1. Objetivos

1. Calcular límites utilizando Mathematica.
2. Calcular razones de cambio utilizando Mathematica.
3. Calcular derivadas utilizando Mathematica.
4. Calcular aproximaciones utilizando Mathematica.
5. Determinar curvas de ajuste utilizando Mathematica.

2. Instrucciones

Abrir el programa "Wolfram Matemathica" o ingresar en el enlace `https://www.wolframcloud.com/`. Recuerde, al inicio de cada ejercicio, correr la instrucción `Clear["Global‘*"]`.

2.1 Límites y derivadas

El objetivo de este punto es calcular límites y derivadas, además, analizarlos a partir de sus gráficas los resultados. En un archivo de Mathematica (llamarlo `ApellidoNombre_Lab02_1.nb`), realizar el siguiente procedimiento.

Ejercicio 1: Cálculo de límites

En este ejercicio calcularemos límites y daremos una interpretación a los resultados.

1. Calcular
$$\lim_{x\to 2} \frac{6x-12}{x^2-4}.$$
2. Grafique la función de la cual se acabó de determinar el límite y explique, utilizando el gráfico, el resultado obtenido.
3. Repita el proceso para
$$\lim_{x\to -2} \frac{6x-12}{x^2-4}, \qquad \lim_{x\to -2^+} \frac{6x-12}{x^2-4}, \qquad \lim_{x\to -2^-} \frac{6x-12}{x^2-4},$$
$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x+3}-x, \qquad \lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+2x+3}-x.$$

Ejercicio 2: Cálculo de razones de cambio

En este ejercicio determinaremos las razones de cambio y las derivadas de algunas funciones utilizando la definición.

1. Definir la función f dada por $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

2. Determine la razón de cambio promedio de f entre x y $x + h$.

3. Determine, utilizando la definición de derivada, $f'(x)$.

4. Repetir los numerales anteriores para las funciones dadas por

   - $g(x) = \sqrt{x}$
   - $z(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
   - $r(x) = \exp(x)$
   - $a(x) = \exp(x^2)$

Ejercicio 3: Cálculo de derivadas

En este ejercicio calcularemos las derivadas de una función.

1. Determinar:

   a) $\left(x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1\right)'$

   b) $\left(\dfrac{x^5 + x^2 + 1}{x^2 + 1}\right)'$

   c) $\left(\dfrac{x^5 + x^2 + 1}{x^2 + 1}\right)''$

   d) $\left(\dfrac{e^x + \cos(x)}{\operatorname{sen}(x) + 2}\right)'$

   e) $\left(\cos(\ln(x^2 + 1)))\right)'$

   f) $\left(\cos(\ln(x^2 + 1)))\right)''$

   g) $(f(x)g(x))'$

   h) $(f(x)g(x))''$

   i) $(f(x)g(x))'''$

Ejercicio 4: Aproximaciones

En este ejercicio determinaremos aproximaciones lineales y cuadráticas de algunas funciones.

1. Definir la función f dada por $f(x) = \ln(x)$.

2. Determine la aproximación lineal y cuadrática de f alrededor de $a = 1$.

3. Graficar la función y sus aproximaciones.

4. Evaluar la función y sus aproximaciones en $a + 0{,}1$ y $a - 0{,}1$.

5. Repetir los numerales anteriores para las funciones dadas por

   - $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, con $a = 2$;
   - $z(x) = \exp(x^2)$, con $a = 0$;
   - $r(x) = \cos(x)$, con $a = -\pi$

2.2 Funciones de ajuste

El objetivo de este punto es determinar funciones de ajuste. En un archivo de Mathematica (llamarlo
`ApellidoNombre_Lab02_2.nb`), realizar el siguiente procedimiento.

Ejemplo

Manipular el archivo `https://bit.ly/39F1xU0` para explorar los comandos necesarios para realizar ajuste de funciones que siguen los siguientes modelos:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto a \cdot e^{kt} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{a}{b + e^{-kt}}, \end{aligned}$$

donde $a, b, j \in \mathbb{R}$ son los parámetros de los modelos.

Ejercicio 1: Funciones de ajuste

1. Reproducir el proceso detallado en el ejemplo para una nueva lista de datos.

Límites y derivadas

Andrés Merino

Ejercicio 1: Cálculo de límites

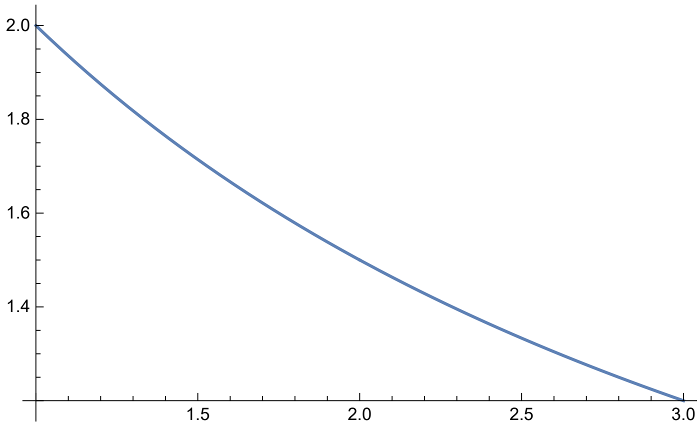
Para el primer límite

1. Calcular límite

In[ ]:=
```
Limit[(6 x - 12) / (x^2 - 4), x -> 2]
```

Out[ ]= $\frac{3}{2}$

In[ ]:=
```
Plot[(6 x - 12) / (x^2 - 4), {x, 1, 3}]
```

Out[ ]=


Como podemos ver, la función toma valores cercanos a 3/2, cuando x está cerca de 2.

