Semestre 2020-1 Andrés Merino

1. FUNCIONES

DEFINICIÓN 1: Función

Dados A y B dos conjuntos, f es una **función de** A **en** B si:

- $f \subseteq A \times B$;
- para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$; y
- si $(x, y) \in f$ y $(x, z) \in f$, entonces $y = z$.

Si f es una función de A en B, escribirá $f\colon A \to B$. Y, en lugar de $(x, y) \in f$, escribiremos $f(x) = y$, ya que dado x, y es único.

En otras palabras, f es una función de A en B si es una relación entre los elementos de A y B de modo que para cada elemento x de A, hay un único elemento y de B que le corresponde a x en esta relación; a ese elemento y se le llama **imagen de** x **respecto de** f **y se le representa por** $f(x)$.

DEFINICIÓN 2: Dominio

Dada $f\colon A \to B$ el conjunto A se llama **dominio** de f y se le representa por $\operatorname{dom}(f)$.

DEFINICIÓN 3: Imagen o recorrido

Dada una función $f\colon A \to B$, la **imagen** o el **recorrido** de f es el conjunto

$$\{f(x) : x \in A\},$$

que se lo representa por

$$\operatorname{img}(f) \qquad \text{o} \qquad \operatorname{rec}(f).$$

Semestre 2020-1 Andrés Merino

DEFINICIÓN 1: Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

Una función $f\colon A \to B$ es:

- **inyectiva** si para todo $u, v \in A$ tales que $f(u) = f(v)$, se tiene que $u = v$;
- **sobreyectiva** si para todo $v \in B$, existe $u \in A$ tal que $f(u) = v$;
- **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

PROPOSICIÓN 1 (Sobreyectiva)**.** Una función $f\colon A \to B$ es sobreyectiva si y solo si $\operatorname{img}(f) = B$.

DEFINICIÓN 2: Función creciente, decreciente y monótona

Dada la función $f\colon A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ y el conjunto $I \subseteq A$, f es:

- **creciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u \leq v$, se tiene que $f(u) \leq f(v)$;
- **estrictamente creciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u < v$, se tiene que $f(u) < f(v)$;
- **decreciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u \leq v$, se tiene que $f(u) \geq f(v)$;
- **estrictamente decreciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u < v$, se tiene que $f(u) > f(v)$; y
- **monótona en** I si es creciente o decreciente en I.

DEFINICIÓN 3: Composición de funciones

Dadas las funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$, la función

$$\begin{aligned} g \circ f\colon A &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

se denomina **composición de** g **y** f.

Definición 4: Función invertible y función inversa

Una función $f\colon A \to B$ es **invertible** si existe una única función $g\colon B \to A$ tal que para todo $u \in A$ y $v \in B$, se tiene que

$$g(f(u)) = u \qquad \text{y} \qquad f(g(v)) = v$$

A esta función se la llama **función inversa de** f y se la denota por f^{-1}.

Proposición 2. Dada una función $f\colon A \to B$ invertible, se tiene que

$$f\big(f^{-1}(v)\big) = v \qquad \text{y} \qquad f^{-1}\big(f(u)\big) = u$$

para todo $u \in A$ y todo $v \in B$.

Proposición 3 (Inversa)**.** Una función $f\colon A \to B$ es invertible si y solo si f es biyectiva.

Semestre 2020-1 Andrés Merino

1. FUNCIONES ALGEBRAICAS

DEFINICIÓN 1: Función lineal

Dado $a \in \mathbb{R}$, la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax \end{aligned}$$

se llama **lineal**.

DEFINICIÓN 2: Función afín

Dados $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax + b \end{aligned}$$

se llama **afín**.

DEFINICIÓN 3: Función cuadrática

Dados $a \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$, la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

se llama **cuadrática**.

DEFINICIÓN 4: Función polinómica

Dados $n \in \mathbb{N}^*$ y $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ con $a_n \neq 0$, la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

se llama **polinómica**.

DEFINICIÓN 5: Función racional

Dadas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funciones polinómicas, se define $D = \{x \in$

$\mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$. La función

$$\begin{aligned} r\colon D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

se llama **racional**.

DEFINICIÓN 6: Función radical

Dado $n \in \mathbb{N}^*$, la función

$$\begin{aligned} \rho\colon \mathbb{R}^+ \cup \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt[n]{x}, \end{aligned}$$

donde

$$\left(\sqrt[n]{u}\right)^n = u$$

para todo $u \geq 0$, se llama **radical**.

DEFINICIÓN 7: Función algebraica

Una función es **algebraica** si es la composición de restricciones de funciones lineales, afines, polinómicas, racionales o radicales.

2. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

DEFINICIÓN 8

Dado $a > 0$ y $a \neq 1$, existe una única función

$$\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene:

1. $\exp_a(1) = a$.
2. $\exp_a(0) = 1$.
3. $\exp_a(x + y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$.
4. $\exp_{\exp_a(x)}(y) = \exp_a(x \cdot y)$.

Por notación, para $a > 0$ con $a \neq 1$ y $x \in \mathbb{R}$

$$a^x = \exp_a(x)$$

Con esto, al número a se le denomina base de la función exponencial.

PROPOSICIÓN 1. Dado $a > 0$ y $a \neq 1$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene:

1. $a^1 = a$.
2. $a^0 = 1$.
3. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
4. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.
5. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.

PROPOSICIÓN 2. Dado $a \in \mathbb{R}^+ \smallsetminus \{1\}$, existen dos casos:

1. Si $0 < a < 1$, entonces $\exp_a$ es decreciente en $\mathbb{R}$.
2. Si $a > 1$, entonces $\exp_a$ es creciente en $\mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 3. Dado $a \in \mathbb{R}^+ \smallsetminus \{1\}$, se tiene que $\exp_a$ es biyectiva.

3. FUNCIÓN LOGARITMO

DEFINICIÓN 9

Dado $a \in \mathbb{R}^+ \smallsetminus \{1\}$, la función logaritmo en base a, es la función

$$\log_a = \exp_a^{-1}.$$

Notemos que

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

es una función biyectiva.

PROPOSICIÓN 4. Dado $a \in \mathbb{R}^+ \smallsetminus \{1\}$:

1. $\log_a(\exp_a(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. $\exp_a(\log_a(x)) = x$ para todo $x > 0$.
3. $\log_a(1) = 0$ y $\log_a(a) = 1$.

4. Para todo $x, y > 0$,
$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad \text{y} \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y).$$
5. Para todo $x > 0$ y $y \in \mathbb{R}$,
$$\log_a(x^y) = y \log_a(x).$$
6. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$,
$$y = \log_a(x) \quad \text{equivale a} \quad a^y = x.$$
7. Si $0 < a < 1$, entonces $\log_a$ es decreciente en $\mathbb{R}^+$.
8. Si $a > 1$, entonces $\log_a$ es creciente en $\mathbb{R}^+$.

