Semestre 2020-2 Mat. Andrés Merino

1. Números reales

Axioma 1: Existencia de los números reales

Existe un conjunto distinto del vacío, representado por $\mathbb{R}$ y denominado **conjuntos de los números reales**, que tiene por lo menos dos elementos (distintos), representados por 0 y 1, y denominados, respectivamente, **cero** y **uno** Los elementos del conjunto $\mathbb{R}$ se denominan **números reales**.

2. Propiedades de cuerpo

Axioma 2: Existencia de las operaciones suma y multiplicación

Existen dos operaciones llamadas **suma** y **multiplicación**, respectivamente.

Si $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, escribiremos $a + b$ para la suma y $a \cdot b$ o, simplemente, ab para la multiplicación.

Estas operaciones satisfacen los siguientes axiomas:

1. **Clausurativo de la suma y el producto:** Para todo $a, b \in \mathbb{R}$,
$$a + b \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad a \cdot b \in \mathbb{R}.$$

2. **Asociativo de la suma y el producto:** Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$,
$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad \text{y} \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

3. **Conmutatividad de la suma y el producto:** Para todo $a, b \in \mathbb{R}$,
$$a + b = b + a \qquad \text{y} \qquad a \cdot b = a \cdot b.$$

4. **Existencia de neutros de la suma y del producto:** Para todo $a \in \mathbb{R}$,
$$a + 0 = a \qquad \text{y} \qquad a \cdot 1 = a.$$

Además, el 0 y el 1 son los únicos elementos que cumplen esta propiedad.

5. **Existencia del opuesto de la suma y del inverso del producto:** Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe un único real, denotado por $-a$, tal que

$$a + (-a) = 0.$$

Además, para todo $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe un único real, denotado por b^{-1}, tal que

$$b \cdot (b^{-1}) = 1.$$

6. **Distributiva de la suma y del producto:** Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

DEFINICIÓN 1: Resta

Si $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, **la resta o diferencia de** a **y** b, representada por $a - b$, es la suma de a y el inverso aditivo de b; es decir,

$$a - b = a + (-b).$$

DEFINICIÓN 2: División

Si $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \neq 0$, **la división o cociente de** a **y** b, representada por $\frac{a}{b}$, es la multiplicación de a y el inverso multiplicativo de b; es decir,

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

PROPOSICIÓN 1 (Manipulación algebraica)**.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se tiene que

a) $a - a = 0$

b) $-a + b = b - a$

c) $-0 = 0$

d) $1^{-1} = 1$

e) $a \cdot 0 = 0$

f) $-(-a) = a$

g) $(a^{-1})^{-1} = a$

h) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

i) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

j) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

k) $a - 0 = a$

l) $0 - a = -a$

m) $-a = (-1) \cdot a$

n) $-(a+b) = -a - b$

ñ) $-(a-b) = b - a$

PROPOSICIÓN 2 (Manipulación algebraica de fracciones)**.** Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Se tiene que

a) $\dfrac{a}{a} = 1,$ siempre que $a \neq 0$

b) $\dfrac{1}{a} = a^{-1},$ siempre que $a \neq 0$

c) $\dfrac{a \cdot b}{b} = a,$ siempre que $b \neq 0$

d) $\dfrac{b}{a \cdot b} = \dfrac{1}{a},$ siempre que $a \neq 0$ y $b \neq 0$

e) $\dfrac{a \cdot c}{b \cdot c} = \dfrac{a}{b},$ siempre que $b \neq 0$ y $c \neq 0$

f) $a \cdot \dfrac{b}{c} = \dfrac{a \cdot b}{c},$ siempre que $c \neq 0$

g) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d},$ siempre que $b \neq 0$ y $d \neq 0$

h) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b},$ siempre que $b \neq 0$

i) $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{b} = \dfrac{a-c}{b},$ siempre que $b \neq 0$

j) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d},$ siempre que $b \neq 0$ y $d \neq 0$

k) $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d},$ siempre que $b \neq 0$ y $d \neq 0$

l) $-\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{-a}{b},$ siempre que $b \neq 0$

m) $-\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{a}{-b},$ siempre que $b \neq 0$

n) $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b},$ siempre que $b \neq 0$

ñ) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a},$ siempre que $a \neq 0$ y $b \neq 0$

o) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c},$ siempre que $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$

3. Números naturales, enteros y racionales

Definición 3

Definimos:

- $2 = 1 + 1$
- $3 = 2 + 1$
- $4 = 3 + 1$
- $\ldots$

Definición 4

Se dice que $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto *inductivo* si

- $0 \in A$ y
- para todo $n \in A$, se tiene que $n + 1 \in A$.