Para el segundo límite

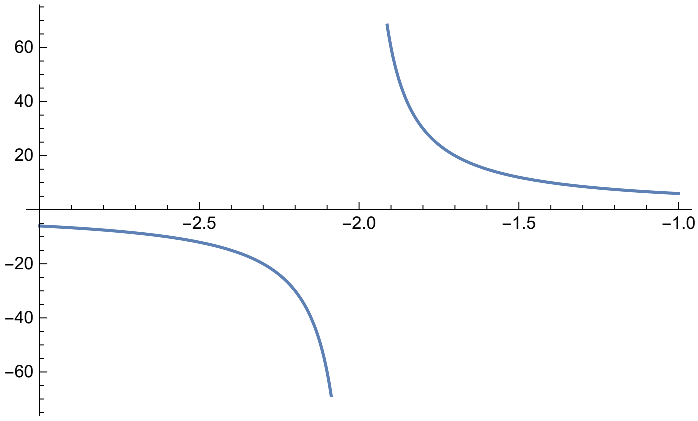
1. Calcular límite

In[1]:=
```
Limit[(6 x - 12) / (x^2 - 4), x → -2]
```

Out[1]=
```
Indeterminate
```

In[2]:=
```
Plot[(6 x - 12) / (x^2 - 4), {x, -3, -1}]
```

Out[2]=



Como podemos ver, la función toma valores positivos cada vez más grandes cuando x está cerca de 2 por la derecha y valores negativos cada vez más grandes cuando nos acercamos por la izquierda, por lo tanto, el límite no existe.

Para el tercer límite

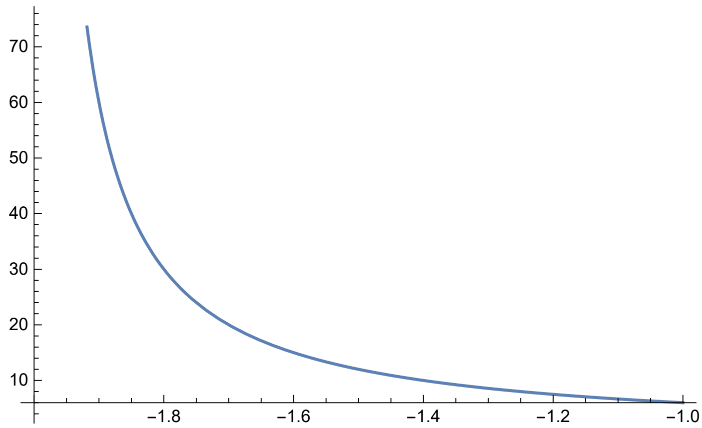
1. Calcular límite

In[3]:=
```
Limit[(6 x - 12) / (x^2 - 4), x → -2, Direction → -1]
```

Out[3]= ∞

In[4]:=
```
Plot[(6 x - 12) / (x^2 - 4), {x, -2, -1}]
```

Out[4]=



Como podemos ver, la función toma valores positivos cada vez más grandes cuando x está cerca de 2 por la derecha, por lo tanto, el límite es más infinito.

Para el cuarto límite

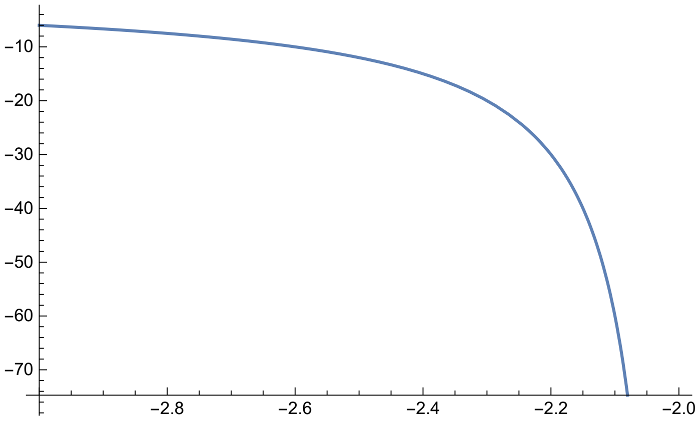
1. Calcular límite

In[5]:=
```
Limit[(6 x - 12) / (x^2 - 4), x → -2, Direction → 1]
```

Out[5]= $-\infty$

In[6]:= `Plot[(6 x - 12) / (x^2 - 4), {x, -3, -2}]`

Out[6]=



Como podemos ver, la función toma valores negativo cada vez más grandes cuando x está cerca de 2 por la izquierda, por lo tanto, el límite es menos infinito.

Para el quinto límite

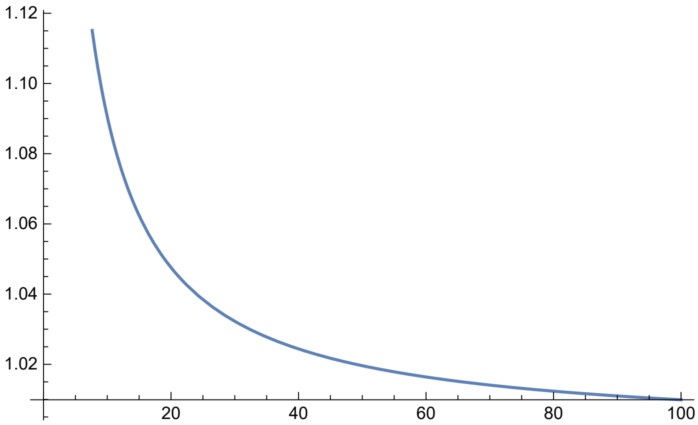
1. Calcular límite

In[7]:= `Limit[Sqrt[x^2 + 2 * x + 3] - x, x → ∞]`

Out[7]= 1

In[9]:= `Plot[Sqrt[x^2 + 2 * x + 3] - x, {x, 0, 100}]`

Out[9]=



Como podemos ver, la función toma valores cercanos a 1 cuando x toma valores positivos cada vez más grandes, por lo tanto, el límite es 1.