PROPOSICIÓN 5. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, se tiene que
$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}.$$

Una identidad útil de recordar es
$$a^{\log_a(b)} = b$$
para todo $a, b > 0$ con $a \neq 1$.

DEFINICIÓN 10

El *número de euler* $e \in \mathbb{R}$ es un número irracional
$$e \approx 2{,}718281.$$

DEFINICIÓN 11

El logaritmo natural es
$$\ln = \log_e.$$
También, el logaritmo decimal es
$$\log = \log_{10}.$$

4. Modelización

Definición 12

Para este curso, la modelización constará de:

1. Asignación de variables: Se refiere al significado que damos a cada una de las variables según el enunciado del problema.

2. Planteamiento: Consiste en elaborar un gráfico o un proceso analítico donde se relacionen las variables fijadas. Tanto en la elaboración del gráfico como en el proceso analítico, es fundamental precisar el dominio y el conjunto de llegada de la función. En el proceso analítico, a más del dominio y conjunto de llegada, se precisa fijar la ley de asignación.

1. LÍMITES

En este curso se considera a $L \in \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ como un intervalo, $a \in I$ y $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $I \subseteq A \cup \{a\}$.

DEFINICIÓN 1: Notación de límite

Sean

1. a y L dos números reales;
2. I un intervalo abierto que contiene al número a; y
3. $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función tal que $I \subset A \cup \{a\}$.

La notación

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se lee *L es el límite de f cuando x tiende a a*.

La idea intuitiva de límite es la siguiente: sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función, se dice que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A que se acerquen a a se tiene que la imagen de esos elementos se acercan a L.

TEOREMA 1: Unicidad del límite

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Se tiene que si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, entonces el número L es el *único* número que satisface esta igualdad.

La existencia del límite de una función en un punto no requiere que ese punto esté en el dominio de la función. El siguiente teorema enfatiza este hecho.

TEOREMA 2: Límite de funciones localmente iguales

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ función tal que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Si $g\colon A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ es tal que

$$g(x) = f(x)$$

para todo $x \in I \setminus \{a\}$, entonces existe el límite de g en a y

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

TEOREMA 3: Límites básicos

Se tiene que

$$\lim_{x \to a} x = a$$

y si $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{x \to a} c = c.$$

TEOREMA 4: Propiedades algebraicas de los límites

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ funciones. Si existen $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$, entonces:

1. existe el límite de $f + g$ y

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x);$$

2. existe el límite de $f \cdot g$ y

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x);$$

3. si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$, existe el límite de $\dfrac{1}{g}$ y

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to a} g(x)}.$$

TEOREMA 5: Propiedades algebraicas de los límites II

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ funciones y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si existen $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$, entonces:

1. existe el límite de αf y

$$\lim_{x \to a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \to a} f(x);$$

2. existe el límite de $f - g$ y

$$\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x);$$

3. existe el límite de $\alpha f + \beta g$ y

$$\lim_{x \to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x \to a} f(x) + \beta \lim_{x \to a} g(x);$$

4. existe el límite de $\dfrac{f}{g}$ siempre que $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ y

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}.$$

TEOREMA 6: Generalización de las propiedades algebraicas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $f_1, f_2, \ldots, f_n \colon A \to \mathbb{R}$ tales que existe el límite $\lim\limits_{x \to a} f_i(x)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, se tiene que:

1. $\lim\limits_{x \to a} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lim\limits_{x \to a} f_i(x);$
2. $\lim\limits_{x \to a} \prod\limits_{i=1}^{n} f_i(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} \lim\limits_{x \to a} f_i(x).$

TEOREMA 7: Límite de funciones polinomiales y racionales

Sean $P \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $Q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones polinomiales. Se tiene que:

1. $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$ y
2. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$, siempre que $Q(a) \neq 0$.

TEOREMA 8: Límite de una función radical

Sean $f \colon A \to \mathbb{R}$ una función y $n \in \mathbb{N}^*$. Si existen

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y $L > 0$, entonces $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)}$ existe y se tiene que

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}.$$

Semestre 2020-1 Andrés Merino

1. LÍMITES LATERALES

DEFINICIÓN 1: Notación de límite laterales

Dados

1. a y L dos números reales;
2. I un intervalo abierto que contiene al número a; y
3. $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subset A \cup \{a\}$.

La notación

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

se lee *L es el límite de f cuando x tiende a a por la derecha*. La notación

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

se lee *L es el límite de f cuando x tiende a a por la izquierda*.

La idea intuitiva de límite lateral es la siguiente: si $f\colon A \to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A, mayores que a, que se acerquen a a, se tiene que la sucesión de las imágenes de esos elementos se acercan a L. Por otro lado, se dice que

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A, menores que a, que se acerquen a a, se tiene que la sucesión de las imágenes de esos elementos se acercan a L.

TEOREMA 1: Límite de funciones localmente iguales

Dada una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

- Si $g\colon A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ es tal que

  $$g(x) = f(x)$$

  para todo $x \in I \setminus \{a\}$ con $x > a$, entonces existe el límite de g en a por la derecha y

  $$\lim_{x\to a^+} g(x) = L.$$

- Si $g\colon A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ es tal que

  $$g(x) = f(x)$$

  para todo $x \in I \setminus \{a\}$ con $x < a$, entonces existe el límite de g en a por la izquierda y

  $$\lim_{x\to a^-} g(x) = L.$$

PROPOSICIÓN 2. Los límites laterales cumplen las mismas propiedades algebraicas que los límites.

TEOREMA 3

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función, se tiene que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe y es igual a L si y solo si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ existen y son iguales a L.

2. CONTINUIDAD

DEFINICIÓN 2: Continuidad

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función tal que $a \in A$, se dice que f es continua en a si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Se dice que f es continua en A si f es continua en cada punto de A.

La proposición: “f es continua en su dominio” se puede abreviar por “f es continua”.

TEOREMA 4: Propiedades algebraicas de la continuidad

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ funciones y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si existen f y g son continuas en a, entonces

1. la función $\alpha f + \beta g$ es continua en a;
2. la función $f \cdot g$ es continua en a; y
3. si $g(a) \neq 0$, la función $\dfrac{f}{g}$ es continua en a.

TEOREMA 5: Continuidad de la composición

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon B \to \mathbb{R}$ funciones, con $\operatorname{img}(f) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$. Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.

PROPOSICIÓN 6 (Límite de una composición)**.** Sean $f\colon B \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ funciones, con $\operatorname{img}(g) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$. Si existe el límite $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ y f es continua en b, entonces existe $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$ y

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(b).$$

TEOREMA 7: Continuidad de una función algebraica

Toda función algebraica es continua en su dominio.