Definición 5

El conjunto de los *números naturales* es el conjunto inductivo "más pequeño" (en el sentido de la contenencia), se lo denota por $\mathbb{N}$. Se tiene que

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Definición 6

El conjunto de los *números enteros* es el conjunto de los números naturales junto con sus opuestos aditivos, se lo denota por $\mathbb{Z}$. Se tiene que

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Por notación,

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Definición 7

El conjunto de los *números racionales* es el conjunto de las divisiones de enteros, se lo denota por $\mathbb{Q}$. Se tiene que

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{R} : \quad n \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad m \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

4. Exponentes

Definición 8: Potencia de exponente natural

Dado $a \in \mathbb{R}^*$, se define

- $a^0 = 1$ y
- $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, se define

$$0^n = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

La expresión

$$0^0$$

no está definida, por lo tanto 0^0 no es un número real.

Definición 9: Potencia de exponente entero

Dados $a \in \mathbb{R}^*$ y $n \in \mathbb{N}$, se define

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n}.$$

Proposición 3 (Propiedades de los exponentes)**.** Sean $a, b \in \mathbb{R}^*$ y $m, n \in \mathbb{Z}$. Se tiene que:

a) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

b) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

c) $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

d) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

e) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Proposición 4 (Productos notables)**.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$, las siguientes proposiciones son verdaderas

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

d) $(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc$.

La potencia no tiene la propiedad distributiva respecto de la suma. En efecto, en general,

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n.$$

5. ECUACIONES

PROPOSICIÓN 5. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se tiene que

a) $a = b \implies a + c = b + c$

b) $a + c = b + c \implies a = b$

c) $a = b \implies a - c = b - c$

d) $a - c = b - c \implies a = b$

e) $a = b \implies a \cdot c = b \cdot c$

f) $a \cdot c = b \cdot c \implies a = b,$ siempre que $c \neq 0$

g) $a = b \implies \frac{a}{c} = \frac{b}{c},$ siempre que $c \neq 0$

h) $\frac{a}{c} = \frac{b}{c} \implies a = b,$ siempre que $c \neq 0$

i) $a = b \implies -a = -b$

j) $a = b \implies a^{-1} = b^{-1},$ siempre que $a \neq 0$ y $b \neq 0$

k) $a = b \implies \frac{1}{a} = \frac{1}{b},$ siempre que $a \neq 0$ y $b \neq 0$

l) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies a \cdot d = c \cdot b,$ siempre que $b \neq 0$ y $d \neq 0$

m) $a \cdot b = 0 \implies (a = 0 \quad \vee \quad b = 0)$

6. Introducción al orden y radicación

Definición 10: Relación de orden

Existe una relación de orden en $\mathbb{R}$, denotada por $>$. Para $a, b \in \mathbb{R}$ que estén bajo esta relación, se denota $a > b$ y se lee "a es mayor que b". Esta relación cumple que, para todo $a, b \in \mathbb{R}$:

- $a > b \;\text{ o }\; a = b \;\text{ o }\; b > a$, pero solo una;
- si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a + b > 0$;
- si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a \cdot b > 0$.

Definición 11

Si $a, b \in \mathbb{R}$, tomaremos las siguientes notaciones

- $a < b$ si $b > a$;
- $a \leq b$ si $a < b$ o $a = b$;
- $a \geq b$ si $a > b$ o $a = b$.

Además diremos que a es positivo si $a > 0$ y diremos que a es negativo si $a < 0$.

Definición 12

Para $x \in \mathbb{R}$, se define el *valor absoluto de* x por

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Definición 13: Raíz cuadrada

Dado $a \in \mathbb{R}$ con $a \geq 0$, se dice que b es la *raíz cuadrada* de a si

- $b \geq 0$ y
- $a = b^2$.

De existir la raíz cuadrada de a, se la representa por $\sqrt{a}$.

Notemos que, de la definición anterior, se tiene que:

- $\sqrt{4} = 2$, pues $2^2 = 4$ y $2 \geq 0$, pero
- $\sqrt{4} \neq -2$ a pesar de que $(-2)^2 = 4$.

De la definición, se tiene que

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

PROPOSICIÓN 6. Sea $a \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

PROPOSICIÓN 7. Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que

a) $a = b \implies a^n = b^n$

b) $a = b \implies \sqrt{a} = \sqrt{b},$ siempre que $a, b > 0$

7. ECUACIONES NO LINEALES

PROPOSICIÓN 8. Sean $a, x \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq 0$, se tiene que

$$|x| = a \quad \implies \quad x = a \quad \vee \quad x = -a.$$

Se suele representar

$$x = \pm a \qquad \text{por} \qquad x = a \quad \vee \quad x = -a$$

con esto:

$$|x| = a \quad \implies \quad x = \pm a.$$

PROPOSICIÓN 9. Sea $a, x \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq 0$, se tiene que

$$x^2 = a \quad \implies \quad |x| = \sqrt{a}.$$

Uniendo las dos anteriores, se tiene que

$$\begin{aligned} x^2 = a \quad &\iff \quad |x| = \sqrt{a} \\ &\iff \quad x = \sqrt{a} \quad \vee \quad x = -\sqrt{a} \\ &\iff \quad x = \pm\sqrt{a} \end{aligned}$$

TEOREMA 10: Solución de una ecuación de segundo grado

Sea $a, b, c, x \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Si $b^2 - 4ac \geq 0$, se tiene que

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

8. RAZONES Y PROPORCIONES

DEFINICIÓN 14: Razones

Dados dos número reales a y b, con $b \neq 0$, se define *la razón entre a y b* la comparación entre estos número mediante la división y se nota por $a : b$, es decir:

$$a : b = \frac{a}{b}.$$

Esto se lee como *a es a b*

DEFINICIÓN 15: Proporciones

Una proporción es una igualdad entre dos o más razones. Al valor de una de las razones se la llama *constante de proporcionalidad*.

