Semestre 2020-2 Mat. Andrés Merino

1. NÚMEROS REALES

AXIOMA 1: Existencia de los números reales

Existe un conjunto distinto del vacío, representado por $\mathbb{R}$ y denominado **conjuntos de los números reales**, que tiene por lo menos dos elementos (distintos), representados por 0 y 1, y denominados, respectivamente, **cero** y **uno** Los elementos del conjunto $\mathbb{R}$ se denominan **números reales**.

2. PROPIEDADES DE CUERPO

AXIOMA 2: Existencia de las operaciones suma y multiplicación

Existen dos operaciones llamadas **suma** y **multiplicación**, respectivamente.

Si $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, escribiremos $a + b$ para la suma y $a \cdot b$ o, simplemente, ab para la multiplicación.

Estas operaciones satisfacen los siguientes axiomas:

1. **Clausurativo de la suma y el producto:** Para todo $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a + b \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad a \cdot b \in \mathbb{R}.$$

2. **Asociativo de la suma y el producto:** Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad \text{y} \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

3. **Conmutatividad de la suma y el producto:** Para todo $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a + b = b + a \qquad \text{y} \qquad a \cdot b = a \cdot b.$$

4. **Existencia de neutros de la suma y del producto:** Para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$a + 0 = a \qquad \text{y} \qquad a \cdot 1 = a.$$

Además, el 0 y el 1 son los únicos elementos que cumplen esta propiedad.

5. **Existencia del opuesto de la suma y del inverso del producto:** Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe un único real, denotado por $-a$, tal que

$$a + (-a) = 0.$$

Además, para todo $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe un único real, denotado por b^{-1}, tal que

$$b \cdot (b^{-1}) = 1.$$

6. **Distributiva de la suma y del producto:** Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

3. Ecuaciones

Proposición 1. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se tiene que

a) $a = b \implies a + c = b + c$

b) $a + c = b + c \implies a = b$

c) $a = b \implies a - c = b - c$

d) $a - c = b - c \implies a = b$

e) $a = b \implies a \cdot c = b \cdot c$

f) $a \cdot c = b \cdot c \implies a = b$, siempre que $c \neq 0$

g) $a = b \implies \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c}$, siempre que $c \neq 0$

h) $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c} \implies a = b$, siempre que $c \neq 0$

i) $a = b \implies -a = -b$

j) $a = b \implies a^{-1} = b^{-1}$, siempre que $a \neq 0$ y $b \neq 0$

k) $a = b \implies \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b}$, siempre que $a \neq 0$ y $b \neq 0$

l) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \implies a \cdot d = c \cdot b,$ siempre que $b \neq 0$ y $d \neq 0$

m) $a \cdot b = 0 \implies (a = 0 \quad \vee \quad b = 0)$

4. Sistemas de ecuaciones

Definición 1: Sistema de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de m ecuaciones lineales en las cuales figuran n incógnitas a las que notaremos por: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Así, dados $a_{ij} \in \mathbb{R}$ y $b_i \in \mathbb{R}$ con $i \in I$ y $j \in J$, fijos, un sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

5. Matrices

Definición 2: Matriz

Una matriz es un arreglo de números que se representa por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

donde a_{ij} son números reales. Con esto, se dice que A es de orden $m \times n$ y que tiene m filas y n columnas.

Al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ se denota por $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Dada una matriz A, esta se la representa también por $A = (a_{ij})$.

DEFINICIÓN 3: Filas y columnas

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. A la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

se la llama la j-ésima columna de A y a la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

se la llama la i-ésima fila de A.

PROPOSICIÓN 2 (Igualdad de matrices)**.** Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Se dice que las A y B son iguales, y se representa por $A = B$, si:

- $m = p$ y $n = q$; y
- $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i \in I$ y $j \in J$.

DEFINICIÓN 4: Vectores

El conjunto $\mathbb{R}^n$ es:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}},$$

es decir,

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i \in J\}.$$

Por notación, si $a \in \mathbb{R}^n$, se asumirá $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Podemos identificar cada elemento de $\mathbb{R}^n$ con una matriz de $\mathbb{R}^{n\times 1}$ de la siguiente manera: si

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n,$$

entonces, visto como matriz es

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}.$$

DEFINICIÓN 5: Suma de matrices

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. La suma de las matrices A y B es la matriz $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

para todo $i \in I$ y $j \in J$. A esta matriz se la denota por $A + B$.

Con esto, tenemos que $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.

DEFINICIÓN 6: Multiplicación por un escalar

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. El producto del escalar α por la matriz A es la matriz $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que:

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

para todo $i \in I$ y $j \in J$. A esta matriz se la denota por αA.

Con esto, tenemos que $\alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$.

6. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES ENTRE MATRICES

TEOREMA 3

Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Se tiene que

- $A + B = B + A$.
- $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- Existe una única matriz 0 de orden $m \times n$ tal que

  $$A + 0 = A$$

  para cualquier matriz A de orden $m \times n$. La matriz 0 se denomina neutro aditivo de orden $m \times n$, también llamada la matriz nula.
- Para cada matriz A de orden $m \times n$, existe una única matriz, denotada por $-A$, de orden $m \times n$ tal que:

  $$A + (-A) = 0.$$

  A la matriz $-A$ se la denomina el inverso aditivo A.

TEOREMA 4

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Se tiene que

- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$; y
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

7. MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

En esta sección consideramos $p, q \in \mathbb{N}$ con $p > 0$ y $q > 0$.

DEFINICIÓN 7: Multiplicación de matrices

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, el producto de las matrices A y B es la matriz $C \in \mathbb{R}^{m\times p}$ tal que

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{1p}b_{pj} \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \end{aligned}$$

para todo $i \in I$ y $j \in J$. A esta matriz se la denota por AB.

TEOREMA 5

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C, D \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $E \in \mathbb{R}^{p\times q}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se tiene que

- $A(DE) = (AD)E$;
- $A(C + D) = AC + AD$;
- $(A + B)C = AC + BC$;
- $A(\alpha C) = \alpha(AC) = (\alpha A)C$.

En general, $AB \neq BA$.

DEFINICIÓN 8: Matriz cuadrada

Si A es un elemento de $K^{n\times n}$, se dice que A es una matriz cuadrada de orden n.

DEFINICIÓN 9: Matriz identidad de orden n

Se define la matriz identidad de orden n al elemento A de $\mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

para todo $i, j \in I$. A esta matriz se la denota por I_n.

PROPOSICIÓN 6. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se tiene que

$$I_m A = A I_n = A.$$

8. TIPOS DE MATRICES

DEFINICIÓN 10: Matriz diagonal

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se dice que A es una matriz diagonal si verifica que:

$$a_{ij} = 0$$

para todo $i \in I$ y $j \in J$ con $i \neq j$.

DEFINICIÓN 11: Matriz triangular

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se dice que A es

- una matriz triangular superior si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$ con $i, j \in J$; y
- una matriz triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$ con $i, j \in J$.

Semestre 2020-2 Mat. Andrés Merino

1. DETERMINANTES

En esta sección tomaremos $n \in \mathbb{N}$, con $n > 0$, e $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

DEFINICIÓN 1: Menor

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $i, j \in I$. A la matriz de $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ que se obtiene eliminar la fila i y la columna j de A se la llama el menor ij de A, denotado por A_{ij}.

