Procesos Estocásticos.

Calificación:

1 Deber por bimestre

- Deberes 20%
- Pruebas 80%

› Lunes y Jueves : teoría
› Martes : Ejercicios
› Miércoles: Prueba

Estudiar: Poisson, Normal, Geométrica, Binomial, Gamma
Función Generadora de momentos, función característica

Repaso

Ley de probabilidad total

Sea $A_1, A_2, \dots, A_n$ una partición de Ω y sea B un evento.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i) \qquad [PT]$$

Ley de Bayes

Para $k = 1, 2, \dots, n$ tenemos

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)} \qquad [LB]$$

Ejemplo:

X : (número de) caras al lanzar ~~sacar~~ dos monedas $\quad X = \{0, 1, 2\}$

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \qquad X \sim \text{Binomial}$$

Si Y es una v.a. indicadora de que la segunda moneda sea cara

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad Y \sim \text{Bernoulli}$$

Las variables aleatorias son dependientes

$P(X=0 | Y=0) = 1/2 \qquad P(X=0 | Y=1) = 0$

$P(X=1 | Y=0) = 1/2 \qquad P(X=1 | Y=1) = 1$

› $P(X=0|Y=0) = \dfrac{P(X=0, Y=0)}{P(Y=0)} = \dfrac{1/4}{1/2} = \dfrac{1}{2}$

› $P(X=1|Y=0) = \dfrac{P(X=1, Y=0)}{P(Y=0)} = \dfrac{1/4}{1/2} = \dfrac{1}{2}$

› $P(X=2|Y=0) = \dfrac{P(X=2, Y=0)}{P(Y=0)} = \dfrac{0}{1/2} = 0$

› $P(X=0|Y=1) = \dfrac{P(X=0, Y=1)}{P(Y=1)} = \dfrac{0}{1/2} = 0$

› $P(X=1|Y=1) = \dfrac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)} = \dfrac{1/4}{1/2} = \dfrac{1}{2}$

› $P(X=2|Y=1) = \dfrac{P(X=2, Y=1)}{P(Y=1)} = \dfrac{1/4}{1/2} = \dfrac{1}{2}$

Miércoles, 29 de noviembre de 2022.

Consideremos $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Condicionando a un evento $B \in \mathcal{F}$

$$E[X|B] = \frac{1}{P(B)} \int_B X \, dP$$

Y variable aleatoria $(\Omega_Y, \mathcal{F}_Y, P_Y)$

$E[X|Y]$ es una variable aleatoria $\mathcal{F}_Y$ medible

$\forall A \in \mathcal{F}_Y$, tenemos que

$$\int_A E[X|Y]\, dP = \int_A X\, dP$$

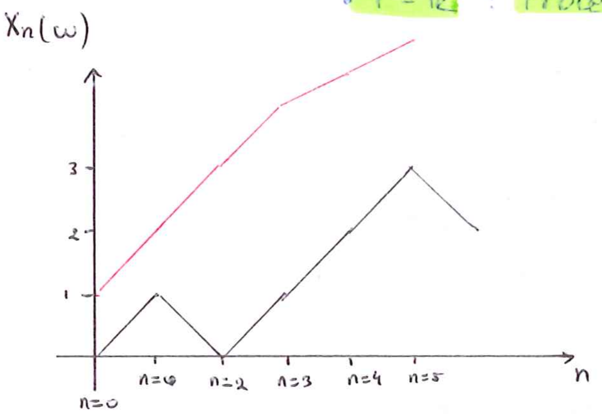
La esperanza condicional de una v.a dada otra v.a es estocástica.

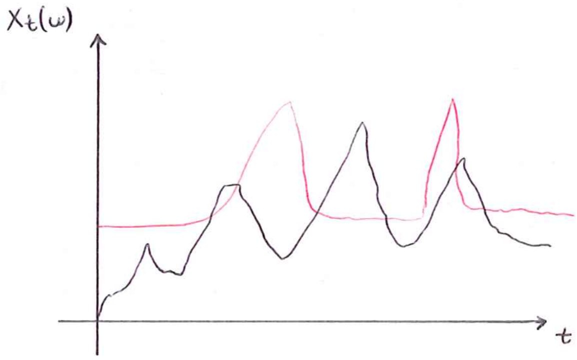
Procesos Estocásticos

Tomemos como base $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Definición 1.1. Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ parametrizadas por T (espacio parametral), y que toman valores en S un conjunto denominado espacio de estados.