Dados los número reales a, b, c y d, con $b \neq 0$ y $d \neq 0$, una proporción se representa por

$$a : b = c : d$$

y se lee *a es a b como c es a d* y representa

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

DEFINICIÓN 16

Dados dos número reales a y b, con $b \neq 0$, decimos que están en proporcionalidad directa, con constante de proporcionalidad k, si

$$a : b = k.$$

y están en proporcionalidad inversa, con proporcionalidad k si

$$a : \frac{1}{y} = k.$$

DEFINICIÓN 17

Sea a un número real. Se representa por $a\,\%$ a la razón $a : 100$.

1. EL PLANO CARTESIANO

DEFINICIÓN 1

El plano cartesiano es la representación gráfica del conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

DEFINICIÓN 2: Distancia

Para $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, se define la distancia entre estos puntos por

$$d\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

DEFINICIÓN 3: Pendiente

Para $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ puntos diferentes, con $x_1 \neq x_2$, si llamamos

$$A = (x_1, y_1) \qquad \text{y} \qquad B = (x_2, y_2),$$

se define la pendiente formada por estos puntos por

$$m_{A,B} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Si $x_1 = x_2$, se dice que los puntos forman una pendiente infinita.

TEOREMA 1: Área de un triángulo

Si los vértices de un triángulo son $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$, entonces el área del triángulo es el valor absoluto de

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Definición 4: Segmento

Para $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, si llamamos

$$A = (x_1, y_1) \qquad \text{y} \qquad B = (x_2, y_2),$$

los puntos de la forma

$$A + t(B - A) = (x_1 + t(x_2 - x_1),\ y_1 + t(y_2 - y_1)),$$

con $t \in [0, 1]$, son puntos del segmento que une a A y B.

2. Funciones

Definición 5: Función

Dados A y B dos conjuntos, f es una **función de** A **en** B si:

- $f \subseteq A \times B$;
- para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$; y
- si $(x, y) \in f$ y $(x, z) \in f$, entonces $y = z$.

Si f es una función de A en B, escribirá $f : A \to B$. Y, en lugar de $(x, y) \in f$, escribiremos $f(x) = y$, ya que dado x, y es único.

En otras palabras, f es una función de A en B si es una relación entre los elementos de A y B de modo que para cada elemento x de A, hay un único elemento y de B que le corresponde a x en esta relación; a ese elemento y se le llama **imagen de x respecto de f y se le representa por** $f(x)$.

Definición 6: Dominio

Dada $f : A \to B$ el conjunto A se llama **dominio** de f y se le representa por $\operatorname{dom}(f)$.

Definición 7: Imagen o recorrido

Dada una función $f : A \to B$, la **imagen** o el **recorrido** de f es el conjunto

$$\{f(x) : x \in A\},$$

que se lo representa por

$$\operatorname{img}(f) \qquad \text{o} \qquad \operatorname{rec}(f).$$

DEFINICIÓN 8: Razón de cambio promedio

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función, $a \in I$ y $h \in \mathbb{R}$ tal que $a+h \in I$, se define *la razón de cambio promedio de la función f entre a y $a+h$* por

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Este número también es conocido como *variación media* de f en el intervalo entre a y $a+h$.

3. Composición de funciones

DEFINICIÓN 9: Composición de funciones

Dadas las funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$, la función

$$\begin{aligned} g \circ f\colon A &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

se denomina **composición de g y f**.

1. MONOTONÍA

En esta sección, asumiremos que $I = [a, b]$, con $a < b$.

DEFINICIÓN 1: Función creciente, decreciente y monótona

Dada la función $f\colon A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ y el conjunto $I \subseteq A$, f es:

- **creciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u \leq v$, se tiene que $f(u) \leq f(v)$;
- **estrictamente creciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u < v$, se tiene que $f(u) < f(v)$;
- **decreciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u \leq v$, se tiene que $f(u) \geq f(v)$;
- **estrictamente decreciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u < v$, se tiene que $f(u) > f(v)$; y
- **monótona en** I si es creciente o decreciente en I.

DEFINICIÓN 2: Extremos globales

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Decimos que

- f alcanza un máximo global en c y que su máximo (global) es $f(c)$ si
$$f(x) \leq f(c)$$
para todo $x \in I$;
- f alcanza un mínimo global en c y que su mínimo (global) es $f(c)$ si
$$f(x) \geq f(c)$$
para todo $x \in I$.