TEOREMA 8: Valor Intermedio

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ con $b > a$. Si f es continua en $[a,b]$, entonces para todo $z \in \mathbb{R}$ entre $f(a)$ y $f(b)$, existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = z.$$

3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

PROPOSICIÓN 9. Las funciones trigonométricas son continuas en su dominio.

PROPOSICIÓN 10. Se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

4. Funciones exponenciales y logarítmicas

Proposición 11. Las funciones exponenciales y logarítmicas son continuas en su dominio.

Proposición 12. Se tiene que

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

Semestre 2020-1 Andrés Merino

1. LÍMITES AL INFINITO

DEFINICIÓN 1: Notación de límite al infinito

Dados

1. L un número real;
2. I un intervalo no acotado superiormente ; y
3. $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subset A$.

La notación

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

se lee *L es el límite de f cuando x tiende a más infinito*. Por otro lado, si I es un intervalo no acotado inferiormente, la notación

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

se lee *L es el límite de f cuando x tiende a menos infinito*.

La idea intuitiva de límite al infinito es la siguiente: sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A que crezcan indefinidamente sin estar acotados, se tiene que la imagen de esos elementos se acercan a L. Por otro lado, sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A que decrezcan indefinidamente sin estar acotados, se tiene que la imagen de esos elementos se acercan a L.

PROPOSICIÓN 1. Los límites al infinito cumplen las mismas propiedades algebraicas que los límites.

PROPOSICIÓN 2. Se tiene que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

2. LÍMITES INFINITOS

DEFINICIÓN 2: Notación de límite infinito

Dados

1. a un número real;
2. I un intervalo abierto que contiene al número a; y
3. $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subset A \cup \{a\}$.

La notación

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

se lee *el límite de f cuando x tiende a a es más infinito*. La notación

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

se lee *el límite de f cuando x tiende a a es menos infinito*.

La idea intuitiva de límite infinito es la siguiente: sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A que se acerquen a a, se tiene que la imagen de esos elementos crecen indefinidamente sin estar acotada. Por otro lado, sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A que se acerquen a a, se tiene que la imagen de esos elementos decrecen indefinidamente sin estar acotada.

Que el límite de una función sea más infinito o menos infinito es una forma de no existencia del límite de la función.

Proposición 3. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0,$$

se tiene que si

1. $f(x) > 0$ para todo $x \in I \smallsetminus \{a\}$, entonces $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
2. $f(x) < 0$ para todo $x \in I \smallsetminus \{a\}$, entonces $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Proposición 4 (Propiedades de límites infinitos)**.** Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ dos funciones. Se tiene que

1. si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$, entonces
$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} f(x)g(x) = +\infty;$$
2. si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \mp\infty$, entonces
$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = -\infty;$$
3. si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, entonces
$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0;$$
4. si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ y $\beta > 0$, entonces: $\lim\limits_{x \to a} \beta f(x) = \pm\infty$;
5. si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ y $\beta < 0$, entonces: $\lim\limits_{x \to a} \beta f(x) = \mp\infty$;
6. si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ y existe $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ o g está acotada inferiormente en un intervalo alrededor de a, entonces
$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \pm\infty;$$
7. si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ y existe $\lim\limits_{x \to a} g(x) > 0$ o g está acotada inferiormente por un número positivo en un intervalo alrededor de a, entonces:
$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \pm\infty;$$

8. si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ y existe $\lim\limits_{x \to a} g(x) < 0$ o g está acotada superiormente por un número negativo en un intervalo alrededor de a, entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \mp\infty.$$

PROPOSICIÓN 5. Se tiene que

$$\lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty.$$

3. CONCEPTO DE DERIVADA

En esta sección, tomaremos $I \subseteq \mathbb{R}$ como un intervalo.

DEFINICIÓN 3: Razón de cambio promedio

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función, $a \in I$ y $h \in \mathbb{R}$ tal que $a + h \in I$, se define *la razón de cambio promedio de la función f entre a y $a + h$* por

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Este número también es conocido como *variación media* de f en el intervalo entre a y $a + h$.

También podemos definir la razón de cambio promedio de la función f entre a y b por

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Una notación para la razón de cambio es la siguiente. Denotamos con Δx el cambio entre a y $a + h$, es decir

$$\Delta x = h,$$

además, si nombramos por y al número $f(x)$, denotamos con Δy el cambio de f entre a y $a + h$, es decir,

$$\Delta y = f(a+h) - f(a).$$

Con esto, la razón de cambio promedio de la función f entre a y $a+h$ es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

DEFINICIÓN 4: Derivada de una función en un punto

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $a \in I$. *La derivada de la función f en a*, denotada por $f'(a)$, es el número

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

siempre que este límite exista. En este caso, se dice que f es *derivable en a*.

También se dice que el número $f'(a)$ es la *razón de cambio instantánea de f en a*.

DEFINICIÓN 5: Función derivada

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función, se define

$$A = \{x \in I : f \text{ es derivable en } x\}.$$

La función

$$\begin{aligned} Df\colon\ A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

se denomina *derivada de f*. Se dice que f es *derivable en A* y su derivada es la función Df.

Otras notaciones para la derivada que se encuentran en la literatura son

$$Df(a) = f'(a) = \frac{df}{dx}(a),$$

y a la función Df también se la llama f'. Además, se tiene la siguiente notación:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(f(x)) = (f(x))' = \frac{d}{dx}f(x).$$

Y si para cada x en el dominio de f, nombramos y al número $f(x)$, se escribe

$$\frac{dy}{dx}$$

en lugar de $f'(x)$.

PROPOSICIÓN 6. Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $a \in I$. Se tiene que f es derivable en a si y solo si existe

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

además,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

TEOREMA 7

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función. Se tiene que si f es derivable en $a \in I$, entonces f es continua en a.

1. PROPIEDADES DE LA DERIVADA

PROPOSICIÓN 1. Se tiene que, para $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq -1$,

$$\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}.$$

PROPOSICIÓN 2. Se tiene que

$$\frac{d}{dx}(\exp(x)) = (\exp(x))' = \exp(x)$$

es decir,

$$\frac{d}{dx}(e^x) = (e^x)' = e^x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = (\ln(x))' = \frac{1}{x},$$

para todo $x > 0$.