Cuando
- $T = \mathbb{N}_0$: Proceso estocástico a tiempo discreto
- $T = \mathbb{R}$: Proceso estocástico a tiempo continuo





Un proceso estocástico es una función

$$X : \Omega \times T \longrightarrow S$$
$$(\omega, t) \longmapsto X(\omega, t)$$

Considerando que S es un subconjunto de $\mathbb{R}$, vamos a tomar la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ restringida a S, es decir $S \cap Bor(\mathbb{R})$

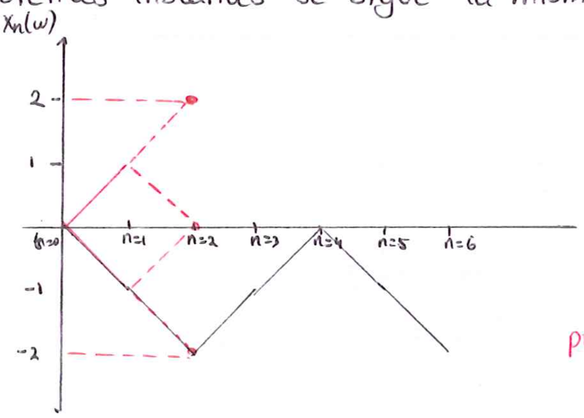
Ejemplo:
- $(X_n \in A)$ Probabilidad de estar en A
- $(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots X_4 = x_4)$ Probabilidad de que sea la trayectoria descrita.

X_n: es la posición de una partícula en el instante n. $(S = \mathbb{Z})$

El movimiento de la partícula está regido por la siguiente dinámica:

- En el instante inicial la partícula está en cero
- Se lanza una moneda, si sale cara avanzo un paso y si sale sello retrocedo un paso.
- En los siguientes instantes se sigue la misma dinámica

Marcha Aleatoria.



- Con la secuencia

S S C C S S

- Con $n = 2$

X_2 :	-2	0	2
probabilidad → p :	$1/4$	$1/2$	$1/4$

Jueves, 10 de noviembre de 2022

Algunos tipos de procesos estocásticos

Procesos de ensayos independientes

Sea el proceso discreto $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ constituido por v.a. independientes. Este proceso representa una sucesión de ensayos independientes de un mismo experimento aleatorio.

Procesos de Markov

En estos procesos, suponiendo conocido el estado del sistema en el presente, los estados anteriores no tienen influencia en los estados futuros del sistema, es decir

$$P(\underbrace{X_{n+1} = x_{n+1}}_{\text{futuro}} \mid \underbrace{X_n = x_n}_{\text{presente}}, \underbrace{X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x, X_0 = 0}_{\text{pasado}}) = P(\underbrace{X_{n+1} = x_{n+1}}_{\text{(posición)}} \mid \underbrace{X_n = x_n}_{\text{(posición)}}) = \overbrace{p(x_n, x_{n+1})}^{\text{propabilidad}} \quad [*]$$

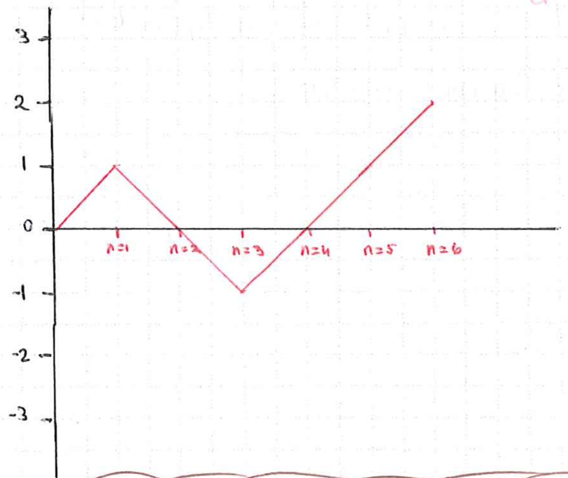
estado actual, estado futuro

propabilidad de transición de x_n a x_{n+1}

Vamos a trabajar con probabilidades de transición homogeneas en el tiempo, es decir,