DEFINICIÓN 2: Determinantes

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se define el determinante de A, denotado por $\det(A)$ (o por $|A|$), de manera inductiva, como sigue:

- Si $n = 1$ y $A = (a_{11})$, entonces $\det(A) = a_{11}$.
- Si $n > 1$, entonces

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k}\det(A_{1k}) \\ &= a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(A_{1n}).\end{aligned}$$

Ejemplos:

- Sea A una matriz de orden 2×2 de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$A_{11} = (a_{22}) \qquad \text{y} \qquad A_{12} = (a_{21}),$$

por lo tanto

$$\det(A_{11}) = a_{11} \qquad \text{y} \qquad \det(A_{12}) = a_{12},$$

de esta forma,

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

es decir,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Sea A una matriz de orden 3×3 de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

el determinante de la matriz A está dado por:

$$\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

DEFINICIÓN 3: Cofactores

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $i, j \in I$. El cofactor ij de A, denotado C_{ij}, está dado por

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

donde A_{ij} es el menor ij de A.

TEOREMA 1

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se tiene que para todo $i \in I$,

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

y

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}C_{ki} = a_{1i}C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \ldots + a_{ni}C_{ni}.$$

El lado derecho de las igualdades toma el nombre de expansión por cofactores del determinante de A.

PROPOSICIÓN 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si una fila o columna de A contiene solo ceros, entonces $\det(A) = 0$.

TEOREMA 3

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz triangular superior o triangular inferior, entonces

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

es decir, el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principal.

2. Soluciones de sistemas de ecuaciones lineales

Definición 4: Matriz aumentada

Dado un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones lineales en las cuales figuran n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ y $b_i \in \mathbb{R}$ con $i \in I$ y $j \in J$. A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se la llama matriz de coeficientes del sistema y a

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

se las llama columnas de constantes y de incógnitas, respectivamente.

Bajo estas definiciones, dado un sistema de ecuaciones lineales, se dice que

$$Ax = b$$

es la representación matricial del sistema de ecuaciones.

DEFINICIÓN 5: Matriz ampliada

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$, se define la matriz ampliada de A y B al elemento de $\mathbb{R}^{m\times(m+p)}$ dado por:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{array}\right)$$

y se la denota por $(A|B)$.

DEFINICIÓN 6

Dado el sistema de ecuaciones lineales en forma matricial

$$Ax = b$$

con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, se dice que

$$(A|b)$$

es la matriz ampliada asociada al sistema.

PROPOSICIÓN 4. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$. El sistema $Ax = b$ tiene una solución única si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

3. MÉTODO DE GAUSS

DEFINICIÓN 7: Matriz escalonada reducida por filas

Se dice que una matriz está en forma escalonada reducida por filas cuando satisface las siguientes propiedades:

1. Todas las filas que constan de ceros, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.

2. La primera entrada distinta de cero de la fila, al leer de izquierda a derecha, es un 1. Esta entrada se denomina entrada principal o uno principal de su fila.

3. Para cada fila que no consta sólo de ceros, el uno principal aparece a la

derecha y abajo de cualquier uno principal en las filas que le preceden.

4. Si una columna contiene un uno principal, el resto de las entradas de dicha columna son iguales a cero.

Se dice que una matriz está en forma escalonada por filas si satisface las primeras tres propiedades .

DEFINICIÓN 8: Operaciones elementales de fila

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, una operación elemental por filas sobre A es una de las siguientes:

- **Intercambio de filas:** dados $i \in I$ y $j \in J$, intercambiar la fila i por la fila j, denotado por
$$F_i \leftrightarrow F_j,$$
es reemplazar la fila
$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$$
por la fila
$$\begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix}$$
y viceversa.

- **Multiplicar una fila por un escalar:** dados $i \in I$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, con $\alpha \neq 0$, multiplicar la fila i por α, denotado por
$$\alpha F_i \to F_i,$$
es reemplazar la fila
$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$$
por
$$\begin{pmatrix} \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{in} \end{pmatrix}.$$

- **Sumar un múltiplo de una fila con otra:** dados $i, j \in I$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, multiplicar la fila i por α y sumarlo a la fila j, denotado por
$$\alpha F_i + F_j \to F_j,$$
es reemplazar la fila
$$\begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix}$$

por

$$\begin{pmatrix} \alpha a_{i1} + a_{j1} & \alpha a_{i2} + a_{j2} & \ldots & \alpha a_{in} + a_{jn} \end{pmatrix}.$$

DEFINICIÓN 9: Equivalente por filas

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, se dice que la matriz A es equivalente por filas a una matriz B, denotado por $A \sim B$, si B se puede obtener al aplicar a la matriz A una sucesión de operaciones elementales por fila.

TEOREMA 5

Toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es equivalente por filas a una matriz escalonada reducida por filas.

TEOREMA 6

Toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es equivalente por filas a una única matriz en forma escalonada reducida por filas.

El proceso para obtener una matriz escalonada reducida por filas a partir de una matriz cualquiera se conoce como eliminación de Gauss-Jordan.

DEFINICIÓN 10

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ la única matriz escalonada reducida por filas equivalente a A. El rango de A, denotado por $\operatorname{rang}(A)$, es el número de filas no nulas que tiene la matriz B.

PROPOSICIÓN 7. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Se tiene que si $A \sim B$, entonces

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B).$$

PROPOSICIÓN 8. Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Se tiene que si A es una matriz escalonada, entonces $\operatorname{rang}(A)$ es el número de filas no nulas que tiene A.

3.1 Resolución de sistemas lineales

TEOREMA 9

Sean $A, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b, d \in \mathbb{R}^{m}$, se tiene que los sistemas de ecuaciones lineales

$$Ax = b \qquad \text{y} \qquad Cx = d$$

tienen las mismas soluciones si y solo si

$$(A|b) \sim (C|d),$$

es decir, si las matrices aumentadas de los sistemas son equivalentes por filas.

DEFINICIÓN 11

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, dado el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b,$$

se dice que

- el sistema es **inconsistente** si no tiene solución;
- el sistema es **consistente** si tiene solución.

TEOREMA 10

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, dado el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b,$$

se tiene una y solo una de las siguientes

- el sistema es inconsistente;
- el sistema es consistente y tiene una única solución; o
- el sistema es consistente y tiene infinitas soluciones.

TEOREMA 11: Teorema de Rouché–Frobenius

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, dado el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b,$$

se tiene que

- el sistema es consistente si y solo si $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b)$;
- en caso de que el sistema sea consistente, la solución es única si y solo si $\operatorname{rang}(A) = n$.

3.2 Sistemas homogéneos

Definición 12: Sistema homogéneo

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ al sistema

$$Ax = 0$$

se lo denomina sistema de ecuaciones lineales homogéneo.

Definición 13

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, dado el sistema homogéneo

$$Ax = 0,$$

entonces

- a $x = 0$ se la llama la solución trivial del sistema;
- a $x \neq 0$ tal que $Ax = 0$ se la llama una solución no trivial.

1. MATRICES

DEFINICIÓN 1: Matriz

Una matriz es un arreglo de números que se representa por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

donde a_{ij} son números reales. Con esto, se dice que A es de orden $m \times n$ y que tiene m filas y n columnas.

Al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ se denota por $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Dada una matriz A, esta se la representa también por $A = (a_{ij})$.

DEFINICIÓN 2: Filas y columnas

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. A la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

se la llama la j-ésima columna de A y a la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

se la llama la i-ésima fila de A.

PROPOSICIÓN 1 (Igualdad de matrices)**.** Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Se dice que las A y B son iguales, y se representa por $A = B$, si:

- $m = p$ y $n = q$; y
- $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i \in I$ y $j \in J$.

DEFINICIÓN 3: Suma de matrices

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. La suma de las matrices A y B es la matriz $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

para todo $i \in I$ y $j \in J$. A esta matriz se la denota por $A + B$.

Con esto, tenemos que $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.

DEFINICIÓN 4: Multiplicación por un escalar

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. El producto del escalar α por la matriz A es la matriz $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que:

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

para todo $i \in I$ y $j \in J$. A esta matriz se la denota por αA.