PROPOSICIÓN 3. Se tiene que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(x)) = (\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$$

y

$$\frac{d}{dx}(\cos(x)) = (\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 4 (Propiedades algebraicas I)**.** Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ dos funciones reales derivables en $a \in I$. Se tiene que:

1. $f + g$ es derivable en a y

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a);$$

2. fg es derivable en a y

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a);$$

3. si $g(a) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ es derivable en a y

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}.$$

PROPOSICIÓN 5 (Propiedades algebraicas II)**.** Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ dos funciones reales derivables en $a \in I$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se tiene que:

1. λf es derivable en a y
$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a).$$

2. $(f - g)$ es derivable en a y

$$(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a).$$

3. si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es derivable en a y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

2. REGLA DE LA CADENA

En esta sección, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ representarán intervalos abiertos.

TEOREMA 6: Regla de la cadena

Sean $f\colon J \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ funciones, con $\operatorname{img}(g) \subseteq J$. Si

1. g es derivable en $a \in I$; y

2. f es derivable en $g(a) \in J$,

entonces $f \circ g$ es derivable en a. Además:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

3. Derivada de orden superior

Definición 1: Segunda derivada

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I, si la función Df es derivable en $a \in I$, entonces se dice que f es **dos veces derivable en** a y la derivada de Df en a se la denota por $f''(a)$ y se le denomina **la segunda derivada de** f **en** a.

Definición 2: Función segunda derivada

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función, se define

$$A = \{x \in I : f \text{ es dos veces derivable en } x\}.$$

La función

$$\begin{aligned} D^2 f\colon A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f''(x) \end{aligned}$$

se denomina *segunda derivada de* f. Se dice que f es *dos veces derivable en* A y su **segunda derivada** es la función $D^2 f$.

Otras notaciones para la derivada que se encuentran en la literatura son

$$D^2 f(a) = f''(a) = f^{(2)}(a) = \frac{d^2 f}{dx^2}(a),$$

y a la función $D^2 f$ también se la llama f'' o $f^{(2)}$. Además, se tiene la siguiente notación:

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x)) = (f(x))'' = \frac{d^2}{dx^2} f(x).$$

Y si para cada x en el dominio de f, nombramos y al número $f(x)$, se escribe

$$\frac{d^2 y}{dx^2}$$

en lugar de $f''(x)$.

4. Interpretación geométrica de la derivada

Definición 3: Recta tangente

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable en $c \in I$. La recta de ecuación

$$y = f(c) + f'(c)(x - c),$$

cuya pendiente es el número $f'(c)$, se llama **recta tangente a la gráfica de f en el punto** $(c, f(c))$.

5. Fórmula de Taylor

Teorema 7: Fórmula de Taylor de primer orden

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable en $a \in I$, entonces existe $r > 0$ tal que para todo $h \in \mathbb{R}$ que cumple $|h| < r$, se tiene que

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + hE(a, h),$$

donde $\lim\limits_{h \to 0} E(a, h) \to 0$.

De forma equivalente, si $|x - a| < r$, tenemos que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)E(a, x)$$

donde $\lim\limits_{x \to a} E(a, x) \to 0$.

Proposición 8 (Aproximación lineal)**.** Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable en $a \in I$, entonces la función $F\colon I \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = f(a) + f'(a)(x - a),$$

para $x \in I$, es una buena aproximación lineal de la función f cerca de a, es decir,

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x) - f(x)}{x - a} = 0.$$

TEOREMA 9: Fórmula de Taylor de segundo orden

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en $a \in I$, entonces existe $r > 0$ tal que para todo $h \in \mathbb{R}$ que cumple $|h| < r$, se tiene que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + h^2E(a,h),$$

donde $\lim\limits_{h\to 0} E(a,h) \to 0$.

De forma equivalente, si $|x-a| < r$, tenemos que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + (x-a)^2E(a,x)$$

donde $\lim\limits_{x\to a} E(a,x) \to 0$.

PROPOSICIÓN 10 (Aproximación cuadrática)**.** Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en $a \in I$, entonces la función $F\colon I \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2,$$

para $x \in I$, es una buena aproximación cuadrática de la función f cerca de a, es decir,

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x) - f(x)}{(x-a)^2} = 0.$$

1. Razón de cambio relacionadas

EJERCICIO 1. Un radar que está a 12 kilómetros de una base militar detecta que un avión sobrevuela la base a 9 000 metros de altura y que se dirige hacia el radar, manteniendo su altitud y velocidad. Si la rapidez con que decrece la distancia entre el avión y el radar es de 500 kilómetros por hora, ¿a qué velocidad vuela el avión?

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- t: el tiempo en horas.
- $x(t)$: distancia horizontal (en kilómetros) entre el radar y el avión en el momento t horas.
- $z(t)$: distancia total (en kilómetros) entre entre el radar y el avión en el momento t horas.

Con esto, se tiene que

$$x(0) = 12, \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dt}(0) = 500.$$

Puesto que el avión conserva una altitud constante de 9 kilómetros por hora, se tiene la siguiente relación:

$$z(t) = \sqrt{(x(t))^2 + 9^2},$$

de donde, derivando con respecto a t, obtenemos

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{x(t)}{\sqrt{(x(t))^2 + 81}} \cdot \frac{dx}{dt}(t);$$

por tanto,

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{\sqrt{(x(t))^2 + 81}}{x(t)} \cdot \frac{dz}{dt}(t).$$

Evaluando en $t=0$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}(0) &= \frac{\sqrt{(x(0))^2+81}}{x(0)}\cdot\frac{dz}{dt}(0)\\ &= \frac{\sqrt{12^2+81}}{12}\cdot 500\\ &= 625.\end{aligned}$$

Así, la velocidad del avión es de 625 kilómetros por hora cuando sobrevuela la base. □

2. Magnitudes económicas

Definición 1: Magnitud marginal

Sea $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función que represente una magnitud económica, entonces, se define el valor marginal de esta magnitud por f'.

Si, por ejemplo, $C\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ es una función tal que si q representa la cantidad de un producto, $C(q)$ representa el costo de producirlo, entonces C' es el costo marginal y se tiene que, para valores grandes de q, el costo de producir una unidad más es aproximadamente su costo marginal: $C'(q)$.

Definición 2: Elasticidad de la demanda

Sea $p\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ una función tal que si q representa la cantidad de un producto, $p(q)$ representa el precio del producto en función de esa cantidad. Se define la elasticidad puntual de la demanda en la cantidad q por

$$\eta(q)=\frac{\frac{p(q)}{p}}{p'(q)}.$$

Si a representa el porcentaje de cambio en la demanda y b representa el porcentaje de cambio en el precio cuando se están ofertando q unidades, entonces se tiene que

$$\eta(p)\approx\frac{a}{b}.$$

- Cuando $|\eta|>1$, se dice que la demanda es elástica.
- Cuando $|\eta|=1$, se dice que la demanda tiene elásticidad unitaria.

- Cuando $|\eta| < 1$, se dice que la demanda es inelástica.