Para el sexto límite

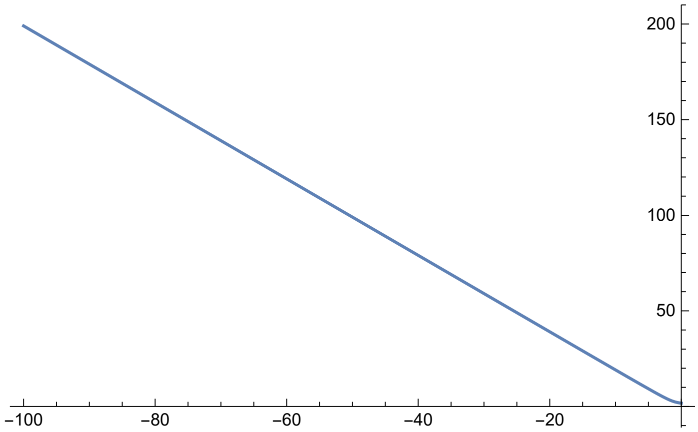
1. Calcular límite

In[10]:= `Limit[Sqrt[x^2 + 2 * x + 3] - x, x → -∞]`

Out[10]= ∞

In[11]:=
```
Plot[Sqrt[x^2 + 2 * x + 3] - x, {x, -100, 0}]
```

Out[11]=



Como podemos ver, la función toma valores positivos cada vez más grandes cuando x toma valores negativos cada vez más grandes, por lo tanto, el límite es infinito.

Ejercicio 2: Cálculo de razones de cambio

Para la función f

In[12]:=
```
Clear["Global`*"]
```

1. Definir la función f

In[13]:=
```
f[x_] = 1 / x^2
```

Out[13]= $\frac{1}{x^2}$

2. Determinar la razón de cambio

In[14]:=
```
(f[x + h] - f[x]) / h // Expand
```

Out[14]= $-\frac{1}{h\,x^2}+\frac{1}{h\,(h+x)^2}$

3. Determine f'(x) utilizando la definición

In[15]:=
```
Limit[(f[x + h] - f[x]) / h, h → 0]
```

Out[15]= $-\frac{2}{x^3}$

Para la función g

In[16]:=
```
Clear["Global`*"]
```

1. Definir la función g

In[17]:=
```
g[x_] = Sqrt[x]
```

Out[17]= $\sqrt{x}$

2. Determinar la razón de cambio

In[30]:=
```
(g[x + h] - g[x]) / h // FullSimplify
```

Out[30]= $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{h + x}}$

3. Determine g'(x) utilizando la definición

In[19]:=
```
Limit[(g[x + h] - g[x]) / h, h → 0]
```

Out[19]= $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Para la función z

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```

1. Definir la función z

In[20]:=
```
z[x_] = Sqrt[x^2 + 1]
```

Out[20]= $\sqrt{1 + x^2}$

2. Determinar la razón de cambio

In[33]:=
```
(z[x + h] - z[x]) / h
```

Out[33]= $\frac{-\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + (h + x)^2}}{h}$

3. Determine z'(x) utilizando la definición

In[34]:=
```
Limit[(z[x + h] - z[x]) / h, h → 0]
```

Out[34]= $\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

Para la función r

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```

1. Definir la función r

In[37]:=
```
r[x_] = Exp[x]
```

Out[37]= e^x

2. Determinar la razón de cambio

In[38]:=
```
(r[x + h] - r[x]) / h
```

Out[38]= $\frac{-e^x + e^{h+x}}{h}$

3. Determine r'(x) utilizando la definición

In[39]:=
```
Limit[(r[x + h] - r[x]) / h, h → 0]
```

Out[39]= e^x

Para la función a

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```

1. Definir la función r

In[40]:=
```
a[x_] = Exp[x^2]
```

Out[40]= e^{x^2}

2. Determinar la razón de cambio

In[41]:=
```
(a[x + h] - a[x]) / h
```

Out[41]= $\frac{-e^{x^2} + e^{(h+x)^2}}{h}$

3. Determine a’(x) utilizando la definición

In[42]:=
```
Limit[(a[x + h] - a[x]) / h, h → 0]
```

Out[42]= $2 e^{x^2} x$

Ejercicio 3:

In[43]:=
```
Clear["Global`*"]
```

a)

In[44]:=
```
D[x^4 + 4 x^3 + 2 x^2 + 1, x]
```

Out[44]= $4 x + 12 x^2 + 4 x^3$

b)

In[45]:=
```
D[(x^5 + x^4 + 1) / (x^2 + 1), x]
```

Out[45]= $\frac{4 x^3 + 5 x^4}{1 + x^2} - \frac{2 x \left(1 + x^4 + x^5\right)}{\left(1 + x^2\right)^2}$

c)

In[46]:=
```
D[(x^5 + x^2 + 1) / (x^2 + 1), {x, 2}]
```

Out[46]= $\frac{2 + 20 x^3}{1 + x^2} - \frac{4 x \left(2 x + 5 x^4\right)}{\left(1 + x^2\right)^2} + \left(1 + x^2 + x^5\right) \left(\frac{8 x^2}{\left(1 + x^2\right)^3} - \frac{2}{\left(1 + x^2\right)^2}\right)$

d)

