text{y} \qquad h''(1) = 0.$$

Con esto, tenemos que:

a) la función h tiene un máximo global en $x = -2$, con $h(-2) = 432$ y un mínimo global en $x = -3$ con $h(-3) = -2304$.

b) la función h tiene un máximo local en $x = 2$ con $h\,(2) = 96$ y un mínimo local en $x = -\frac{1}{3}$ con $h\left(-\frac{1}{3}\right) \approx -48{,}1097$. □

5. Suponga que vende un artículo a \$125 la unidad, a este precio, puede vender 34 unidades de este artículo. Luego de realizar un estudio de elasticidad de la demanda, se concluye que por cada rebaja en el precio de \$1,75 aumentará sus ventas en 3 unidades. Determine el precio que generarán la mayor cantidad de ingresos. (Para la resolución del ejercicio debe constar el modelamiento y el procedimiento de optimización) (4.0pt)

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- x : descuento, en dólares.
- $I(x)$: ingreso en función del descuento, en dólares.

Tenemos que, la función del ingreso es:

$$\begin{aligned} I\colon [0,125] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \left(34 + 3 \cdot \frac{x}{1{,}75}\right)(125 - x). \end{aligned}$$

Derivando esta función, tenemos, para $x \in \,]0,125[$:

$$I'(x) = 180{,}28 - 3{,}42x.$$

Buscamos puntos críticos, para esto, resolvemos la ecuación $I'(x) = 0$, con lo cual, tenemos que

$$x = 52{,}58.$$

Así, como la función está definida en un intervalo cerrado y acotado, evaluamos la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo de definición de la función:

x	$I(x)$
0	4250
52,58	8990,01
125	0

Por lo tanto, el precio por unidad para obtener el máximo ingreso es de \$72,42. □