Definición 3: Extremos locales

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Decimos que

- f alcanza un máximo local en c, y su máximo local es $f(c)$, si existe $r > 0$ tal que
$$f(x) \leq f(c)$$
para todo $x \in [c-r, c+r] \cap I$;
- f alcanza un mínimo local en c, y su mínimo local es $f(c)$, si existe $r > 0$ tal que
$$f(x) \geq f(c)$$
para todo $x \in [c-r, c+r] \cap I$.

2. Transformación de funciones

Definición 4

Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $c > 0$. Si definimos las funciones

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)+c \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)-c, \end{aligned}$$

se tiene que la gráfica de g se obtiene al trasladar c unidades hacia arriba la gráfica de f y la gráfica de h se obtiene al trasladar c unidades hacia abajo la gráfica de f.

Definición 5

Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $c > 0$. Si definimos las funciones

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x-c) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x+c), \end{aligned}$$

se tiene que la gráfica de g se obtiene al trasladar c unidades hacia la derecha la gráfica de f y la gráfica de h se obtiene al trasladar c unidades hacia la izquierda la gráfica de f.

Definición 6

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si definimos las funciones

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(-x) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -f(x), \end{aligned}$$

se tiene que la gráfica de g se obtiene al reflejar por el eje vertical la gráfica de f y la gráfica de h se obtiene al reflejar por el eje horizontal la gráfica de f.

Definición 7

Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $c > 0$. Si $c > 1$ y definimos las funciones

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto cf(x), \end{aligned}$$

se tiene que la gráfica de g se obtiene al alargar verticalmente un factor de c la gráfica de f.

Por otro lado Si $0 < c < 1$ y definimos las funciones

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto cf(x), \end{aligned}$$

se tiene que la gráfica de g se obtiene al contraer verticalmente un factor de c la gráfica de f

Definición 8

Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $c > 0$. Si $c > 1$ y definimos las funciones

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(cx), \end{aligned}$$

se tiene que la gráfica de g se obtiene al contraer horizontalmente un factor de c la gráfica de f.

Por otro lado Si $0 < c < 1$ y definimos las funciones

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(cx), \end{aligned}$$

se tiene que la gráfica de g se obtiene al alargar horizontalmente un factor de c la gráfica de f

3. Modelización

Definición 9

Para este curso, la modelización constará de:

1. Asignación de variables: Se refiere al significado que damos a cada una de las variables según el enunciado del problema.

2. Planteamiento: Consiste en elaborar un gráfico o un proceso analítico donde se relacionen las variables fijadas. Tanto en la elaboración del gráfico como en el proceso analítico, es fundamental precisar el dominio y el conjunto de llegada de la función. En el proceso analítico, a más del dominio y conjunto de llegada, se precisa fijar la ley de asignación.

4. Concepto de derivada

En esta sección, tomaremos $I \subseteq \mathbb{R}$ como un intervalo.

Definición 10: Derivada de una función en un punto

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $a \in I$. *La derivada de la función f en a*, denotada por $f'(a)$, es el número

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

siempre que este límite exista. En este caso, se dice que f es *derivable en a*.

También se dice que el número $f'(a)$ es la *razón de cambio instantánea de f en a*.

Otras notaciones para la derivada que se encuentran en la literatura son

$$Df(a) = f'(a) = \frac{df}{dx}(a),$$

y a la función Df también se la llama f'. Además, se tiene la siguiente notación:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(f(x)) = (f(x))' = \frac{d}{dx}f(x).$$

Y si para cada x en el dominio de f, nombramos y al número $f(x)$, se escribe

$$\frac{dy}{dx}$$

en lugar de $f'(x)$.

PROPOSICIÓN 1. Se tiene que, para $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq -1$,

$$\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}.$$

PROPOSICIÓN 2 (Propiedades algebraicas I)**.** Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ dos funciones reales derivables en $a \in I$. Se tiene que:

1. $f + g$ es derivable en a y

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a);$$

2. fg es derivable en a y

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a);$$

3. si $g(a) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ es derivable en a y

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}.$$

PROPOSICIÓN 3 (Propiedades algebraicas II)**.** Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ dos funciones reales derivables en $a \in I$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se tiene que:

1. λf es derivable en a y

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a).$$

2. $(f - g)$ es derivable en a y

$$(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a).$$

3. si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es derivable en a y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Teorema 4: Regla de la cadena

Sean $f\colon J \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ funciones, con $\operatorname{img}(g) \subseteq J$. Si

1. g es derivable en $a \in I$; y
2. f es derivable en $g(a) \in J$,

entonces $f \circ g$ es derivable en a. Además:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

5. Interpretación geométrica de la derivada

Definición 11: Recta tangente

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable en $c \in I$. La recta de ecuación

$$y = f(c) + f'(c)(x - c),$$

cuya pendiente es el número $f'(c)$, se llama **recta tangente a la gráfica de** f **en el punto** $(c, f(c))$.

Teorema 5: Monotonía

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en $\operatorname{int}(I)$. Se tiene que

- si $f'(x) > 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces f es estrictamente creciente en I;
- si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces f es creciente en I;
- si $f'(x) < 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces f es estrictamente decreciente en I; y
- si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces f es decreciente en I.