In[47]:=
```
D[(Exp[x] + Cos[x]) / (Sin[x] + 2), x] // Simplify
```

Out[47]= $\frac{-1 + 2 e^x - e^x \operatorname{Cos}[x] + \left(-2 + e^x\right) \operatorname{Sin}[x]}{\left(2 + \operatorname{Sin}[x]\right)^2}$

e)

In[48]:=
```
D[Cos[Log[x^2 + 1]], x]
```

Out[48]= $-\frac{2 x \operatorname{Sin}\left[\operatorname{Log}\left[1 + x^2\right]\right]}{1 + x^2}$

f)

In[49]:=
```
D[Cos[Log[x^2 + 1]], {x, 2}]
```

Out[49]=
$$-\frac{4\,x^2\,\text{Cos}[\text{Log}[1+x^2]]}{(1+x^2)^2}+\frac{4\,x^2\,\text{Sin}[\text{Log}[1+x^2]]}{(1+x^2)^2}-\frac{2\,\text{Sin}[\text{Log}[1+x^2]]}{1+x^2}$$

g)

In[50]:=
```
D[f[x] * g[x], x] // Simplify
```

Out[50]= $g[x]\,f'[x]+f[x]\,g'[x]$

h)

In[51]:=
```
D[f[x] * g[x], {x, 2}]
```

Out[51]= $2\,f'[x]\,g'[x]+g[x]\,f''[x]+f[x]\,g''[x]$

i)

In[52]:=
```
D[f[x] * g[x], {x, 3}]
```

Out[52]= $3\,g'[x]\,f''[x]+3\,f'[x]\,g''[x]+g[x]\,f^{(3)}[x]+f[x]\,g^{(3)}[x]$

Ejercicio 4: Aproximaciones

Para la función f

In[53]:=
```
Clear["Global`*"]
```

1. Definamos la función f

In[77]:=
```
f[x_] = Log[x]
```

Out[77]= $\text{Log}[x]$

2. Determine la aproximación lineal

In[78]:=
```
F[x_] = f[1] + f'[1] * (x - 1)
```

Out[78]= $-1+x$

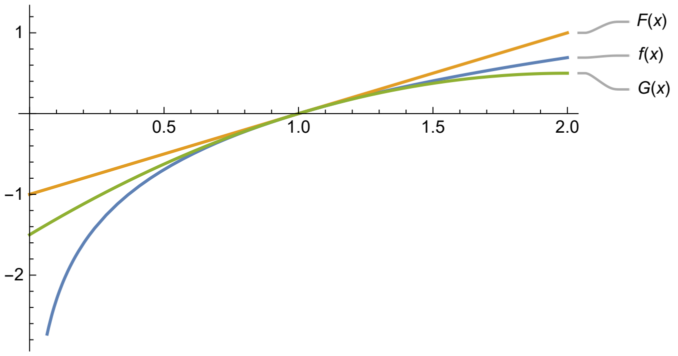
2. Determine la aproximación cuadrática

In[79]:=
```
G[x_] = f[1] + f'[1] * (x - 1) + (1 / 2) * f''[1] * (x - 1) ^2
```

Out[79]= $-1-\frac{1}{2}(-1+x)^2+x$

3. Graficar las funciones

In[80]:=
```
Plot[{f[x], F[x], G[x]}, {x, 0, 2}, PlotLabels → Automatic]
```

Out[80]=


4. Evaluar la función y sus aproximaciones

In[81]:=
```
f[1.1]
F[1.1]
G[1.1]
```

Out[81]= 0.0953102

Out[82]= 0.1

Out[83]= 0.095

In[84]:=
```
f[0.9]
F[0.9]
G[0.9]
```

Out[84]= -0.105361

Out[85]= -0.1

Out[86]= -0.105

Para la función g

In[87]:=
```
Clear["Global`*"]
```

1. Definamos la función g

In[88]:=
```
g[x_] = Sqrt[x^2 + 1]
```

Out[88]= $\sqrt{1 + x^2}$

2. Determine la aproximación lineal

In[89]:=
```
F[x_] = g[2] + g'[2] * (x - 2)
```

Out[89]= $\sqrt{5} + \frac{2\,(-2 + x)}{\sqrt{5}}$

2. Determine la aproximación cuadrática

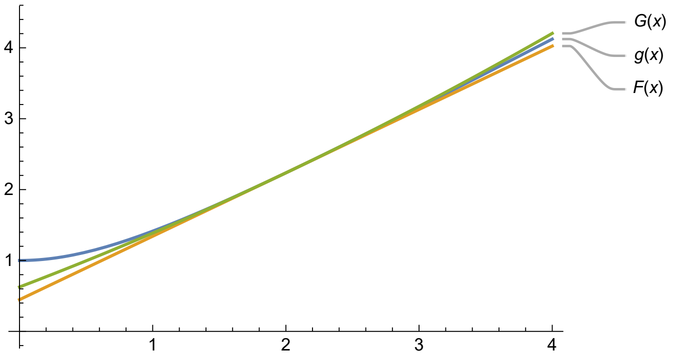
In[90]:=
```
G[x_] = g[2] + g'[2] * (x - 2) + (1/2) * g''[2] * (x - 2)^2
```

Out[90]= $\sqrt{5} + \frac{2\,(-2 + x)}{\sqrt{5}} + \frac{(-2 + x)^2}{10\,\sqrt{5}}$