Con esto, tenemos que $\alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$.

2. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES ENTRE MATRICES

TEOREMA 2

Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Se tiene que

- $A + B = B + A$.
- $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- Existe una única matriz 0 de orden $m \times n$ tal que

  $$A + 0 = A$$

  para cualquier matriz A de orden $m \times n$. La matriz 0 se denomina neutro aditivo de orden $m \times n$, también llamada la matriz nula.
- Para cada matriz A de orden $m \times n$, existe una única matriz, denotada por $-A$, de orden $m \times n$ tal que:

  $$A + (-A) = 0.$$

  A la matriz $-A$ se la denomina el inverso aditivo A.

TEOREMA 3

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Se tiene que

- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$; y
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

3. MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

En esta sección consideramos $p, q \in \mathbb{N}$ con $p > 0$ y $q > 0$.

DEFINICIÓN 5: Multiplicación de matrices

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, el producto de las matrices A y B es la matriz $C \in \mathbb{R}^{m\times p}$ tal que

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{1p}b_{pj} \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \end{aligned}$$

para todo $i \in I$ y $j \in J$. A esta matriz se la denota por AB.

TEOREMA 4

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C, D \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $E \in \mathbb{R}^{p\times q}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se tiene que

- $A(DE) = (AD)E$;
- $A(C + D) = AC + AD$;
- $(A + B)C = AC + BC$;
- $A(\alpha C) = \alpha(AC) = (\alpha A)C$.

En general, $AB \neq BA$.

DEFINICIÓN 6: Matriz cuadrada

Si A es un elemento de $K^{n\times n}$, se dice que A es una matriz cuadrada de orden n.

Definición 7: Matriz identidad de orden n

Se define la matriz identidad de orden n al elemento A de $\mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

para todo $i, j \in I$. A esta matriz se la denota por I_n.

Proposición 5. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se tiene que

$$I_m A = A I_n = A.$$

4. Tipos de matrices

Definición 8: Matriz diagonal

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se dice que A es una matriz diagonal si verifica que:

$$a_{ij} = 0$$

para todo $i \in I$ y $j \in J$ con $i \neq j$.

Definición 9: Matriz triangular

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se dice que A es

- una matriz triangular superior si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$ con $i, j \in J$; y
- una matriz triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$ con $i, j \in J$.

5. Determinantes

En esta sección tomaremos $n \in \mathbb{N}$, con $n > 0$, e $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definición 10: Menor

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $i, j \in I$. A la matriz de $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ que se obtiene eliminar la fila i y la columna j de A se la llama el menor ij de A, denotado por A_{ij}.

DEFINICIÓN 11: Determinantes

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se define el determinante de A, denotado por $\det(A)$ (o por $|A|$), de manera inductiva, como sigue:

- Si $n = 1$ y $A = (a_{11})$, entonces $\det(A) = a_{11}$.
- Si $n > 1$, entonces

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k}\det(A_{1k}) \\ &= a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(A_{1n}).\end{aligned}$$

Ejemplos:

- Sea A una matriz de orden 2×2 de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$A_{11} = (a_{22}) \qquad \text{y} \qquad A_{12} = (a_{21}),$$

por lo tanto

$$\det(A_{11}) = a_{11} \qquad \text{y} \qquad \det(A_{12}) = a_{12},$$

de esta forma,

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

es decir,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Sea A una matriz de orden 3×3 de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

el determinante de la matriz A está dado por:

$$\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

DEFINICIÓN 12: Cofactores

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $i, j \in I$. El cofactor ij de A, denotado C_{ij}, está dado por

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

donde A_{ij} es el menor ij de A.

TEOREMA 6

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se tiene que para todo $i \in I$,

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

y

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}C_{ki} = a_{1i}C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \ldots + a_{ni}C_{ni}.$$

El lado derecho de las igualdades toma el nombre de expansión por cofactores del determinante de A.

PROPOSICIÓN 7. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si una fila o columna de A contiene solo ceros, entonces $\det(A) = 0$.

TEOREMA 8

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz triangular superior o triangular inferior, entonces

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

es decir, el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principal.

6. SOLUCIONES DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

DEFINICIÓN 13: Matriz aumentada

Dado un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones lineales en las cuales figuran n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \end{aligned}$$

$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ y $b_i \in \mathbb{R}$ con $i \in I$ y $j \in J$. A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se la llama matriz de coeficientes del sistema y a

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

se las llama columnas de constantes y de incógnitas, respectivamente.

Bajo estas definiciones, dado un sistema de ecuaciones lineales, se dice que

$$Ax = b$$

es la representación matricial del sistema de ecuaciones.

DEFINICIÓN 14: Matriz ampliada

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$, se define la matriz ampliada de A y B al elemento de $\mathbb{R}^{m\times(m+p)}$ dado por:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{array}\right)$$

y se la denota por $(A|B)$.

DEFINICIÓN 15

Dado el sistema de ecuaciones lineales en forma matricial

$$Ax = b$$

con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, se dice que

$$(A|b)$$

es la matriz ampliada asociada al sistema.

PROPOSICIÓN 9. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$. El sistema $Ax = b$ tiene una solución única si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

7. MÉTODO DE GAUSS

DEFINICIÓN 16: Matriz escalonada reducida por filas

Se dice que una matriz está en forma escalonada reducida por filas cuando satisface las siguientes propiedades:

1. Todas las filas que constan de ceros, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.

2. La primera entrada distinta de cero de la fila, al leer de izquierda a derecha, es un 1. Esta entrada se denomina entrada principal o uno principal de su fila.

3. Para cada fila que no consta sólo de ceros, el uno principal aparece a la derecha y abajo de cualquier uno principal en las filas que le preceden.

4. Si una columna contiene un uno principal, el resto de las entradas de dicha columna son iguales a cero.

Se dice que una matriz está en forma escalonada por filas si satisface las primeras tres propiedades .

DEFINICIÓN 17: Operaciones elementales de fila

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, una operación elemental por filas sobre A es una de las siguientes:

- **Intercambio de filas:** dados $i \in I$ y $j \in J$, intercambiar la fila i por la fila

j, denotado por

$$F_i \leftrightarrow F_j,$$

es reemplazar la fila

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix}$$

por la fila

$$\begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \end{pmatrix}$$

y viceversa.

- **Multiplicar una fila por un escalar:** dados $i \in I$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, con $\alpha \neq 0$, multiplicar la fila i por α, denotado por

$$\alpha F_i \to F_i,$$

es reemplazar la fila

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix}$$

por

$$\begin{pmatrix} \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \ldots & \alpha a_{in} \end{pmatrix}.$$

- **Sumar un múltiplo de una fila con otra:** dados $i, j \in I$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, multiplicar la fila i por α y sumarlo a la fila j, denotado por

$$\alpha F_i + F_j \to F_j,$$

es reemplazar la fila

$$\begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \end{pmatrix}$$

por

$$\begin{pmatrix} \alpha a_{i1} + a_{j1} & \alpha a_{i2} + a_{j2} & \ldots & \alpha a_{in} + a_{jn} \end{pmatrix}.$$

DEFINICIÓN 18: Equivalente por filas

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, se dice que la matriz A es equivalente por filas a una matriz B, denotado por $A \sim B$, si B se puede obtener al aplicar a la matriz A una sucesión de operaciones elementales por fila.

TEOREMA 10

Toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es equivalente por filas a una matriz escalonada reducida por filas.

TEOREMA 11

Toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es equivalente por filas a una única matriz en forma escalonada reducida por filas.

El proceso para obtener una matriz escalonada reducida por filas a partir de una matriz cualquiera se conoce como eliminación de Gauss-Jordan.