$$p(i,j) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i)$$

Paseo aleatorio simétrico



Usando Probabilidad total y posicionando en el tiempo

$$P(X_2 = 2 \mid X_0 = 0)$$

$$= P(X_2 = 2 \mid X_1 = 1, X_0 = 0) \overset{1/2}{} P(X_1 = 1, X_0 = 0) \overset{1/2}{}$$

$$+ P(X_2 = 2 \mid X_1 = -1, X_0 = 0) \overset{0}{} P(X_1 = -1, X_0 = 0)$$

$$+ P(X_2 = 2 \mid X_1 = 0, X_0 = 0) P(X_1 = 0, X_0 = 0) \overset{0}{} + \dots \overset{0}{}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Probabilidad de transición

$p(1,2) = 0.5$, $p(1,0) = 0.5$, $p(-1,0) = 0.5$
$p(-1,-2) = 0.5$

$$P(B \mid C) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i, C) P(A_i \mid C)$$

Probabilidad total condicional

Proceso estocástico, markoviano, homogeneo que toma valores en los enteros.

Procesos con incrementos independientes

Se dice que un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X_t : t > 0\}$ tiene incrementos independientes si para cualesquiera tiempos $t_n > \dots > t_2 > t_1 > 0$, las variables $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes.

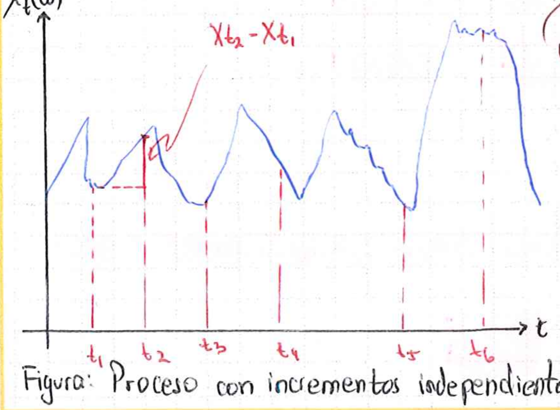


Figura: Proceso con incrementos independientes

¡Los intervalos entre los tiempos no necesitan ser simétricos!

Procesos estacionarios

Un proceso estacionario $\{X_t : t > 0\}$ es estacionario en el sentido estricto si para cualesquiera tiempos $t_1, t_2, \dots, t_n$ la distribución del vector $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ es la misma que el vector $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$ para todo $h > 0$. En particular, la distribución de X_t es la misma que la de X_{t+h} para todo $h > 0$.

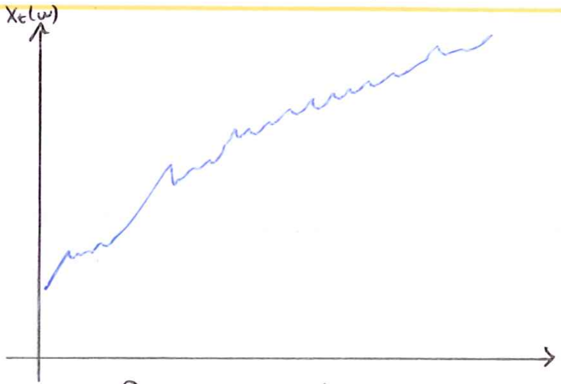


Figura: Proceso con tendencia

No es estacionario

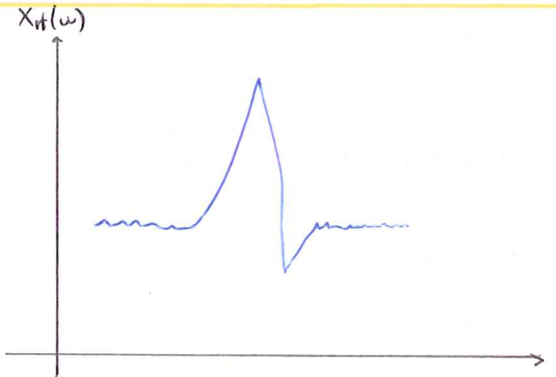


Figura: Proceso no estacionario

El proceso tiene distintas varianzas.

Procesos con incrementos estacionarios

Un proceso $\{X_t : t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios si $\forall s<t$ y $\forall h>0$

$$\underbrace{X_{t+h} - X_{s+h}}_{t-s} \quad y \quad \underbrace{X_t - X_s}_{t-s}$$

tienen la misma distribución de probabilidad.