3. Graficar las funciones

In[91]:=
```
Plot[{g[x], F[x], G[x]}, {x, 0, 4}, PlotLabels → Automatic]
```

Out[91]=



4. Evaluar la función y sus aproximaciones

In[92]:=
```
g[1.1]
F[1.1]
G[1.1]
```

Out[92]= 1.48661

Out[93]= 1.43108

Out[94]= 1.46731

In[95]:=
```
g[0.9]
F[0.9]
G[0.9]
```

Out[95]= 1.34536

Out[96]= 1.2522

Out[97]= 1.30631

Para la función z

In[98]:=
```
Clear["Global`*"]
```

1. Definamos la función x

In[101]:=
```
z[x_] = Exp[x^2]
```

Out[101]= e^{x^2}

2. Determine la aproximación lineal

In[102]:=
```
F[x_] = z[0] + z'[0] * (x - 0)
```

Out[102]= 1

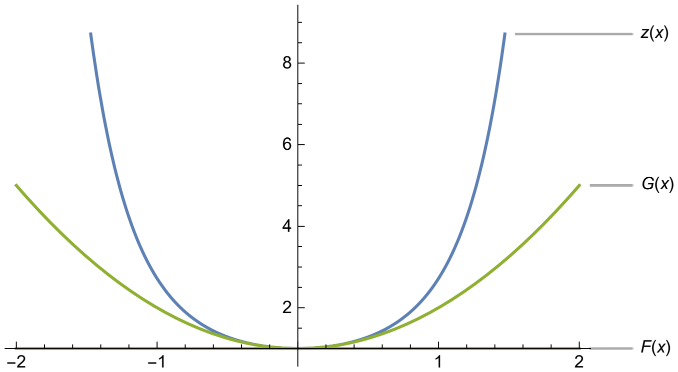
2. Determine la aproximación cuadrática

In[103]:=
```
G[x_] = z[0] + z'[0] * (x - 0) + (1 / 2) * z''[0] * (x - 0) ^2
```

Out[103]= $1 + x^2$

3. Graficar las funciones

In[104]:=
```
Plot[{z[x], F[x], G[x]}, {x, -2, 2}, PlotLabels → Automatic]
```

Out[104]=


4. Evaluar la función y sus aproximaciones

In[105]:=
```
z[0.1]
F[0.1]
G[0.1]
```

Out[105]= 1.01005

Out[106]= 1

Out[107]= 1.01

In[108]:=
```
z[-0.1]
F[-0.1]
G[-0.1]
```

Out[108]= 1.01005

Out[109]= 1

Out[110]= 1.01

Para la función r

In[111]:=
```
Clear["Global`*"]
```

1. Definamos la función r

In[112]:=
```
r[x_] = Cos[x]
```

Out[112]= Cos[x]

2. Determine la aproximación lineal

In[113]:=
```
F[x_] = r[-Pi] + r'[-Pi] * (x + Pi)
```

Out[113]= −1

2. Determine la aproximación cuadrática

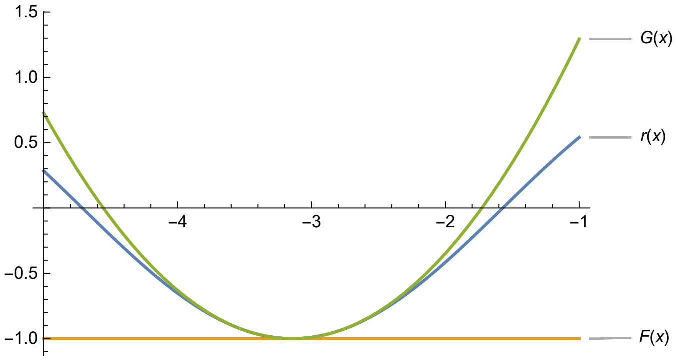
In[114]:=
```
G[x_] = r[-Pi] + r'[-Pi] * (x + Pi) + (1/2) * r''[Pi] * (x + Pi)^2
```

Out[114]= $-1 + \frac{1}{2} (\pi + x)^2$

3. Graficar las funciones

In[116]:=
```
Plot[{r[x], F[x], G[x]}, {x, -5, -1}, PlotLabels → Automatic]
```

Out[116]=



4. Evaluar la función y sus aproximaciones

In[117]:=
```
r[-Pi + 0.1]
F[-Pi + 0.1]
G[-Pi + 0.1]
```

Out[117]= -0.995004

Out[118]= -1

Out[119]= -0.995

In[120]:=
```
r[-Pi - 0.1]
F[-Pi - 0.1]
G[-Pi - 0.1]
```

Out[120]= -0.995004

Out[121]= -1

Out[122]= -0.995

Ajuste de funciones

Andrés Merino

Ejemplo:

Día 0: domingo 15 de marzo.

Día 20: sábado 4 de abril.

Datos tomados de los reportes matutinos.

```
In[∘]:= Clear["Global`*"]
```

Datos Ecuador

```
In[123]:= datos = {{0, 37}, {1, 58}, {2, 111}, {3, 155}, {4, 199}, {5, 367}, {6, 506}, {7, 789},
    {8, 981}, {9, 1049}, {10, 1173}, {11, 1382}, {12, 1595}, {13, 1823}, {14, 1890},
    {15, 1962}, {16, 2240}, {17, 2748}, {18, 3163}, {19, 3368}, {20, 3465}};
```

Buscar un modelo exponencial

Planteamos el modelo

```
In[124]:= modelo1 = a * Exp[k * t]
```

Out[124]= $a\, e^{k t}$

Ajustamos el modelo

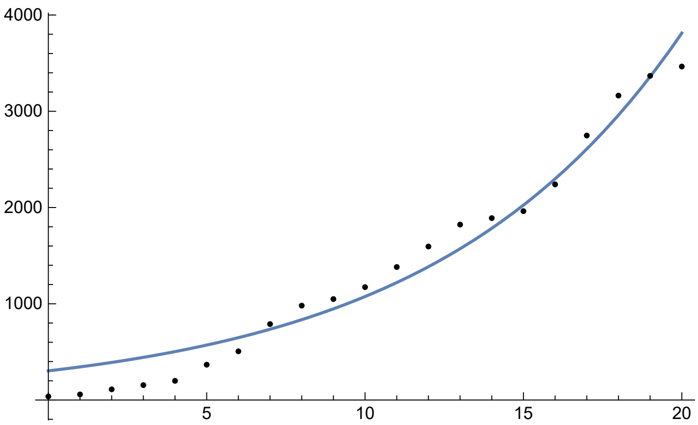
```
In[125]:= FindFit[datos, modelo1, {a, k}, t]
Out[125]= {a → 303.099, k → 0.126667}
```