Definición 3

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función, la razón de cambio relativa de f en x es

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

y la razón de cambio porcentual de f en x es

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot 100.$$

Definición 4: Propensión marginal al consumo

Sea $C\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función tal que si I representa ingreso total, $C(I)$ representa el consumo realizado. Se define la propensión marginal al consumo a un ingreso I por

$$C'(I).$$

Además, se define la propensión marginal al ahorro a un ingreso I por

$$1 - C'(I).$$

3. Derivadas parciales

Definición 5

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, a una función $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ se la llama campo escalar.

Definición 6

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Dados $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar, si consideremos $y \in \mathbb{R}$ fijo y tomamos la función

$$\begin{aligned} g_y\colon I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g_y(x) = f(x,y), \end{aligned}$$

se define la primera derivada parcial de f por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g_y'(x).$$

Por otro lado, si consideremos $x \in \mathbb{R}$ fijo y tomamos la función

$$\begin{aligned} g_x \colon I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto g_x(y) = f(x,y), \end{aligned}$$

se define la segunda derivada parcial de f por:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g_x'(y).$$

DEFINICIÓN 7

Sean $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $a \in \Omega$. Se define el vector gradiente de f en a por

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

PROPOSICIÓN 1. Sean $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $a \in \Omega$. Tenemos que

$$f(a+h) - f(a) \approx \nabla f(a) \cdot h.$$

PROPOSICIÓN 2 (Aproximación lineal)**.** Sea $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable y $a \in \Omega$, entonces la función definida por

$$F(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a),$$

es una buena aproximación lineal de la función f cerca de a, es decir,

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x) - f(x)}{\|x - a\|} = 0.$$

1. Derivada de la función implícita

DEFINICIÓN 1

Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{img}(f) \subseteq J$ y $F\colon I \times J \to \mathbb{R}$ funciones tal que para todo $x \in I$ se tiene que

$$F(x, f(x)) = 0,$$

se dice que *la ecuación*

$$F(x, y) = 0,$$

donde $y = f(x)$ y $x \in I$, define la función f implícitamente. Se dice también que la ecuación *define implícitamente y como función de x*.

La ecuación

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

define implícitamente y como una o más funciones de x. Nombremos a una de estas funciones con f, tenemos que

$$x^2 + (f(x))^2 - 4 = 0.$$

TEOREMA 1: Derivada de la función implícita

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{img}(f) \subseteq J$ y $F\colon I \times J \to \mathbb{R}$ funciones. Supongamos que f está definida de manera implícita con respecto a F y definamos

$$\begin{aligned} g\colon I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x, f(x)). \end{aligned}$$

Se tiene que si g es derivable en $x \in I$, entonces

$$g'(x) = 0.$$

La ecuación

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

define implícitamente y como una o más funciones de x. Nombremos a una de estas funciones con f, tenemos que

$$x^2 + (f(x))^2 - 4 = 0.$$

Por otra parte, asumiendo que f es derivable en x, por la regla de la cadena, tenemos que

$$\left(x^2 + f^2(x) - 4\right)' = 0,$$

es decir, se tiene que

$$2x + 2f(x) \cdot f'(x) = 0.$$

Así, se verifica que

$$f'(x) = \frac{-x}{f(x)}.$$

Es decir, hemos hallado la derivada de f sin conocer explícitamente f, basta con saber que existe y es derivable.

2. Extremos

En esta sección, asumiremos que $I = [a, b]$, con $a < b$.

Definición 2: Extremos globales

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Decimos que

- f alcanza un máximo global en c y que su máximo (global) es $f(c)$ si

  $$f(x) \leq f(c)$$

  para todo $x \in I$;

- f alcanza un mínimo global en c y que su mínimo (global) es $f(c)$ si

  $$f(x) \geq f(c)$$

  para todo $x \in I$.

Teorema 2

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene que f alcanza su mínimo global y su máximo global en I.

Si denotamos por m a su mínimo y por M a su máximo, se tiene que existe

$x_m \in I$ y $x_M \in I$ tales que

$$m = f(x_m) \quad \text{y} \quad M = f(x_M)$$

y para todo $x \in I$, se verifica que

$$m \leq f(x) \leq M.$$

En otras palabras, se tiene que $\operatorname{img}(f) = [m, M]$.

DEFINICIÓN 3: Extremos locales

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Decimos que

- f alcanza un máximo local en c y es igual a , y su máximo local es $f(c)$, si existe $r > 0$ tal que
$$f(x) \leq f(c)$$
para todo $x \in [c - r, c + r] \cap I$;

- f alcanza un mínimo local en c, y su mínimo local es $f(c)$, si existe $r > 0$ tal que
$$f(x) \geq f(c)$$
para todo $x \in [c - r, c + r] \cap I$.

DEFINICIÓN 4: Puntos críticos

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Decimos que c es un punto crítico de f si

- f no es derivable en c, o

- f es derivable en c y $f'(c) = 0$.

TEOREMA 3

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua y $c \in \operatorname{int}(I)$. Si f alcanza un extremo local en c, entonces c es un punto crítico de f.

PROPOSICIÓN 4. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I, se tiene que f alcanza sus extremos globales en puntos críticos del interior de I o en los extremos de I.

3. MONOTONÍA

En esta sección, asumiremos que $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y $A \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $I \subseteq A$.

TEOREMA 5: Monotonía

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en $\operatorname{int}(I)$. Se tiene que

- si $f'(x) > 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces f es estrictamente creciente en I;
- si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces f es creciente en I;
- si $f'(x) < 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces f es estrictamente decreciente en I; y
- si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces f es decreciente en I.

PROPOSICIÓN 6. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y $c \in \operatorname{int}(I)$. Se tiene que

- si existe $r > 0$ tal que f es creciente en $]c-r, c[$ y decreciente en $]c, c+r[$, entonces f alcanza un máximo local en c;
- si existe $r > 0$ tal que f es decreciente en $]c-r, c[$ y creciente en $]c, c+r[$, entonces f alcanza un mínimo local en c.

TEOREMA 7: Criterio de la primera derivada para extremos

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y $c \in \operatorname{int}(I)$ un punto crítico de f. Suponga que existe $R > 0$ tal que f es derivable en $(]c-R, c+R[\smallsetminus \{c\}) \cap I$. Se tiene que

- si existe $r > 0$ tal que $f'(x) \geq 0$ para $x \in]c-r, c[$ y $f'(x) \leq 0$ para $x \in]c, c+r[$, entonces f alcanza un máximo local en c;
- si existe $r > 0$ tal que $f'(x) \leq 0$ para $x \in]c-r, c[$ y $f'(x) \geq 0$ para $x \in]c, c+r[$, entonces f alcanza un mínimo local en c.