DEFINICIÓN 19

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ la única matriz escalonada reducida por filas equivalente a A. El rango de A, denotado por $\operatorname{rang}(A)$, es el número de filas no nulas que tiene la matriz B.

PROPOSICIÓN 12. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Se tiene que si $A \sim B$, entonces

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B).$$

PROPOSICIÓN 13. Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Se tiene que si A es una matriz escalonada, entonces $\operatorname{rang}(A)$ es el número de filas no nulas que tiene A.

7.1 Resolución de sistemas lineales

TEOREMA 14

Sean $A, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b, d \in \mathbb{R}^{m}$, se tiene que los sistemas de ecuaciones lineales

$$Ax = b \qquad \text{y} \qquad Cx = d$$

tienen las mismas soluciones si y solo si

$$(A|b) \sim (C|d),$$

es decir, si las matrices aumentadas de los sistemas son equivalentes por filas.

DEFINICIÓN 20

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^{m}$, dado el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b,$$

se dice que

- el sistema es **inconsistente** si no tiene solución;

- el sistema es **consistente** si tiene solución.

TEOREMA 15

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, dado el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b,$$

se tiene una y solo una de las siguientes

- el sistema es inconsistente;
- el sistema es consistente y tiene una única solución; o
- el sistema es consistente y tiene infinitas soluciones.

TEOREMA 16: Teorema de Rouché–Frobenius

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, dado el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b,$$

se tiene que

- el sistema es consistente si y solo si $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b)$;
- en caso de que el sistema sea consistente, la solución es única si y solo si $\operatorname{rang}(A) = n$.

1. Ecuaciones no lineales

Proposición 1. Sean $a, x \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq 0$, se tiene que

$$|x| = a \quad \Longrightarrow \quad x = a \quad \vee \quad x = -a.$$

Se suele representar

$$x = \pm a \qquad \text{por} \qquad x = a \quad \vee \quad x = -a$$

con esto:

$$|x| = a \quad \Longrightarrow \quad x = \pm a.$$

Proposición 2. Sea $a, x \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq 0$, se tiene que

$$x^2 = a \quad \Longrightarrow \quad |x| = \sqrt{a}.$$

Uniendo las dos anteriores, se tiene que

$$\begin{aligned} x^2 = a \quad &\Longleftrightarrow \quad |x| = \sqrt{a} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{a} \quad \vee \quad x = -\sqrt{a} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{a} \end{aligned}$$

Teorema 3: Solución de una ecuación de segundo grado

Sea $a, b, c, x \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Si $b^2 - 4ac \geq 0$, se tiene que

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2. De regreso al orden

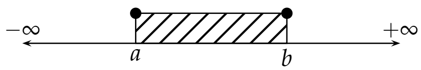
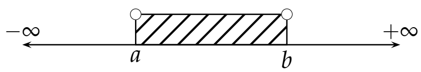
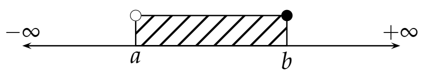
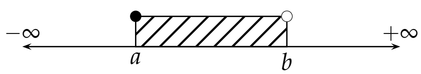
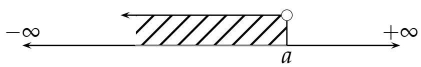
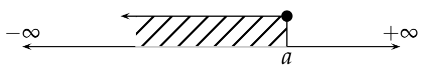
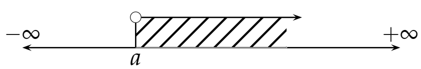
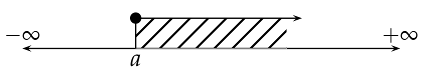
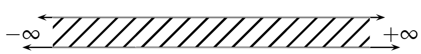
Definición 1: Intervalo

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$. El conjunto I se denomina *intervalo* si dados $x, y \in I$ tales que $x \leq y$, se tiene que

$$x < z < y \quad \Longrightarrow \quad z \in I.$$

Un intervalo es un subconjunto de los reales que "no tiene huecos".

2.1 Tipos de intervalos

Conjuntos	Notación	Representación en la recta real
$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	$]a, b[$	
$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	$]a, b]$	
$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	$[a, b[$	
$\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$	$]-\infty, a[$	
$\{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$	$]-\infty, a]$	
$\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$	$]a, +\infty[$	
$\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$	$[a, +\infty[$	
$\mathbb{R}$	$]-\infty, +\infty[$	

Si el corchete está hacia adentro (cerrado), el extremo correspondiente se incluye y sino, el extremo correspondiente se excluye (abierto).

3. Inecuaciones

PROPOSICIÓN 4. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se tiene que

a) $a \geq b \implies a + c \geq b + c$

b) $a + c \geq b + c \implies a \geq b$

c) $a \geq b \implies a - c \geq b - c$

d) $a - c \geq b - c \implies a \geq b$

e) $a \geq b \implies a \cdot c \geq b \cdot c,$ siempre que $c > 0$

f) $a \geq b \implies a \cdot c \leq b \cdot c,$ siempre que $c > 0$

g) $a \geq b \implies \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c},$ siempre que $c > 0$

h) $a \geq b \implies \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c},$ siempre que $c < 0$

i) $a \geq b \implies -a \leq -b$

j) $a \cdot b \geq 0 \implies ((a \geq 0 \quad \vee \quad b \geq 0) \quad \wedge \quad (a \leq 0 \quad \vee \quad b \leq 0))$

k) $a \cdot b \leq 0 \implies ((a \leq 0 \quad \vee \quad b \geq 0) \quad \wedge \quad (a \geq 0 \quad \vee \quad b \leq 0))$

TEOREMA 5

Sean $x, c \in \mathbb{R}$ tal que $c \geq 0$, se tiene que

1. $|x| \leq c \implies -c \leq x \leq c$
2. $|x| < c \implies -c < x < c$
3. $|x| \geq c \implies (x \leq -c \quad \vee \quad x \geq c)$
4. $|x| > c \implies (x < -c \quad \vee \quad x > c)$

1. FUNCIONES

DEFINICIÓN 1: Función

Dados A y B dos conjuntos, f es una **función de** A **en** B si:

- $f \subseteq A \times B$;
- para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$; y
- si $(x, y) \in f$ y $(x, z) \in f$, entonces $y = z$.

Si f es una función de A en B, escribirá $f \colon A \to B$. Y, en lugar de $(x, y) \in f$, escribiremos $f(x) = y$, ya que dado x, y es único.

En otras palabras, f es una función de A en B si es una relación entre los elementos de A y B de modo que para cada elemento x de A, hay un único elemento y de B que le corresponde a x en esta relación; a ese elemento y se le llama **imagen de** x **respecto de** f **y se le representa por** $f(x)$.

DEFINICIÓN 2: Dominio

Dada $f \colon A \to B$ el conjunto A se llama **dominio** de f y se le representa por $\operatorname{dom}(f)$.

DEFINICIÓN 3: Imagen o recorrido

Dada una función $f \colon A \to B$, la **imagen** o el **recorrido** de f es el conjunto

$$\{f(x) : x \in A\},$$

que se lo representa por

$$\operatorname{img}(f) \qquad \text{o} \qquad \operatorname{rec}(f).$$

DEFINICIÓN 4: Razón de cambio promedio

Sea $f \colon I \to \mathbb{R}$ una función, $a \in I$ y $h \in \mathbb{R}$ tal que $a + h \in I$, se define *la razón de cambio promedio de la función f entre a y $a + h$* por

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Este número también es conocido como *variación media* de f en el intervalo entre a y $a + h$.