Definimos el modelo y graficamos

```
In[126]:= f1[t_] = 303.0990 * Exp[0.1266 * t]
          Plot[f1[t], {t, 0, 20}, Epilog → Map[Point, datos]]
```

Out[126]= $303.099\, e^{0.1266 t}$

Out[127]=



Realizamos una interpolación para el día lunes 6 de abril (día 22)

In[128]:=
```
f1[22]
```
Out[128]= 4911.13

Buscar un modelo logístico

Planteamos el modelo

In[129]:=
```
modelo2 = a / (1 + b * Exp[-k * t])
```
Out[129]= $\frac{a}{1 + b\, e^{-k\, t}}$

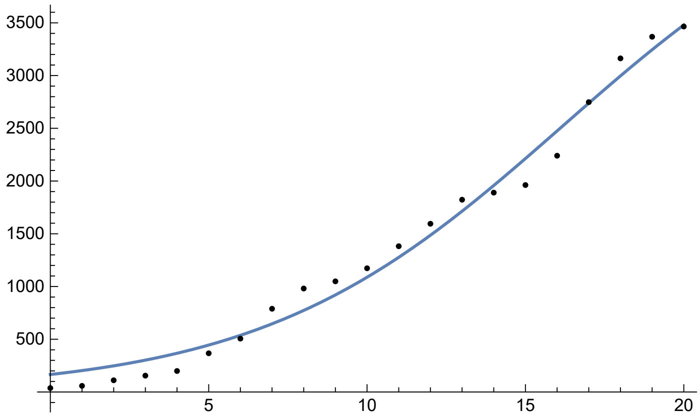
Ajustamos el modelo

In[130]:=
```
FindFit[datos, modelo2, {a, b, k}, t]
```
Out[130]= {a → 5044.25, b → 29.408, k → 0.209654}

Definimos el modelo y graficamos

In[131]:=
```
f2[t_] = 5044.25 / (1 + 29.408 * Exp[-0.209 * t])
Plot[f2[t], {t, 0, 20}, Epilog → Map[Point, datos]]
```
Out[131]= $\frac{5044.25}{1 + 29.408\, e^{-0.209\, t}}$

Out[132]=

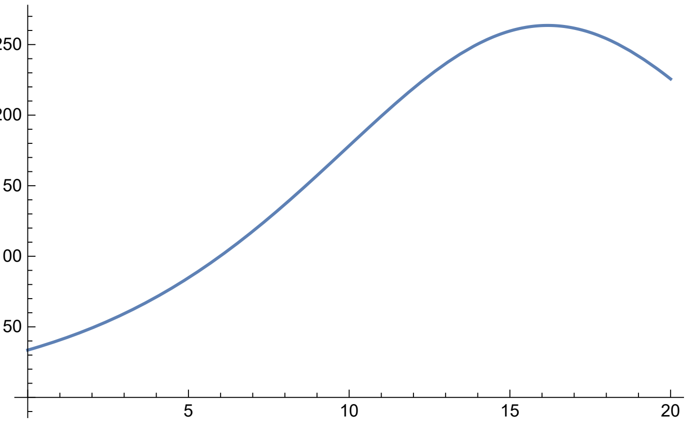


Realizamos una interpolación para el día lunes 6 de abril (día 22)

In[133]:=
```
f2[22]
```
Out[133]= 3891.58

Grafico la derivada

In[134]:=
```
Plot[f2'[t], {t, 0, 20}]
```

Out[134]=


Ejercicio 1:

Día 0: domingo 15 de marzo.

Día 20: sábado 4 de abril.

Datos tomados de los reportes matutinos.

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```

Datos Pichincha

In[135]:=
```
datos = {{0, 6}, {1, 7}, {2, 8}, {3, 8}, {4, 12}, {5, 32}, {6, 44}, {7, 60},
   {8, 65}, {9, 71}, {10, 99}, {11, 121}, {12, 132}, {13, 161}, {14, 171},
   {15, 188}, {16, 211}, {17, 245}, {18, 259}, {19, 285}, {20, 321}};
```

Buscar un modelo exponencial

Planteamos el modelo

In[136]:=
```
modelo1 = a * Exp[k * t]
```

Out[136]= $a\, e^{k\, t}$

Ajustamos el modelo

In[137]:=
```
FindFit[datos, modelo1, {a, k}, t]
```

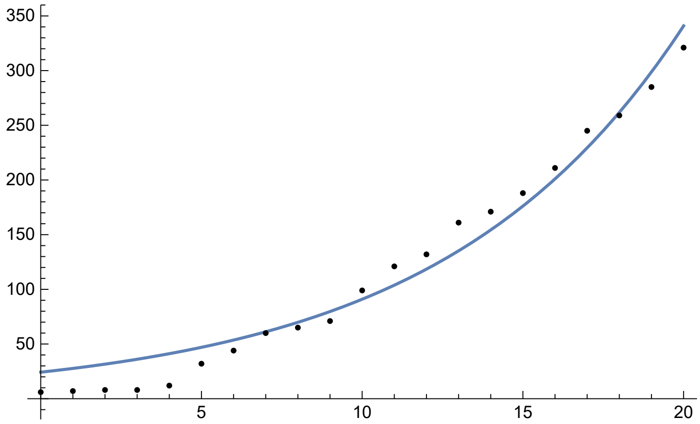
Out[137]= {a → 24.2615, k → 0.132137}

Definimos el modelo y graficamos

In[138]:=
```
f1[t_] = 24.2615 * Exp[0.132137 * t]
Plot[f1[t], {t, 0, 20}, Epilog → Map[Point, datos]]
```