6. Concepto de antiderivada

Definición 12: Primitiva

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función, se llama **primitiva** de f a cualquier función $F\colon I \to \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in I$.

Definición 13: Antiderivada o Integral Indefinida

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función. Un representante arbitrario del conjunto de todas las primitivas de la función f es denotado por

$$\int f(x)\,dx,$$

para $x \in I$. A esta función se le denomina **antiderivada** de f o **integral indefinida** de f.

Consideremos la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x, \end{aligned}$$

tenemos que la función

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2, \end{aligned}$$

es una primitiva de f, por lo tanto

$$\int f(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + c$$

para $x \in \mathbb{R}$, con $c \in \mathbb{R}$.

Proposición 6. Se tiene que

- $\displaystyle\int 1\,dx = x + c$, para $x \in \mathbb{R}$;
- $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$, para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{R}$ con $n \neq -1$;

con $c \in \mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 7. Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ funciones con primitivas y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que

- $f + g$ tiene primitiva y
$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx,$$
para $x \in I$;
- λf tiene primitiva y
$$\int \lambda f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx,$$
para $x \in I$.

7. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

DEFINICIÓN 14: Integral definida

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función y F' una primitiva, se la integral definida de f por
$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$
Una notación habitual para el lado derecho de la igualdad es la siguiente:
$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

PROPOSICIÓN 8. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continuas positiva, se tiene que el área bajo la gráfica de la función f entre las rectas de ecuación $x = a$ y $x = b$ está dado por
$$A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

PROPOSICIÓN 9. Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas, se tiene que el área delimitada por la gráfica de las funciones f y g entre las rectas de ecuación $x = a$ y $x = b$ está dado por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Semestre 2020-2 Mat. Andrés Merino

1. CURVAS

En esta sección, consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ e I un intervalo de $\mathbb{R}$.

DEFINICIÓN 1: Curva

Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ una función continua, se dice que $\mathcal{C} = \operatorname{img}(\alpha)$ es un curva de $\mathbb{R}^2$ y a α se la llama una parametrización de $\mathcal{C}$.

EJEMPLO 1. Dada la función

$$\begin{aligned} \alpha\colon [-1,2] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, t^2), \end{aligned}$$

se tiene que $\mathcal{C} = \operatorname{img}(\alpha)$ es un arco de parábola.

EJEMPLO 2. Dados dos puntos $A = (a, b)$ y $B = (c, d)$ y la función

$$\begin{aligned} \alpha\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto A + t(B - A), \end{aligned}$$

se tiene que $\mathcal{C} = \operatorname{img}(\alpha)$ es el segmento de recta que va del punto A al punto B.

EJEMPLO 3. La función

$$\begin{aligned} \alpha\colon [0,10] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (2\cos(t), 2\operatorname{sen}(t), t), \end{aligned}$$

se tiene que $\mathcal{C} = \operatorname{img}(\alpha)$ es una espiral en tres dimensiones.

DEFINICIÓN 2: Curva poligonal

Una curva se la llama curva poligonal si está compuesta por segmentos de recta.

DEFINICIÓN 3: Curva cerrada

Sea $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una función continua, se dice que $\mathcal{C} = \operatorname{img}(\alpha)$ es un curva cerrada si $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Definición 4: Curva simple

Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ una función continua, se dice que $\mathcal{C} = \operatorname{img}(\alpha)$ es un curva simple si $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ para todo $t_1, t_2 \in I$, salvo en sus extremos.

Ejemplo 4. Dada la función

$$\begin{aligned} \alpha\colon [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(t), \operatorname{sen}(t)), \end{aligned}$$

se tiene que $\mathcal{C} = \operatorname{img}(\alpha)$ es una circunferencia, la cual es una curva cerrada.

Ejemplo 5. Dada la función

$$\begin{aligned} \alpha\colon [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (2\cos(t), \operatorname{sen}(t)), \end{aligned}$$

se tiene que $\mathcal{C} = \operatorname{img}(\alpha)$ es una elipse, la cual es una curva simple, además es cerrada.

Ejemplo 6. Dada la función

$$\begin{aligned} \alpha\colon [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(t), \operatorname{sen}(2t)), \end{aligned}$$

se tiene que $\mathcal{C} = \operatorname{img}(\alpha)$ es una curva cerrada pero no simple.

2. Figuras geométricas

Teorema 1

Dada una curva cerrada simple $\mathcal{C}$, esta divide al plano en dos conjuntos disjuntos que tiene a la curva $\mathcal{C}$ como frontera común. Uno de estos conjuntos es acotado y es llamado el interior de la curva $\mathcal{C}$ y el otro es no acotado y es llamado el exterior de la curva $\mathcal{C}$.

Definición 5: Figura geométrica

Una figura geométrica es cualquier curva cerrada simple junto con su interior.

Definición 6: Figura convexa

Dada una figura geométrica $\mathcal{G}$, se dice que es convexa si para todo $A, B \in \mathcal{G}$, el segmento de recta que une A con B está contenido en $\mathcal{G}$; caso contrario, se la denomina cóncava.