Este teorema se lo puede parafrasear como sigue:

- si cerca del punto c, f' cambia de negativa a positiva en c, recorriendo de izquierda a derecha, entonces f alcanza un mínimo local en c;
- si cerca del punto c, f' cambia de positiva a negativa en c, recorriendo de izquierda a derecha, entonces f alcanza un máximo local en c.

4. Convexidad

En esta sección, asumiremos que $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y $A \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $I \subseteq A$.

Definición 5: Convexidad y concavidad

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es

- convexa en I si para todo $x, y \in I$ y todo $t \in [0,1]$ se tiene que

$$f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x);$$

- cóncava en I si para todo $x, y \in I$ y todo $t \in [0,1]$ se tiene que

$$f(ty + (1-t)x) \geq tf(y) + (1-t)f(x).$$

Se puede parafrasear el teorema anterior se la siguiente manera: se dice que f es

- convexa en I si para todo $x, y \in I$ la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ queda sobre el gráfico de f.
- cóncava en I si para todo $x, y \in I$ la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ queda bajo el gráfico de f.

En la literatura, se puede encontrar que se nombra "cóncava hacia arriba" en lugar de "convexa" y "cóncava hacia abajo" en lugar de "concava".

Teorema 8: Criterio de la primera derivada para la convexidad

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en I, con I un intervalo abierto. Se tiene que

- si f' es creciente en I, entonces f es convexa en I; y
- si f' es decreciente en I, entonces f es cóncava en I.

Teorema 9: Criterio de la segunda derivada para la convexidad

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en I y dos veces derivable en I, con I un intervalo abierto. Se tiene que

- f es convexa en I si y solo si $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$; y

- f es cóncava en I si y solo si $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

DEFINICIÓN 6: Puntos de inflexión

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in \operatorname{int}(I)$. Si existe $r > 0$ tal que

- f es convexa en $[c - r, c]$ y
- f es cóncava en $[c, c + r]$,

o viceversa, se dice que f tiene un punto de inflexión en c y al punto $(c, f(c))$ se lo llama punto de inflexión.

PROPOSICIÓN 10. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Si se tiene que f tiene un punto de inflexión en c, entonces

- f no es dos veces derivable en c, o
- f es dos veces derivable en c y $f''(c) = 0$.

TEOREMA 11: Criterio de la segunda derivada para extremos

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en I tal que f'' es continua en I. Se tiene que si

- $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f alcanza un mínimo local en c;
- $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f alcanza un máximo local en c.

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA

CÁLCULO DIFERENCIA E INTEGRAL • RESUMEN NO. 10

Semestre 2020-1 Andrés Merino

1. OPTIMIZACIÓN

Resolver un problema de optimización significará determinar los valores extremos de una función y los puntos donde los alcanza.

Si la función representa una determinada situación, el proceso de obtención de esa función a partir de la situación se conoce con el nombre de *modelización* o *modelamiento*. En este proceso, es importante enfatizar en la definición de la función (dominio, recorrido y regla de asignación).

EJERCICIO 1. Una caja sin tapa se construye cortando pequeños cuadrados congruentes de las esquinas de una cartulina de 12 cm por 12 cm y doblando los lados hacia arriba. ¿De qué tamaño se deben cortar los cuadros de las esquinas para que la caja tenga la máxima capacidad o volumen posible?

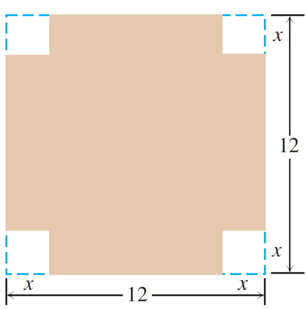
https://www.geogebra.org/m/sWvJYnkd

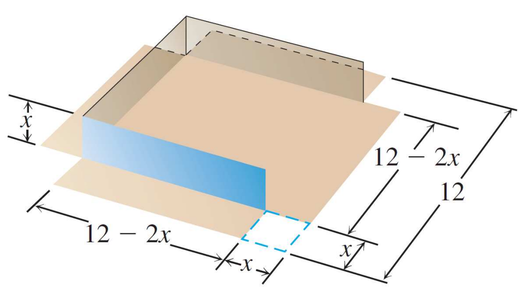
https://www.geogebra.org/m/auf6msvx

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- x: longitud del lado del cuadrado recortado, en centímetros.
- $V(x)$: volumen de la caja formada al recortar un cuadrado de longitud x centímetros, en centímetros cúbicos.

Con esto, considere los siguientes gráficos:





Dado que el cuadrado se recorta de una cartulina de 12 cm por 12 cm, x únicamente puede tomar los valores entre 0 y 6. Con esto, se tiene que la función que modela el volumen de la caja es

$$\begin{aligned} V\colon\ [0,6] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x(12-2x)(12-2x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x. \end{aligned}$$

Por tanto, para encontrar el volumen máximo, debemos determinar el máximo de esta función. Para ello, procedamos a derivar la función V; se tiene que

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144$$

para $x \in \,]0,6[$. Ahora, para encontrar sus puntos críticos, notemos que

$$\begin{aligned} V'(x) = 0 \quad &\equiv \quad 12x^2 - 96x + 144 = 0 \\ &\equiv \quad (x = 2 \vee x = 6). \end{aligned}$$

Así, los puntos críticos son 2 y 6. Como la función está definida en un intervalo cerrado y acotado, la función alcanza su máximo en los extremos del intervalo o en los puntos críticos del interior, es decir, en los puntos 0, 2 y 6. Dado que tenemos

$$V(0) = 0, \qquad V(2) = 128 \qquad \text{y} \qquad V(6) = 0,$$

la función V alcanza el máximo valor de 128 en 2. y

En resumen, se tiene que hay que recortar un cuadrado cuyo lado mida 2 centímetros para lograr que la caja tenga el volumen máximo: 128 centímetros cúbicos. □

> ⚠ En la jerga matemática se suele decir que "hay que maximizar" o "hay que minimizar" una función. En sentido estricto, esas frases no tienen sentido; no obstante, lo que quieren decir es que "hay que encontrar el valor máximo que toma la función y el o los puntos en los que se alcanza este máximo" (lo mismo para el mínimo).

2. Graficación de curvas

Definición 1: Asíntotas horizontales

Dada una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que la gráfica de f tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = L$ si

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L.$$

Definición 2: Asíntotas verticales

Dada una función $f\colon I \to \mathbb{R}$, se dice que la gráfica de f tiene una asíntota horizontal de ecuación $x = a$ si f no es continua en a y

$$\lim_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty.$$

Semestre 2020-1 Andrés Merino

1. NOTACIÓN SIGMA

DEFINICIÓN 1

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. La **suma desde k igual a 0 hasta n de a_k**, notado por

$$\sum_{k=0}^{n} a_k,$$

se define de manera recursiva de la siguiente forma:

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0$; y
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1}$.