Out[138]= $24.2615\, e^{0.132137\, t}$

Out[139]=



Realizamos una interpolación para el día lunes 6 de abril (día 22)

In[140]:=
```
f1[22]
```

Out[140]= 444.036

Buscar un modelo logístico

Planteamos el modelo

In[141]:=
```
modelo2 = a / (1 + b * Exp[-k * t])
```

Out[141]= $\frac{a}{1 + b\, e^{-k\, t}}$

Ajustamos el modelo

In[142]:=
```
FindFit[datos, modelo2, {a, b, k}, t]
```

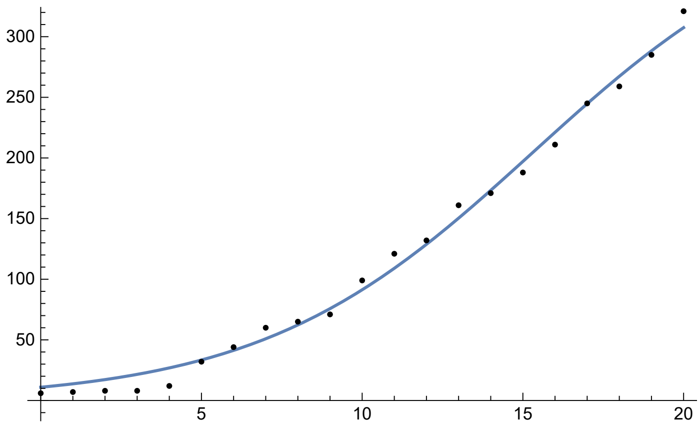
Out[142]= {a → 410.442, b → 36.4961, k → 0.234539}

Definimos el modelo y graficamos

In[143]:=
```
f2[t_] = 410.442 / (1 + 36.4961 * Exp[-0.234539 * t])
Plot[f2[t], {t, 0, 20}, Epilog → Map[Point, datos]]
```

Out[143]= $\frac{410.442}{1 + 36.4961\, e^{-0.234539\, t}}$

Out[144]=



Realizamos una interpolación para el día lunes 6 de abril (día 22)

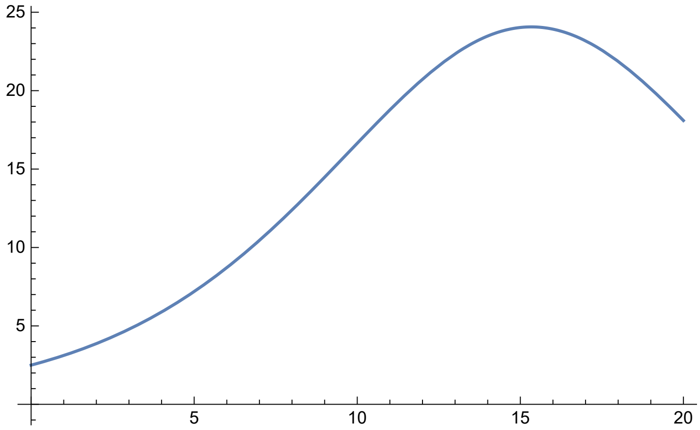
In[145]:=
```
f2[22]
```

Out[145]=
```
339.326
```

Grafico la derivada

In[146]:=
```
Plot[f2'[t], {t, 0, 20}]
```

Out[146]=



1. Objetivos

1. Resolver problemas de razón de cambio relacionadas.
2. Calcular derivadas parciales y gradientes.
3. Resolver problemas de optimización.

2. Instrucciones

Abrir el programa "Wolfram Matemathica" o ingresar en el enlace `https://www.wolframcloud.com/`. Recuerde, al inicio de cada ejercicio, correr la instrucción `Clear["Global‘*"]`.

2.1 Derivada implícita

El objetivo de este punto es calcular razones de cambio relacionadas y derivadas implícitas.

Ejercicio 1: Cálculo de derivadas implícitas

En este ejercicio calcularemos razones de cambio relacionadas y derivadas implícitas.

1. Suponga que las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son tales que

$$g(x)f(x) + (f(x))^2 - (g(x))^2 + x = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Determine $f'(x)$ y $g'(x)$. Además, determine $g'(1)$ si se conoce que $f(1) = 1$, $g(1) = 3$ y $f'(1) = -2$.

2. Suponga que las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son tales que

$$g(t)e^{f(t)} + t(f(t))^2 - (g(t))^2 = 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Determine $f'(t)$ y $g'(t)$. Además, determine $f'(0)$ si se conoce que $f(0) = 1$, $g(0) = -2$ y $g'(0) = 3$.

3. Suponga que las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son tales que

$$g(x)\operatorname{sen}(f(x)) + f(x)h(g(x)) = f(x)\cos(g(x)).$$

Determine $f'(x)$ y $g'(x)$.

4. Suponga que y se define en función de x de manera implícita mediante la siguiente relación:

$$xy + x^2y + x^3y^2 = 1$$

Determine y'.

5. Suponga que y se define en función de x de manera implícita mediante la siguiente relación:

$$xe^y + ye^x + x^3y^2 = 1$$

Determine y'.