1. MONOTONÍA

DEFINICIÓN 1: Función creciente, decreciente y monótona

Dada la función $f\colon A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ y el conjunto $I \subseteq A$, f es:

- **creciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u \leq v$, se tiene que $f(u) \leq f(v)$;
- **estrictamente creciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u < v$, se tiene que $f(u) < f(v)$;
- **decreciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u \leq v$, se tiene que $f(u) \geq f(v)$;
- **estrictamente decreciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u < v$, se tiene que $f(u) > f(v)$; y
- **monótona en** I si es creciente o decreciente en I.

2. FUNCIONES INYECTIVAS, SOBREYECTIVAS Y BIYECTIVAS

DEFINICIÓN 2: Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

Una función $f\colon A \to B$ es:

- **inyectiva** si para todo $u, v \in A$ tales que $f(u) = f(v)$, se tiene que $u = v$;
- **sobreyectiva** si para todo $v \in B$, existe $u \in A$ tal que $f(u) = v$;
- **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

PROPOSICIÓN 1 (Sobreyectiva)**.** Una función $f\colon A \to B$ es sobreyectiva si y solo si $\operatorname{img}(f) = B$.

3. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES Y FUNCIÓN INVERSA

DEFINICIÓN 3: Composición de funciones

Dadas las funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$, la función

$$\begin{aligned} g \circ f\colon A &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

se denomina **composición de** g **y** f.

DEFINICIÓN 4: Función invertible y función inversa

Una función $f\colon A \to B$ es **invertible** si existe una única función $g\colon B \to A$ tal que para todo $u \in A$ y $v \in B$, se tiene que

$$g(f(u)) = u \qquad \text{y} \qquad f(g(v)) = v$$

A esta función se la llama **función inversa de** f y se la denota por f^{-1}.

PROPOSICIÓN 2. Dada una función $f\colon A \to B$ invertible, se tiene que

$$f\left(f^{-1}(v)\right) = v \qquad \text{y} \qquad f^{-1}\left(f(u)\right) = u$$

para todo $u \in A$ y todo $v \in B$.

PROPOSICIÓN 3 (Inversa)**.** Una función $f\colon A \to B$ es invertible si y solo si f es biyectiva.

4. OPERACIONES ALGEBRAICAS ENTRE FUNCIONES

DEFINICIÓN 5

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y las funciones $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon B \to \mathbb{R}$. Entonces las operaciones suma, resta, multiplicación y división entre f y g se definen como

- $$\begin{aligned} f+g\colon A\cap B &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)+g(x), \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} f-g\colon A\cap B &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)-g(x), \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} f\cdot g\colon A\cap B &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)g(x) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \frac{f}{g}\colon D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$ donde $D = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \cap B \quad \wedge \quad g(x) \neq 0\}$.

5. Funciones algebraicas

Definición 6: Función lineal

Dado $a \in \mathbb{R}$, la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax \end{aligned}$$

se llama **lineal**.

Definición 7: Función afín

Dados $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax + b \end{aligned}$$

se llama **afín**.

Definición 8: Función cuadrática

Dados $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$, la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

se llama **cuadrática**.

Definición 9: Función polinómica

Dados $n \in \mathbb{N}^*$ y $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ con $a_n \neq 0$, la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

se llama **polinómica**.

DEFINICIÓN 10: Función racional

Dadas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funciones polinómicas, se define $D = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$. La función

$$\begin{aligned} r\colon D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

se llama **racional**.

DEFINICIÓN 11: Función radical

Dado $n \in \mathbb{N}^*$, la función

$$\begin{aligned} \rho\colon [0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt[n]{x}, \end{aligned}$$

donde

$$\left(\sqrt[n]{u}\right)^n = u$$

para todo $u \geq 0$, se llama **radical**.

DEFINICIÓN 12: Función algebraica

Una función es **algebraica** si es la composición de restricciones de funciones lineales, afines, polinómicas, racionales o radicales.

Semestre 2020-2 Mat. Andrés Merino

1. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

DEFINICIÓN 1

Dado $a > 0$ y $a \neq 1$, existe una única función

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene:

a) $\exp_a(1) = a$.

b) $\exp_a(0) = 1$.

c) $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \exp_a(y)$.

d) $\exp_{\exp_a(x)}(y) = \exp_a(x \cdot y)$.

Por notación, para $a > 0$ con $a \neq 1$ y $x \in \mathbb{R}$

$$a^x = \exp_a(x)$$

Con esto, al número a se le denomina base de la función exponencial.

PROPOSICIÓN 1. Dado $a > 0$ y $a \neq 1$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene:

a) $a^1 = a$.

b) $a^0 = 1$.

c) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

d) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.

e) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.

DEFINICIÓN 2

El *número de euler* $e \in \mathbb{R}$ es un número irracional

$$e \approx 2{,}718281$$

DEFINICIÓN 3

Dado $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, la función logaritmo en base a, es la función

$$\log_a = \exp_a^{-1}.$$

PROPOSICIÓN 2. Dado $a > 0$ y $a \neq 1$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

a) $\log_a(\exp_a(x)) = x$

b) $\exp_a(\log_a(x)) = x$

c) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

d) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

e) $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$

DEFINICIÓN 4

El logaritmo natural es

$$\ln = \log_e.$$

También, el logaritmo decimal es

$$\log = \log_{10}.$$

2. ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

PROPOSICIÓN 3. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ y $a \neq 1$. Se tiene que

a) $x = y \implies \exp_a(x) = \exp_a(y)$

b) $x = y \implies a^x = a^y$

c) $\exp_a(x) = \exp_a(y) \implies x = y$

d) $a^x = a^y \implies x = y$

PROPOSICIÓN 4. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ y $a \neq 1$. Se tiene que

a) $x = y \implies \log_a(x) = \log_a(y)$

b) $\log_a(x) = y \implies x = \exp_a(y)$

c) $\log_a(x) = y \implies x = a^y$

d) $x = \exp_a(y) \implies \log_a(x) = y$

e) $x = a^y \implies \log_a(x) = y$

f) $\log_a(x) = \log_a(y) \implies x = y, \qquad$ siempre que $x > 0$ y $y > 0$

PROPOSICIÓN 5. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a, c > 0$ y $a, c \neq 1$. Se tiene que

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

1. MODELOS

DEFINICIÓN 1

Si t representa la cantidad de años y $M(t)$ representa el monto recibido por una inversión en función de la cantidad de años, entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} M\colon\ [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto M_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \end{aligned}$$

donde

- M_0 es el monto inicial
- r es el interés anual
- n número de capitalizaciones en un año

1. Límites

En este curso se considera a $L \in \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ como un intervalo, $a \in I$ y $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $I \subseteq A \cup \{a\}$.

Definición 1: Notación de límite

Sean

1. a y L dos números reales;
2. I un intervalo abierto que contiene al número a; y
3. $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función tal que $I \subset A \cup \{a\}$.

La notación

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se lee *L es el límite de f cuando x tiende a a.*

La idea intuitiva de límite es la siguiente: sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función, se dice que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A que se acerquen a a se tiene que la imagen de esos elementos se acercan a L.

Teorema 1: Unicidad del límite

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Se tiene que si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces el número L es el *único* número que satisface esta igualdad.

La existencia del límite de una función en un punto no requiere que ese punto esté en el dominio de la función. El siguiente teorema enfatiza este hecho.