Además, dado $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 < n$, se define

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n_0} a_k.$$

TEOREMA 1

Sean $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Se tiene que

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$;
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c a_k = c \sum_{k=0}^{n} a_k$;
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c = (n+1)c$.

PROPOSICIÓN 2. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{R}^+$.

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$;
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$;
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. SUMA DE RIEMANN

En esta sección consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

DEFINICIÓN 2

Dado un intervalo $[a, b]$, una **partición del intervalo** $[a, b]$ **de orden** n es un conjunto

$$P = \{x_k \in \mathbb{R} : k = 0, \ldots, n\},$$

tal que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

- A los conjuntos
$$I_k = [x_{k-1}, x_k],$$
con $k = 1, \ldots, n$, se los llama **subintervalos de la partición**.
- A las cantidades
$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$
con $k = 1, \ldots, n$, se las llama la **longitud** del subintervalo I_k.
- A un conjunto
$$C = \{c_k \in I_k : k = 1, \ldots, n\}$$
se lo llama un **conjunto de etiquetas** para P.
- A un par (P, C) se lo llama una **partición etiquetada** de $[a, b]$.

- A la cantidad

$$|P| = \max_{k=1,\dots,n} \Delta x_k$$

se la llama **grosor** de la partición.

Definición 3: Partición regular

Sea P una partición de $[a,b]$. Se dice que es regular (homogenea o uniforme) si todos sus subintervalos tiene longitud constante, en este caso, se denota

$$\Delta x = |P|.$$

Para $n \in \mathbb{N}^*$, se tiene que si P es una partición regular de orden n del intervalo $[a,b]$, entonces

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

y

$$x_k = a + k\Delta x,$$

con $k = 0, \dots, n$.

Definición 4: Etiquetas derechas, izquierdas y centrales

Sea P una partición de $[a,b]$. Al conjunto de etiquetas C en el cual

- $c_k = x_k$, para $k = 1, \dots, n$, se lo llama como etiquetas derechas;
- $c_k = x_{k-1}$, para $k = 1, \dots, n$, se lo llama como etiquetas izquierdas;
- $c_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$, para $k = 1, \dots, n$, se lo llama como etiquetas centrales.

Si P es una partición regular de orden n, se tiene que

- para etiquetas derechas: $c_k = a + k\Delta x$, con $k = 1, \dots, n$;
- para etiquetas izquierdas: $c_k = a + (k-1)\Delta x$, con $k = 1, \dots, n$;
- para etiquetas centrales: $c_k = a + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta x$, con $k = 1, \dots, n$.

Definición 5

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ un función y (P,C) una partición etiquetada de $[a,b]$ de orden n, entonces

$$S(f,P,C) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

es la **suma de Riemann de f respecto a la partición etiquetada** (P,C).

1. INTEGRAL DE RIEMANN

DEFINICIÓN 1

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ un función e $I \in \mathbb{R}$, se dice que el número I es **la integral de f sobre** $[a,b]$, denotado por

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda partición P que cumple con $|P| < \delta$ y todo conjunto de etiquetas C de P, se tiene que

$$|S(f,P,C) - I| \leq \epsilon.$$

De existir el número I, se dice que f **es integrable según Riemann**.

PROPOSICIÓN 1. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Si f es integrable y denotamos por P_n la partición regular de $[a,b]$, de orden $n \in \mathbb{N}^*$ y grosor Δx, tenemos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} S(f,P_n,C) = \lim_{n \to +\infty} S(f,P_n,C),$$

sin importar las etiquetas que se utilicen.

PROPOSICIÓN 2. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es continua, entonces f es integrable.

PROPOSICIÓN 3. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es acotada y discontinua en un número finito de puntos, entonces f es integrable.

2. Propiedades de la integral

Proposición 4. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones integrables y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que

- $f + g$ es integrable y
$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx;$$
- λf es integrable y
$$\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx;$$
- si $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a,b]$, entonces
$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$
- si $f(x) = g(x)$, para todo $x \in [a,b]$, salvo en una cantidad finita de puntos, entonces
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

Corolario 5. Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable tal que para todo $x \in [a,b]$, se tiene que
$$f(x) \geq 0,$$
entonces
$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

A partir de este punto, consideramos $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $[a,b] \subseteq A$.

Definición 2

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es integrable en $[a,b]$ si $f|_{[a,b]}$ es integrable y se define
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f|_{[a,b]}(x)\, dx$$

DEFINICIÓN 3

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a,b]$. Se define

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

PROPOSICIÓN 6. Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a,b]$ y $c \in [a,b]$. Se tiene que f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$, además

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Ahora, consideremos $c \in \mathbb{R}$ tal que los intervalos comprendidos entre a y b entre a y c, y entre c y b están contenidos en A.

PROPOSICIÓN 7. Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función integrable los intervalos comprendidos entre a y b entre a y c, y entre c y b. Se tiene que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

DEFINICIÓN 4

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Se define **el área bajo la gráfica de f entre las rectas de ecuaciones $x = a$ y $x = b$** por el número

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Por tanto, $A \geq 0$.

3. PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

TEOREMA 8: Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Definamos la función

$$\begin{aligned} F\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Se tiene que F es continua y derivable en $[a,b]$. Además, se verifica que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x),$$

para todo $x \in [a,b]$.

Para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x),$$

para todo $x \in [a,b]$.

4. Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

En esta sección consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Además, tomaremos $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo.

Teorema 9: Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $[a,b]$ tal que

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in [a,b]$. Se tiene que

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, se tiene que, para todo $x \in [a,b]$,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x).$$

Por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, para $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $[a,b]$, se tiene que

$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Definición 5: Primitiva

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función, se llama **primitiva** de f a cualquier función $F\colon I \to \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in I$.

Con esto, se tiene que dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva de f, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Una notación habitual para el lado derecho de la igualdad es la siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Teorema 10

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función. Si f es continua, entonces f tiene una primitiva.

Proposición 11. Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $F\colon I \to \mathbb{R}$ una primitiva de f. Se tiene que para todo $c \in \mathbb{R}$, la función

$$\begin{aligned} G\colon I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) + c \end{aligned}$$

también es una primitiva de f.

Proposición 12. Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $F, G\colon I \to \mathbb{R}$ dos primitivas de f. Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = G(x) + c$$

para todo $x \in I$.

Definición 6: Antiderivada o Integral Indefinida

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función. Un representante arbitrario del conjunto de todas las primitivas de la función f es denotado por

$$\int f(x)\,dx,$$

para $x \in I$. A esta función se le denomina **antiderivada** de f o **integral indefinida** de f.