6. Suponga que x se define en función de y de manera implícita mediante la siguiente relación:

$$xe^y + ye^x + x^3y^2 = 1$$

Determine x'.

Ejercicio 2: Ejercicios de aplicación

En este ejercicio utilizaremos los comandos aprendidos para resolver problemas vinculados a la economía.

1. La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = \frac{a}{\sqrt{b + cq^2}}$$

donde a, b y c son constantes, y donde $c \neq 0$.

   a) Demuestre que la elasticidad no depende de a.

   b) Demuestre que si b y c son positivas, entonces la demanda es elástica para toda $q > 0$

   c) ¿Para cuál valor o valores de las constantes es posible la elasticidad unitaria?

2. Dos aviones comerciales están volando a 40,000 pies a lo largo de recorridos en línea recta que se cortan en ángulos rectos. El avión A se aproxima al punto de intersección a una velocidad de 442 nudos (millas náuticas por hora; una milla náutica equivale a 2000 yardas). El avión B se aproxima a la intersección a 481 nudos. ¿A qué tasa está cambiando la distancia entre los aviones cuando A está a 5 millas náuticas del punto de intersección y B está a 12 millas náuticas del mismo?

3. Juana está en una lancha a 2 millas de la orilla y quiere llegar a un pueblo costero que está a 6 millas en línea recta desde el punto de la orilla que es más cercano a la lancha. Ella puede remar a 2 millas/hora y caminar a 5 millas/hora. ¿Dónde debe dejar la lancha para alcanzar el pueblo en el tiempo mínimo?

4. Fabricar y distribuir mochilas cuesta c dólares cada una. Si cada mochila se vende en x dólares, el número vendido está dado por

$$n = \frac{a}{x - c} + b(100 - x)$$

donde a y b son constantes positivas. ¿Qué precio de venta dará la máxima utilidad?

5. Suponga que un cilindro circular recto de radio r y altura h está inscrito en un cono circular recto de radio R y altura H. Encuentre el valor de r (en términos de R y H) que maximice el área superficial total del cilindro (incluyendo las tapas superior e inferior).

1. OBJETIVOS

1. Resolver problemas utilizando Mathematica

2. INSTRUCCIONES

Abrir el programa "Wolfram Matemathica" o ingresar en el enlace `https://www.wolframcloud.com/`. Recuerde, al inicio de cada ejercicio, correr la instrucción `Clear["Global‘*"]`.

2.1 Funciones

El objetivo de este punto es calcular razones de cambio relacionadas y derivadas implícitas.

Ejercicio 1: Funciones

1. Defina tres funciones f, g y p (que contengas expresiones trigonométricas y exponenciales).
2. Grafique cada una de las funciones.
3. Determine $f \circ g$, $f \circ p$, $p \circ f$ y $f \circ (g \circ p)$.
4. Grafique cada una de las funciones anteriores.
5. Determinar $x \in \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 10$, $g(x) = 5{,}5$, $p(q) = 5430$.
6. Determine la razón de cambio promedio de las funciones f, g y p.

Ejercicio 2: Modelamiento con funciones exponenciales

Resolver los ejercicios 19 y 22 de la sección de problemas 5.5 del libro "Matemática para Administración y Economía" de Haeussler (12va. edición). `https://bit.ly/2WPXNL5`

Ejercicio 3: Aproximaciones

1. Defina una función f (polinomial de segundo grado).
2. Defina la función g dada por $g(x) = e^{f(x)} + f(\operatorname{sen}(x))$
3. Determine la aproximación lineal y cuadrática de g alrededor de 2.
4. Graficar la función y sus aproximaciones.
5. Evaluar la función y sus aproximaciones en 2,1 y 1,9.

Ejercicio 4: Optimización

Resolver los ejercicios 38 y 40 de la sección de problemas 13.6 del libro "Matemática para Administración y Economía" de Haeussler (12va. edición). `https://bit.ly/2WPXNL5`

Ejercicio 5: Integración

1. Defina una función f (polinomial de tercer grado).
2. Realice la suma de Riemann de f sobre el intervalo $[-5,3]$ con una partición uniforme de orden 5 y etiquetas izquierdas.
3. Realice la suma de Riemann de f sobre el intervalo $[-5,3]$ con una partición uniforme de orden 5 y etiquetas derechas.
4. Realice la suma de Riemann de f sobre el intervalo $[-5,3]$ con una partición uniforme de orden 10 y etiquetas izquierdas.
5. Realice la suma de Riemann de f sobre el intervalo $[-5,3]$ con una partición uniforme de orden 10 y etiquetas derechas.
6. Realice la suma de Riemann de f sobre el intervalo $[-5,3]$ con una partición uniforme de orden 100 y etiquetas izquierdas.
7. Realice la suma de Riemann de f sobre el intervalo $[-5,3]$ con una partición uniforme de orden 100 y etiquetas derechas.
8. Realice la suma de Riemann de f sobre el intervalo $[-5,3]$ con una partición uniforme de orden n y etiquetas izquierdas.
9. Realice la suma de Riemann de f sobre el intervalo $[-5,3]$ con una partición uniforme de orden n y etiquetas derechas.
10. Determine $\int_{-5}^{3} f(x)\,dx$ utilizando sumas de Reimann, tanto con etiquetas derechas e izquierdas.

Ejercicio 5: Aplicaciones de integración

1. Defina dos función f y g (polinomiales de tercer grado) de tal forma que sus representaciones gráficas se corten en al menos dos puntos en $[-10,10]$.
2. Grafique ambas funciones en una misma figura.
3. Determine los puntos donde las funciones se corta.
4. Determine el área comprendida entra las dos funciones en el intervalo $[-10,10]$, tanto separando la integral en varias integrales o con el valor absoluto.