Teorema 2: Límite de funciones localmente iguales

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ función tal que $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Si $g\colon A \smallsetminus \{a\} \to \mathbb{R}$ es tal que

$$g(x) = f(x)$$

para todo $x \in I \setminus \{a\}$, entonces existe el límite de g en a y

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

TEOREMA 3: Límites básicos

Se tiene que

$$\lim_{x \to a} x = a$$

y si $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{x \to a} c = c.$$

TEOREMA 4: Propiedades algebraicas de los límites

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ funciones. Si existen $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, entonces:

1. existe el límite de $f + g$ y
$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x);$$
2. existe el límite de $f \cdot g$ y
$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x);$$
3. si $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$, existe el límite de $\dfrac{1}{g}$ y
$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}.$$

TEOREMA 5: Propiedades algebraicas de los límites II

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ funciones y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si existen $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, entonces:

1. existe el límite de αf y
$$\lim_{x \to a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \to a} f(x);$$
2. existe el límite de $f - g$ y
$$\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x);$$

3. existe el límite de $\alpha f + \beta g$ y
$$\lim_{x\to a}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x);$$
4. existe el límite de $\dfrac{f}{g}$ siempre que $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ y
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

TEOREMA 6: Límite de funciones polinomiales y racionales

Sean $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones polinomiales. Se tiene que:

1. $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$ y
2. $\lim_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$, siempre que $Q(a) \neq 0$.

TEOREMA 7: Límite de una función radical

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y $n \in \mathbb{N}^*$. Si existen
$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$
y $L > 0$, entonces $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)}$ existe y se tiene que
$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}.$$

2. LÍMITES LATERALES

DEFINICIÓN 2: Notación de límite laterales

Dados

1. a y L dos números reales;
2. I un intervalo abierto que contiene al número a; y
3. $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subset A \cup \{a\}$.

La notación
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$
se lee L *es el límite de* f *cuando* x *tiende a* a *por la derecha*. La notación
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$
se lee L *es el límite de* f *cuando* x *tiende a* a *por la izquierda*.

La idea intuitiva de límite lateral es la siguiente: si $f\colon A \to \mathbb{R}$, se dice que
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$
si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A, mayores que a, que se acerquen a a, se tiene que la sucesión de las imágenes de esos elementos se acercan a L. Por otro lado, se dice que
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$
si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A, menores que a, que se acerquen a a, se tiene que la sucesión de las imágenes de esos elementos se acercan a L.

TEOREMA 8: Límite de funciones localmente iguales

Dada una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

- Si $g\colon A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ es tal que
$$g(x) = f(x)$$
para todo $x \in I \setminus \{a\}$ con $x > a$, entonces existe el límite de g en a por la derecha y
$$\lim_{x\to a^+} g(x) = L.$$
- Si $g\colon A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ es tal que
$$g(x) = f(x)$$
para todo $x \in I \setminus \{a\}$ con $x < a$, entonces existe el límite de g en a por la izquierda y
$$\lim_{x\to a^-} g(x) = L.$$

PROPOSICIÓN 9. Los límites laterales cumplen las mismas propiedades algebraicas que los límites.

TEOREMA 10

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función, se tiene que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe y es igual a L si y solo si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ existen y son iguales a L.

3. CONTINUIDAD

DEFINICIÓN 3: Continuidad

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función tal que $a \in A$, se dice que f es continua en a si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Se dice que f es continua en A si f es continua en cada punto de A.

La proposición: "f es continua en su dominio" se puede abreviar por "f es continua".

TEOREMA 11: Propiedades algebraicas de la continuidad

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ funciones y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si existen f y g son continuas en a, entonces

1. la función $\alpha f + \beta g$ es continua en a;
2. la función $f \cdot g$ es continua en a; y
3. si $g(a) \neq 0$, la función $\dfrac{f}{g}$ es continua en a.

1. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

PROPOSICIÓN 1. Las funciones trigonométricas son continuas en su dominio.

PROPOSICIÓN 2. Se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

2. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

PROPOSICIÓN 3. Las funciones exponenciales y logarítmicas son continuas en su dominio.

PROPOSICIÓN 4. Se tiene que

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

3. LÍMITES AL INFINITO

DEFINICIÓN 1: Notación de límite al infinito

Dados

1. L un número real;
2. I un intervalo no acotado superiormente ; y
3. $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subset A$.

La notación

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$$

se lee L *es el límite de f cuando x tiende a más infinito*. Por otro lado, si I es un intervalo no acotado inferiormente, la notación

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

se lee L *es el límite de f cuando x tiende a menos infinito*.

La idea intuitiva de límite al infinito es la siguiente: sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A que crezcan indefinidamente sin estar acotados, se tiene que la imagen de esos elementos se acercan a L. Por otro lado, sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A que decrezcan indefinidamente sin estar acotados, se tiene que la imagen de esos elementos se acercan a L.

PROPOSICIÓN 5. Los límites al infinito cumplen las mismas propiedades algebraicas que los límites.

PROPOSICIÓN 6. Se tiene que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

4. LÍMITES INFINITOS

DEFINICIÓN 2: Notación de límite infinito

Dados

1. a un número real;
2. I un intervalo abierto que contiene al número a; y
3. $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subset A \cup \{a\}$.

La notación
$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$
se lee *el límite de f cuando x tiende a a es más infinito*. La notación
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$
se lee *el límite de f cuando x tiende a a es menos infinito*.

La idea intuitiva de límite infinito es la siguiente: sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, se dice que
$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$
si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A que se acerquen a a, se tiene que la imagen de esos elementos crecen indefinidamente sin estar acotada. Por otro lado, sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, se dice que
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$
si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A que se acerquen a a, se tiene que la imagen de esos elementos decrecen indefinidamente sin estar acotada.

Que el límite de una función sea más infinito o menos infinito es una forma de no existencia del límite de la función.

Proposición 7. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que
$$\lim_{x\to a} f(x) = 0,$$
se tiene que si

1. $f(x) > 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
2. $f(x) < 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Proposición 8 (Propiedades de límites infinitos)**.** Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ dos funciones. Se tiene que

1. si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces
$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty;$$
2. si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \mp\infty$, entonces
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty;$$
3. si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, entonces
$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0;$$
4. si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\beta > 0$, entonces: $\lim\limits_{x\to a} \beta f(x) = \pm\infty$;
5. si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\beta < 0$, entonces: $\lim\limits_{x\to a} \beta f(x) = \mp\infty$;
6. si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ o g está acotada inferiormente en un intervalo alrededor de a, entonces
$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \pm\infty;$$
7. si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y existe $\lim\limits_{x\to a} g(x) > 0$ o g está acotada inferiormente por un número positivo en un intervalo alrededor de a, entonces:
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \pm\infty;$$
8. si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y existe $\lim\limits_{x\to a} g(x) < 0$ o g está acotada superiormente por un número negativo en un intervalo alrededor de a, entonces:
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \mp\infty.$$

PROPOSICIÓN 9. Se tiene que
$$\lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty.$$

Semestre 2020-2 Mat. Andrés Merino

1. CONCEPTO DE DERIVADA

En esta sección, tomaremos $I \subseteq \mathbb{R}$ como un intervalo.

DEFINICIÓN 1: Razón de cambio promedio

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función, $a \in I$ y $h \in \mathbb{R}$ tal que $a + h \in I$, se define *la razón de cambio promedio de la función f entre a y $a + h$* por

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Este número también es conocido como *variación media* de f en el intervalo entre a y $a + h$.

También podemos definir la razón de cambio promedio de la función f entre a y b por

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Una notación para la razón de cambio es la siguiente. Denotamos con Δx el cambio entre a y $a + h$, es decir

$$\Delta x = h,$$

además, si nombramos por y al número $f(x)$, denotamos con Δy el cambio de f entre a y $a + h$, es decir,

$$\Delta y = f(a+h) - f(a).$$

Con esto, la razón de cambio promedio de la función f entre a y $a + h$ es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

DEFINICIÓN 2: Derivada de una función en un punto

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $a \in I$. *La derivada de la función f en a*, denotada por $f'(a)$, es el número

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

siempre que este límite exista. En este caso, se dice que f es *derivable en a*.

También se dice que el número $f'(a)$ es la *razón de cambio instantánea de f en a*.