Consideremos la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x, \end{aligned}$$

tenemos que la función

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2, \end{aligned}$$

es una primitiva de f, por lo tanto

$$\int f(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + c$$

para $x \in \mathbb{R}$, con $c \in \mathbb{R}$.

Proposición 13. Se tiene que

- $\displaystyle\int 1\,dx = x + c$, para $x \in \mathbb{R}$;
- $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$, para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{R}$ con $n \neq -1$;
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,dx = \cos(x) + c$, para $x \in \mathbb{R}$;
- $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + c$, para $x \in \mathbb{R}$;
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$, para $x \in \mathbb{R}^*$;
- $\displaystyle\int \exp(x)\,dx = \exp(x) + c$, para $x \in \mathbb{R}$;

con $c \in \mathbb{R}$.

Una tabla mucho más extensa puede ser encontrada en el apéndice del libro de Thomas.

Proposición 14. Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ funciones con primitivas y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que

- $f + g$ tiene primitiva y

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

para $x \in I$;

- λf tiene primitiva y

$$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx,$$

para $x \in I$.

Existe funciones que a pesar de tener primitiva, no tienen una primitiva que sea una función elemental (composición de funciones polinómicas, racionales, radicales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas). Por ejemplo, las siguientes funciones no tiene primitiva elemental:

- $x \mapsto \exp(x^2)$, con $x \in \mathbb{R}$;
- $x \mapsto \exp(-x^2)$, con $x \in \mathbb{R}$;
- $x \mapsto \sqrt{1-x^4}$, con $x \in [-1,1]$;
- $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$, con $x \in \mathbb{R}^*$;
- $x \mapsto \operatorname{sen}(x^2)$, con $x \in \mathbb{R}$.

5. Técnicas de integración

Teorema 15: Cambio de variable

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función con primitiva y $g\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $\operatorname{img}(g) \subseteq I$. Se tiene que si

$$\int f(u)\,du = F(u) + c,$$

para $x \in I$, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$$

para $x \in I$. Se dice que se tomó el cambio de variable $u = g(x)$.

Proposición 16. Sea $a \in \mathbb{R}^*$, se tiene que

- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(ax)\,dx = \frac{1}{a}\cos(ax) + c$, para $x \in \mathbb{R}$;

- $\displaystyle\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax) + c$, para $x \in \mathbb{R}$;
- $\displaystyle\int \exp(ax)\,dx = \frac{1}{a}\exp(ax) + c$, para $x \in \mathbb{R}$;

con $c \in \mathbb{R}$.

TEOREMA 17: Integración por partes

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon I \to \mathbb{R}$ funciones derivables. Se tiene que

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$

para $x \in I$.

En la literatura se suele encontrar el teorema anterior en la siguiente versión: Tomando

$$u = f(x), \qquad du = f'(x)\,dx$$

y

$$v = g(x), \qquad dv = g'(x)\,dx,$$

se tiene que

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

6. Sustitución trigonométrica

Para integrales que involucran términos de la forma

$$a^2 + x^2, \qquad a^2 - x^2 \qquad \text{o} \qquad x^2 - a^2,$$

con $a \in \mathbb{R}^*$, se suele tomar el cambio de variable

$$\theta = \arctan\left(\frac{x}{a}\right), \qquad \theta = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad \text{o} \qquad \theta = \operatorname{arc\,sec}\left(\frac{x}{a}\right),$$

respectivamente, de donde

$$x = a\tan(\theta) \qquad x = a\operatorname{sen}(\theta) \qquad \text{o} \qquad x = a\sec(\theta),$$

respectivamente y

$$a^2 + x^2 = a^2\sec^2(\theta), \qquad a^2 - x^2 = a^2\cos^2(\theta) \qquad \text{o} \qquad x^2 - a^2 = a^2\tan^2(\theta).$$

7. Integración de funciones racionales

Tenemos que,

- para $a \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a| + c,$$

para $x \neq -a$ y con $c \in \mathbb{R}$;

- para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, se tiene que

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c,$$

para $ax \neq -b$ y con $c \in \mathbb{R}$;

- para $b, c \in \mathbb{R}$, con $b^2 - 4c < 0$, se tiene que

$$\int \frac{x}{x^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+bx+c\right) - \frac{b}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right) + C$$

para $x \in \mathbb{R}$ con $C \in \mathbb{R}$;

- para $b, c \in \mathbb{R}$, con $b^2 - 4c < 0$, se tiene que

$$\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right) + C$$

para $x \in \mathbb{R}$ con $C \in \mathbb{R}$;

- para $b, c \in \mathbb{R}$ con $b^2 - 4c < 0$ y $A, B \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2}\ln\left(x^2+bx+c\right) + \frac{2B-Ab}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right) + C$$

para $x \in \mathbb{R}$ con $C \in \mathbb{R}$.

Con esto, y recordando que toda función racional puede ser escrita como combinación lineal de un polinomio y de las funciones antes enlistadas (a este método se lo llama fracciones parciales), se tiene la integral indefinida de cualquier función racional.

8. Integrales definidas

Proposición 18. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones derivables. Se tiene que

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx,$$

para $x \in I$.

Teorema 19: Cambio de variable

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función con primitiva y $g\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $\operatorname{img}(g) \subseteq I$. Se tiene que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

1. APLICACIONES

En esta sección consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y una partición P regular de grosor $\Delta x > 0$ y de orden n, con etiquetado C.

TEOREMA 1: Teorema del valor medio para funciones integrables

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Se tiene que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

PROPOSICIÓN 2. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas, se tiene que el área delimitada por la gráfica de las funciones f y g entre las rectas de ecuación $x = a$ y $x = b$ puede ser aproximada por

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} |f(c_k) - g(c_k)|\Delta x,$$

por lo tanto

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(c_k) - g(c_k)|\Delta x = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$

DEFINICIÓN 1

Sean $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ funciones tales que, si q representa la cantidad de un producto, entonces $f(q)$ representa el precio de la demanda y $g(q)$ representa el precio de la oferta. A f se la denomina *función de la demanda* y a la igualdad:

$$p = f(q)$$

se la llama *ecuación de la demanda*. De igual manera, a g se la denomina *función de la oferta* y a la igualdad:

$$p = g(q)$$

se la llama *ecuación de la oferta*. Además, se llama *punto de equilibro* al punto

(p_0, q_0) tal que

$$f(q_0) = g(q_0) = p_0.$$

DEFINICIÓN 2

Sean $f, g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ funciones de la oferta y la demanda, respectivamente, y (p_0, q_0) el punto de equilibrio. Se define el *excedente de los consumidores* por

$$\int_0^{q_0} (f(q) - p_0)\, dq$$

y el *excedente de los productores* por

$$\int_0^{q_0} (p_0 - g(q))\, dq.$$