Definición 7: Polígono

Dada una figura geométrica, es llamada un polígono si su frontera es una curva poligonal. A cada uno de los segmentos de recta que forman su frontera, se lo llama lados del polígono.

Si un polígono tiene tres lados, es llamado triángulo, si tiene cuatro lados, es llamado cuadrilátero.

Definición 8: Clasificación de cuadriláteros

Dado un cuadrilátero, se dice que es:

- un paralelogramo si sus lados son paralelos dos a dos;
- un rombo si es un paralelogramo con todos sus lado de igual longitud;
- un rectángulo si todos los ángulos internos son rectos;
- un cuadrado si todos los ángulos internos son rectos y todos sus lados tienen igual longitud.

Definición 9: Polígono regular

Dado un polígono, se dice regular si todos sus lados tienen la misma longitud y los ángulos internos formados por estos son iguales.

1. CÁLCULO DE ÁREAS Y VOLÚMENES

TEOREMA 1: Principio de Cavalieri en el plano

Si dos figuras en el plano están contenidas entre dos rectas paralelas y si cualquier otra recta paralela a las dos primeras determina segmentos de igual longitud al cortar a las figuras, entonces ambas figuras tienen la misma área.

Ver `https://www.geogebra.org/m/frb85E82` y `https://www.geogebra.org/m/MFD9hRds`

COROLARIO 2. Si una figura geométrica se obtiene al desplazar un segmente de recta entre dos rectas paralelas, entonces el área de la figura es igual a la longitud del segmento por la distancia entre las rectas.

PROPOSICIÓN 3. Si a una figura geométrica del plano está delimitada entre las rectas de ecuación $x = a$ y $x = b$ y la longitud de su sección trasversal resultante al cortar la figura por una recta a la altura x está dado por $L(x)$, entonces, el área de la figura es

$$\int_a^b L(x)\,dx$$

TEOREMA 4: Principio de Cavalieri en el espacio

Si dos cuerpos en el espacio están contenidos entre dos planos paralelos y si cualquier otro plano paralelo a los dos primeros determina figuras de igual área al cortar a los cuerpo, entonces ambos cuerpos tienen el misma volúmen.

Ver `https://www.geogebra.org/m/ptVCr8rH` y `https://www.geogebra.org/m/ePZXD5WD`

COROLARIO 5. Si un cuerpo geométrico se obtiene al desplazar una figura plana entre dos planos paralelos, entonces el volumen del cuerpo es igual al área de la figura por la distancia entre los planos.

PROPOSICIÓN 6. Si a un cuerpo geométrico del espacio está delimitada entre los planos de ecuación $x = a$ y $x = b$ y e; área de su sección trasversal resultante al cortar el cuerpo por un plano a la altura x está dado por $A(x)$, entonces, el volumen de la figura es

$$\int_a^b A(x)\,dx$$

2. Proporción áurea

Definición 1

Al número

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

se lo denomina número áureo.

Definición 2

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se dice que a y b están en proporción áurea si:

$$\frac{a}{b} = \varphi.$$

3. Vectores

Definición 3

Un vector en el plano es un elemento de $\mathbb{R}^2$. Es usual nombre un vector con una letra mayúscula y una flecha sobre esta:

$$\vec{A}.$$

Dado $\vec{A} \in \mathbb{R}^2$, se denota:

$$\vec{A} = (A_x, A_y).$$

A los números A_x y A_y se los denomina las componetes de $\vec{A}$.

Definición 4: Vectores unitarios

A los siguientes vectores se lo denomina vectores unitarios:

$$\vec{i} = (1,0) \qquad \text{y} \qquad \vec{j} = (0,1)$$

Definición 5: Vectores componentes

Sea $\vec{A} \in \mathbb{R}^2$. Se define por los vectores componentes de $\vec{A}$ por:

$$\vec{A}_x = A_x\vec{i} = (A_x, 0) \qquad \text{y} \qquad \vec{A}_y = A_y\vec{j} = (0, A_y).$$

Dado $\vec{A} \in \mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y.$$

Definición 6: Módulo

Sea $\vec{A} \in \mathbb{R}^2$. El módulo de $\vec{A}$ se define por

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}.$$

Definición 7: Módulo

Sea $\vec{A} \in \mathbb{R}^2$. El módulo de $\vec{A}$ se define por

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}.$$

Definición 8: Dirección

Sea $\vec{A} \in \mathbb{R}^2$, con $\vec{A} \neq 0$. La dirección de $\vec{A}$ se define por el ángulo θ tal que

$$A_x = A\cos(\theta) \qquad \text{y} \qquad A_y = A\,\mathrm{sen}(\theta)$$

Proposición 7. Sea $\vec{A} \in \mathbb{R}^2$. Se tiene que si θ es la dirección de $\vec{A}$ y $A_x \neq 0$, entonces

$$\tan(\theta) = \frac{A_y}{A_x}.$$

Proposición 8. Sea $\vec{A} \in \mathbb{R}^2$, con $\vec{A} \neq 0$. Se tiene que si $\theta \in \,]-\pi, \pi]$ es la dirección de $\vec{A}$, entonces

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{A_y}{A_x}\right) & \text{si } x > 0; \\ \arctan\left(\dfrac{A_y}{A_x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ y } y \geq 0; \\ \arctan\left(\dfrac{A_y}{A_x}\right) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ y } y < 0; \end{cases}$$

además,

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0. \end{cases}$$

DEFINICIÓN 9: Coordenadas polares

Sean $\vec{A} \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in \mathbb{R}$ y $r \geq 0$. Se dice que $(r;\theta)$ son las coordenadas polares de si

- r es el módulo de $\vec{A}$ y
- θ es la dirección de $\vec{A}$.