DEFINICIÓN 3: Función derivada

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función, se define

$$A = \{x \in I : f \text{ es derivable en } x\}.$$

La función

$$\begin{aligned} Df\colon A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

se denomina *derivada de f*. Se dice que f es *derivable en A* y su derivada es la función Df.

Otras notaciones para la derivada que se encuentran en la literatura son

$$Df(a) = f'(a) = \frac{df}{dx}(a),$$

y a la función Df también se la llama f'. Además, se tiene la siguiente notación:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(f(x)) = (f(x))' = \frac{d}{dx}f(x).$$

Y si para cada x en el dominio de f, nombramos y al número $f(x)$, se escribe

$$\frac{dy}{dx}$$

en lugar de $f'(x)$.

PROPOSICIÓN 1. Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $a \in I$. Se tiene que f es derivable en a si y solo si existe

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

además,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

TEOREMA 2

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función. Se tiene que si f es derivable en $a \in I$, entonces f es continua en a.

1. PROPIEDADES DE LA DERIVADA

PROPOSICIÓN 1. Se tiene que, para $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq -1$,

$$\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}.$$

PROPOSICIÓN 2. Se tiene que

$$\frac{d}{dx}(\exp(x)) = (\exp(x))' = \exp(x)$$

es decir,

$$\frac{d}{dx}(e^x) = (e^x)' = e^x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = (\ln(x))' = \frac{1}{x},$$

para todo $x > 0$.

PROPOSICIÓN 3. Se tiene que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(x)) = (\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$$

y

$$\frac{d}{dx}(\cos(x)) = (\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 4 (Propiedades algebraicas I)**.** Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ dos funciones reales derivables en $a \in I$. Se tiene que:

1. $f + g$ es derivable en a y

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a);$$

2. fg es derivable en a y

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a);$$

3. si $g(a) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ es derivable en a y

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Proposición 5 (Propiedades algebraicas II)**.** Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ dos funciones reales derivables en $a \in I$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se tiene que:

1. λf es derivable en a y
$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a).$$

2. $(f - g)$ es derivable en a y

$$(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a).$$

3. si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es derivable en a y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

2. Regla de la cadena

En esta sección, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ representarán intervalos abiertos.

Teorema 6: Regla de la cadena

Sean $f\colon J \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ funciones, con $\operatorname{img}(g) \subseteq J$. Si

1. g es derivable en $a \in I$; y

2. f es derivable en $g(a) \in J$,

entonces $f \circ g$ es derivable en a. Además:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

1. DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR

DEFINICIÓN 1: Segunda derivada

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I, si la función Df es derivable en $a \in I$, entonces se dice que f es **dos veces derivable en** a y la derivada de Df en a se la denota por $f''(a)$ y se le denomina **la segunda derivada de** f **en** a.

DEFINICIÓN 2: Función segunda derivada

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función, se define

$$A = \{x \in I : f \text{ es dos veces derivable en } x\}.$$

La función

$$\begin{aligned} D^2f\colon\ A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f''(x) \end{aligned}$$

se denomina *segunda derivada de* f. Se dice que f es *dos veces derivable en* A y su **segunda derivada** es la función D^2f.

Otras notaciones para la derivada que se encuentran en la literatura son

$$D^2f(a) = f''(a) = f^{(2)}(a) = \frac{d^2f}{dx^2}(a),$$

y a la función D^2f también se la llama f'' o $f^{(2)}$. Además, se tiene la siguiente notación:

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x)) = (f(x))'' = \frac{d^2}{dx^2}f(x).$$

Y si para cada x en el dominio de f, nombramos y al número $f(x)$, se escribe

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

en lugar de $f''(x)$.

2. Interpretación geométrica de la derivada

Definición 3: Recta tangente

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable en $c \in I$. La recta de ecuación

$$y = f(c) + f'(c)(x - c),$$

cuya pendiente es el número $f'(c)$, se llama **recta tangente a la gráfica de f en el punto** $(c, f(c))$.

3. Razón de cambio relacionadas

Ejercicio 1. Un radar que está a 12 kilómetros de una base militar detecta que un avión sobrevuela la base a 9 000 metros de altura y que se dirige hacia el radar, manteniendo su altitud y velocidad. Si la rapidez con que decrece la distancia entre el avión y el radar es de 500 kilómetros por hora, ¿a qué velocidad vuela el avión?

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- t: el tiempo en horas.
- $x(t)$: distancia horizontal (en kilómetros) entre el radar y el avión en el momento t horas.
- $z(t)$: distancia total (en kilómetros) entre entre el radar y el avión en el momento t horas.

Con esto, se tiene que

$$x(0) = 12, \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dt}(0) = 500.$$

Puesto que el avión conserva una altitud constante de 9 kilómetros por hora, se tiene la siguiente relación:

$$z(t) = \sqrt{(x(t))^2 + 9^2},$$

de donde, derivando con respecto a t, obtenemos

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{x(t)}{\sqrt{(x(t))^2 + 81}} \cdot \frac{dx}{dt}(t);$$

por tanto,

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{\sqrt{(x(t))^2 + 81}}{x(t)} \cdot \frac{dz}{dt}(t).$$

Evaluando en $t = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}(0) &= \frac{\sqrt{(x(0))^2 + 81}}{x(0)} \cdot \frac{dz}{dt}(0) \\
&= \frac{\sqrt{12^2 + 81}}{12} \cdot 500 \\
&= 625.
\end{aligned}$$

Así, la velocidad del avión es de 625 kilómetros por hora cuando sobrevuela la base. □

4. Magnitudes económicas

Definición 4: Magnitud marginal

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que represente una magnitud económica, entonces, se define el valor marginal de esta magnitud por f'.

⚠ Si, por ejemplo, $C\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es una función tal que si q representa la cantidad de un producto, $C(q)$ representa el costo de producirlo, entonces C' es el costo marginal y se tiene que, para valores grandes de q, el costo de producir una unidad más es aproximadamente su costo marginal: $C'(q)$.

Definición 5: Elasticidad de la demanda

Sea $p\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función tal que si q representa la cantidad de un producto, $p(q)$ representa el precio del producto en función de esa cantidad. Se define la elasticidad puntual de la demanda en la cantidad q por

$$\eta(q) = \frac{\frac{p(q)}{p}}{p'(q)}.$$

⚠ Si a representa el porcentaje de cambio en la demanda y b representa el porcentaje de cambio en el precio cuando se están ofertando q unidades, entonces se tiene que

$$\eta(p) \approx \frac{a}{b}.$$

- Cuando $|\eta| > 1$, se dice que la demanda es elástica.
- Cuando $|\eta| = 1$, se dice que la demanda tiene elásticidad unitaria.
- Cuando $|\eta| < 1$, se dice que la demanda es inelástica.

1. Derivada de la función implícita

DEFINICIÓN 1

Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{img}(f) \subseteq J$ y $F\colon I \times J \to \mathbb{R}$ funciones tal que para todo $x \in I$ se tiene que

$$F(x, f(x)) = 0,$$

se dice que *la ecuación*

$$F(x, y) = 0,$$

donde $y = f(x)$ y $x \in I$, define la función f implícitamente. Se dice también que la ecuación *define implícitamente y como función de x*.

La ecuación

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

define implícitamente y como una o más funciones de x. Nombremos a una de estas funciones con f, tenemos que

$$x^2 + (f(x))^2 - 4 = 0.$$

TEOREMA 1: Derivada de la función implícita

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{img}(f) \subseteq J$ y $F\colon I \times J \to \mathbb{R}$ funciones. Supongamos que f está definida de manera implícita con respecto a F y definamos

$$\begin{aligned} g\colon\ I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x, f(x)). \end{aligned}$$

Se tiene que si g es derivable en $x \in I$, entonces

$$g'(x) = 0.$$

La ecuación

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

define implícitamente y como una o más funciones de x. Nombremos a una de estas funciones con f, tenemos que

$$x^2 + (f(x))^2 - 4 = 0.$$

Por otra parte, asumiendo que f es derivable en x, por la regla de la cadena, tenemos que

$$\left(x^2 + f^2(x) - 4\right)' = 0,$$

es decir, se tiene que

$$2x + 2f(x) \cdot f'(x) = 0.$$

Así, se verifica que

$$f'(x) = \frac{-x}{f(x)}.$$

Es decir, hemos hallado la derivada de f sin conocer explícitamente f, basta con saber que existe y es derivable.

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA

MATEMÁTICA APLICADA • RESUMEN NO. 12

Semestre 2020-2 Mat. Andrés Merino

1. EXTREMOS

En esta sección, asumiremos que $I = [a, b]$, con $a < b$.

DEFINICIÓN 1: Extremos globales

Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Decimos que

- f alcanza un máximo global en c y que su máximo (global) es $f(c)$ si
$$f(x) \leq f(c)$$
para todo $x \in I$;
- f alcanza un mínimo global en c y que su mínimo (global) es $f(c)$ si
$$f(x) \geq f(c)$$
para todo $x \in I$.

DEFINICIÓN 2: Extremos locales

Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Decimos que

- f alcanza un máximo local en c, y su máximo local es $f(c)$, si existe $r > 0$ tal que
$$f(x) \leq f(c)$$
para todo $x \in [c - r, c + r] \cap I$;
- f alcanza un mínimo local en c, y su mínimo local es $f(c)$, si existe $r > 0$ tal que
$$f(x) \geq f(c)$$
para todo $x \in [c - r, c + r] \cap I$.

DEFINICIÓN 3: Puntos críticos

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Decimos que c es un punto crítico de f si

- f no es derivable en c, o

- f es derivable en c y $f'(c) = 0$.

TEOREMA 1

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua y $c \in \operatorname{int}(I)$. Si f alcanza un extremo local en c, entonces c es un punto crítico de f.

PROPOSICIÓN 2. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I, se tiene que f alcanza sus extremos globales en puntos críticos del interior de I o en los extremos de I.

2. MONOTONÍA

En esta sección, asumiremos que $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y $A \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $I \subseteq A$.

TEOREMA 3: Monotonía

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en $\operatorname{int}(I)$. Se tiene que

- si $f'(x) > 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces f es estrictamente creciente en I;
- si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces f es creciente en I;
- si $f'(x) < 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces f es estrictamente decreciente en I; y
- si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces f es decreciente en I.

PROPOSICIÓN 4. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y $c \in \operatorname{int}(I)$. Se tiene que

- si existe $r > 0$ tal que f es creciente en $]c-r, c[$ y decreciente en $]c, c+r[$, entonces f alcanza un máximo local en c;
- si existe $r > 0$ tal que f es decreciente en $]c-r, c[$ y creciente en $]c, c+r[$, entonces f alcanza un mínimo local en c.

TEOREMA 5: Criterio de la primera derivada para extremos

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y $c \in \operatorname{int}(I)$ un punto crítico de f. Suponga que existe $R > 0$ tal que f es derivable en $(]c-R, c+R[\setminus \{c\}) \cap I$.

Se tiene que

- si existe $r > 0$ tal que $f'(x) \geq 0$ para $x \in \,]c-r, c[$ y $f'(x) \leq 0$ para $x \in \,]c, c+r[$, entonces f alcanza un máximo local en c;
- si existe $r > 0$ tal que $f'(x) \leq 0$ para $x \in \,]c-r, c[$ y $f'(x) \geq 0$ para $x \in \,]c, c+r[$, entonces f alcanza un mínimo local en c.

Este teorema se lo puede parafrasear como sigue:

- si cerca del punto c, f' cambia de negativa a positiva en c, recorriendo de izquierda a derecha, entonces f alcanza un mínimo local en c;
- si cerca del punto c, f' cambia de positiva a negativa en c, recorriendo de izquierda a derecha, entonces f alcanza un máximo local en c.

3. Optimización

Resolver un problema de optimización significará determinar los valores extremos de una función y los puntos donde los alcanza.

Si la función representa una determinada situación, el proceso de obtención de esa función a partir de la situación se conoce con el nombre de *modelización* o *modelamiento*. En este proceso, es importante enfatizar en la definición de la función (dominio, recorrido y regla de asignación).

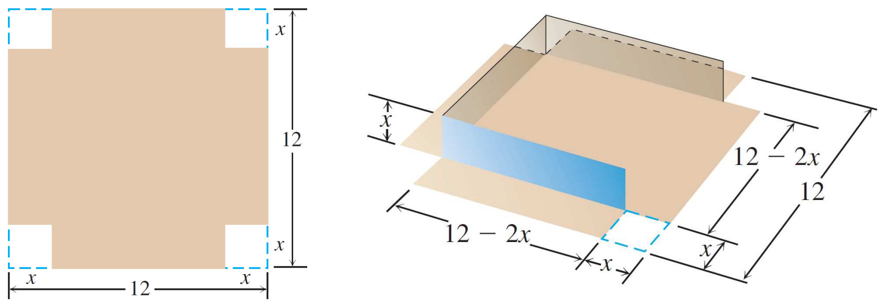
Ejercicio 1. Una caja sin tapa se construye cortando pequeños cuadrados congruentes de las esquinas de una cartulina de 12 cm por 12 cm y doblando los lados hacia arriba. ¿De qué tamaño se deben cortar los cuadros de las esquinas para que la caja tenga la máxima capacidad o volumen posible?

`https://www.geogebra.org/m/sWvJYnkd`
`https://www.geogebra.org/m/auf6msvx`

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- x: longitud del lado del cuadrado recortado, en centímetros.
- $V(x)$: volumen de la caja formada al recortar un cuadrado de longitud x centímetros, en centímetros cúbicos.

Con esto, considere los siguientes gráficos:



Dado que el cuadrado se recorta de una cartulina de 12 cm por 12 cm, x únicamente puede tomar los valores entre 0 y 6. Con esto, se tiene que la función que modela el volumen de la caja es

$$\begin{aligned} V\colon\ [0,6] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x(12-2x)(12-2x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x. \end{aligned}$$

Por tanto, para encontrar el volumen máximo, debemos determinar el máximo de esta función. Para ello, procedamos a derivar la función V; se tiene que

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144$$

para $x \in \,]0,6[$. Ahora, para encontrar sus puntos críticos, notemos que

$$\begin{aligned} V'(x) = 0 \quad &\equiv \quad 12x^2 - 96x + 144 = 0 \\ &\equiv \quad (x = 2 \vee x = 6). \end{aligned}$$

Así, los puntos críticos son 2 y 6. Como la función está definida en un intervalo cerrado y acotado, la función alcanza su máximo en los extremos del intervalo o en los puntos críticos del interior, es decir, en los puntos 0, 2 y 6. Dado que tenemos

$$V(0) = 0, \qquad V(2) = 128 \qquad \text{y} \qquad V(6) = 0,$$

la función V alcanza el máximo valor de 128 en 2. y

En resumen, se tiene que hay que recortar un cuadrado cuyo lado mida 2 centímetros para lograr que la caja tenga el volumen máximo: 128 centímetros cúbicos. □

> ⚠ En la jerga matemática se suele decir que “hay que maximizar” o “hay que minimizar” una función. En sentido estricto, esas frases no tienen sentido; no obstante, lo que quieren decir es que “hay que encontrar el valor máximo que toma la función y el o los puntos en los que se alcanza este máximo”

(lo mismo para el mínimo).