1. Operaciones con vectores

Definición 1

Dados dos vectores $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j}$$

y

$$\alpha\vec{A} = (\alpha A_x)\vec{i} + (\alpha A_y)\vec{j}.$$

2. Movimiento en una dimensión

Definición 2: Posición

Dado un sistema de referencia en una dimensión y una partícula que se mueve en esta. A la función

$$r\colon\ [0, +\infty[\ \to \mathbb{R},$$

que modela la posición de una partícula respecto al origen del sistema de referencia en función del tiempo se la denomina *posición de la partícula*. Así, en el tiempo $t \in [0, +\infty[$, $r(t)$ es la posición de la partícula con respecto al origen del sistema de referencia en el tiempo t.

Definición 3: Desplazamiento

Sean $r\colon\ [0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ la posición de una partícula y $t_1, t_2 \geq 0$ con $t_1 < t_2$. Se define el desplazamiento de la partícula entre t_1 y t_2 por

$$\Delta r(t_1, t_2) = r(t_2) - r(t_1).$$

El desplazamiento no representa la distancia total recorrida por una partícula.

Definición 4: Velocidad promedio, rapidez promedio

Sean $r\colon\ [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ la posición de una partícula y $t_1, t_2 \geq 0$ con $t_1 < t_2$. Se define la velocidad promedio de la partícula entre t_1 y t_2 por

$$\bar{v}(t_1, t_2) = \frac{r(t_2) - r(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Además, se define la rapidez promedio de la partícula entre t_1 y t_2 por

$$|\bar{v}(t_1, t_2)|.$$

Definición 5: Velocidad instantánea

Sean $r\colon\ [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ la posición de una partícula y $t \geq 0$. Se define la velocidad instantánea de la partícula en t por

$$v(t) = \frac{dr}{dt}(t) = r'(t).$$

Además, se define la rapidez instantánea de la partícula en t por

$$|v(t)|.$$

Proposición 1. Sean $r\colon\ [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ la posición de una partícula y $t_1, t_2 \geq 0$ con $t_1 < t_2$. Si se conoce la velocidad v de la partícula, se tiene que

- el desplazamiento de la partícula entre t_1 y t_2 está dado por

$$\Delta r(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(\tau)\, d\tau;$$

- la distancia total recorrida por la partícula entre t_1 y t_2 está dado por

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(\tau)|\, d\tau;$$

- la posición de la partícula en el tiempo $t \in [0,+\infty[$ está dado por

$$r(t) = r(t_1) + \int_{t_1}^{t} v(\tau)\, d\tau.$$

DEFINICIÓN 6: Aceleración promedio

Sean $r\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la posición de una partícula y $t_1, t_2 \geq 0$ con $t_1 < t_2$. Se define la aceleración promedio de la partícula entre t_1 y t_2 por

$$\bar{a}(t_1, t_2) = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

DEFINICIÓN 7: Aceleración instantánea

Sean $r\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la posición de una partícula y $t \geq 0$. Se define la aceleración instantánea de la partícula en t por

$$a(t) = \frac{dv}{dt}(t) = v'(t),$$

es decir,

$$a(t) = \frac{d^2 r}{dt^2}(t) = r''(t).$$

PROPOSICIÓN 2. Sean $r\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la posición de una partícula y $t_1, t_2 \geq 0$ con $t_1 < t_2$. Si se conoce la aceleración a de la partícula, se tiene que

- la velocidad de la partícula en el tiempo $t \in [0,+\infty[$ está dado por

$$v(t) = v(t_1) + \int_{t_1}^{t} a(\tau)\, d\tau.$$

1. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

DEFINICIÓN 1

Si una partícula se mueve en una dimensión con velocidad constante, entonces decimos que se tiene un movimiento rectilíneo uniforme. En este caso, se tiene que:

$$r(t) = r_0 + \mu t, \qquad v(t) = \nu \qquad \text{y} \qquad a(t) = 0,$$

donde ν sería la velocidad constante de la partícula y r_0 sería la posición inicial de la partícula.

PROPOSICIÓN 1. Si una partícula tiene movimiento rectilineo uniforme, entonces se tiene que

$$\nu = \frac{\Delta r(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} = \frac{r(t_2) - r(t_1)}{t_2 - t_1}$$

.

2. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO

DEFINICIÓN 2

Si una partícula se mueve en una dimensión con aceleración constante, entonces decimos que se tiene un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. En este caso, se tiene que:

$$r(t) = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2, \qquad v(t) = v_0 + \alpha t \qquad \text{y} \qquad a(t) = \alpha,$$

donde α sería la aceleración constante de la partícula, r_0 sería la posición inicial de la partícula y v_0 la velocidad inicial.

PROPOSICIÓN 2. Si una partícula tiene movimiento rectilineo uniforme, entonces se tiene que

$$v = \frac{\Delta r(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} = \frac{r(t_2) - r(t_1)}{t_2 - t_1}$$

.

3. Caída libre

Definición 3

En un cuerpo con caída libre se tiene que sigue un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado con

$$a(t) \approx -9{,}80665$$

donde donde la aceleración está medida en $\mathrm{m/s^2}$.

1. MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

DEFINICIÓN 1: Posición

Dado un sistema de referencia en una dimensión y una partícula que se mueve en esta. A la función

$$\vec{r}\colon\ [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}^2,$$

que modela la posición de una partícula respecto al origen del sistema de referencia en función del tiempo se la denomina *posición de la partícula*. Así, en el tiempo $t \in [0,+\infty[$, $r(t)$ es la posición de la partícula con respecto al origen del sistema de referencia en el tiempo t.

DEFINICIÓN 2: Desplazamiento

Sean $\vec{r}\colon\ [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ la posición de una partícula y $t_1, t_2 \geq 0$ con $t_1 < t_2$. Se define el desplazamiento de la partícula entre t_1 y t_2 por

$$\Delta\vec{r}(t_1,t_2) = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1).$$

El desplazamiento no representa la distancia total recorrida por una partícula.

DEFINICIÓN 3: Velocidad instantánea

Sean $\vec{r}\colon\ [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ la posición de una partícula y $t \geq 0$. Se define la velocidad instantánea de la partícula en t por

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \vec{r}\,'(t).$$

Además, se define la rapidez instantánea de la partícula en t por

$$|\vec{v}(t)|.$$

PROPOSICIÓN 1. Sean $\vec{r}\colon\ [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ la posición de una partícula y $t_1, t_2 \geq 0$ con $t_1 < t_2$. Si se conoce la velocidad $\vec{v}$ de la partícula, se tiene que

- el desplazamiento de la partícula entre t_1 y t_2 está dado por

$$\Delta\vec{r}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(x)\,dx;$$

- la distancia total recorrida por la partícula entre t_1 y t_2 está dado por

$$\int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(\tau)|\,d\tau;$$

- la posición de la partícula en el tiempo $t \in [0, +\infty[$ está dado por

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_1) + \int_{t_1}^{t} \vec{v}(x)\,dx.$$

DEFINICIÓN 4: Aceleración instantánea

Sean $\vec{r}\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la posición de una partícula y $t \geq 0$. Se define la aceleración instantánea de la partícula en t por

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \vec{v}'(t),$$

es decir,

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \vec{r}''(t).$$

PROPOSICIÓN 2. Sean $\vec{r}\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la posición de una partícula y $t_1, t_2 \geq 0$ con $t_1 < t_2$. Si se conoce la aceleración a de la partícula, se tiene que

- la velocidad de la partícula en el tiempo $t \in [0, +\infty[$ está dado por

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_1) + \int_{t_1}^{t} \vec{a}(x)\,dx.$$

Semestre 2020-2 Mat. Andrés Merino

1. Movimiento uniformemente acelerado

Definición 1

Si una partícula se mueve en una dimensión con aceleración constante, entonces decimos que se tiene un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. En este caso, se tiene que:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2, \qquad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{\alpha}t \qquad \text{y} \qquad \vec{a}(t) = \vec{\alpha},$$

donde α sería la aceleración constante de la partícula, r_0 sería la posición inicial de la partícula y v_0 la velocidad inicial.

2. Movimiento parabólico

Definición 2

En un cuerpo con movimiento parabólico sigue un movimiento uniformemente acelerado con

$$\vec{a}(t) \approx -9{,}80665\vec{j}$$

donde la aceleración está medida en $\mathrm{m/s^2}$.

3. Leyes de Newton

Teorema 1: Primera ley de Newton

En ausencia de fuerzas externas, y cuando se ve desde un marco de referencia inercial, un objeto en reposo se mantiene en reposo y un objeto en movimiento continúa en movimiento con una velocidad constante (esto es, con una rapidez constante en una línea recta).

DEFINICIÓN 3: Masa

La masa es la propiedad de un objeto que especifica cuánta resistencia muestra un objeto para cambiar su velocidad

TEOREMA 2: Segunda ley de Newton

Cuando se ve desde un marco de referencia inercial, la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa:

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m},$$

es decir,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

1. TERCERA LEY DE NEWTON

TEOREMA 1: Tercera ley de Newton

Si dos objetos interactúan, la fuerza $\vec{F_{1,2}}$ que ejerce el objeto 1 sobre el objeto 2 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza $\vec{F_{2,1}}$ que ejerce el objeto 2 sobre el objeto 1:

$$\vec{F_{1,2}} = \vec{F_{2,1}}$$