Ejemplo: Considere un juego de apuestas en un casino. En cada turno se gana \$1.00 con probabilidad $p=0.4$ o se pierde \$1.00 con propobilidad $q=1-p=0.6$. Suponga que usted abandona el juego si su fortuna alcanza \$5.00 y si su fortuna alcanza \$0.00 el casino no le deja jugar más.

Sea X_n la cantidad de dinero que usted tiene después de n apuestas

1) ¿Proceso estocástico a tiempo discreto o a tiempo continuo?

Proceso Discreto, Espacio de Estado $S=\{0,1,2,3,4,5,\}$

2) $S=\{0,1,2,\dots,5\}$.

3)

$p(0,1)=0.4$	$p(1,0)=0.6$	$p(2,1)=0.4$	$p(3,0)=0$
$p(0,2)=0$	$p(1,1)=0$	$p(2,2)=0$	$p(3,1)=0$
$p(0,3)=0$	$p(1,2)=0.4$	$p(2,3)=0.4$	$p(3,2)=0.6$
$\vdots$	$p(1,3)=0$	$p(2,4)=0$	$p(3,3)=0$
$p(0,5)=0$	$\vdots$	$p(2,5)=0$	$p(3,4)=0.4$
	$p(1,5)=0$		$p(3,5)=0$

$$p(i,j)=\begin{cases} 1 & \text{si } i=j=0 \text{ o } i=j=5, \\ 0.4 & \text{si } j=i+1, \\ 0.6 & \text{si } i=j+1, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

(Estados absorbentes: Me quedo ahí para siempre.)

4) ¿Es Markoviano

$$P(X_{n+1}=i+1 \mid X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1}, \dots, X_1=i_1, X_0=i_0) = 0.4 = p(i,i+1) = P(X_{n+1}=i+1 \mid X_n=i)$$

Matriz de transición (siempre a un solo paso)

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad =1$$

instante n

suma por filas es 1

$\sum_j P_{ij} = 1 \qquad P_{ij} \geq 0$

La matriz de transición a n pasos la notamos

$P^{(n)}$

Probabilidades de transición a n pasos.

La probabilidad $P(X_{n+m}=j \mid X_m=i)$ corresponde a la probabilidad de pasar del estado i al tiempo m, al estado j al tiempo $n+m$.
Vamos a trabajar con probabilidades de transición homogeneas en el tiempo, por lo tanto

$$P(X_{n+m}=j \mid X_m=i) = P(X_n=j \mid X_0=i) = P_{ij}(n) = P_{ij}^{(n)}.$$

Por ejemplo, si $S=\mathbb{N}_0$, entonces

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \; \cdots \\
\hline
0 & P_{00}(n) & P_{01}(n) & P_{02}(n) & \cdots & \cdots \\
1 & P_{10}(n) & P_{11}(n) & P_{12}(n) & \cdots & \cdots \\
2 & P_{20}(n) & \vdots & \ddots & & \\
3 & \vdots & \vdots & & \ddots & \\
4 & \vdots & \vdots & & & \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

$$P_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

Lunes, 21 de noviembre de 2022

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ X_n cadena de Markov.

Definición 1.2. Sea A un subconjunto del espacio de estados de una cadena de Markov $\{X_n : n\geq 0\}$. El tiempo de primera visita al conjunto A es:

- Tiempo de primera visita -

$$\tau_A = \begin{cases} \min\{n\geq 1 : X_n \in A\} & \text{Si } X_n\in A \text{ para algún } n\geq 1 \\ +\infty & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Notación

$\tau_{ij} :=$ tiempo de la primera visita a j partiendo de i.

$\tau_i :=$ tiempo del primer retorno a i.

Definición 1.3. Para cada $n\geq 1$, $f_{ij}(n)$ es la probabilidad de que una cadena que inicie en i, visite a j, por primera vez en el n-ésimo paso

- Tiempo de la primera visita en el paso n -

$$f_{ij}(n) = P(\tau_{ij}=n) = P(X_n=j, X_{n-1}\neq j, \ldots, X_1\neq j \mid X_0=i)$$

↳ $f_{ij}(0)=0$ (incluido $i=j$) ↳ $f_i(n) = f_{ii}(n)$

↳ $f_{ij}(1) = P_{ij}$

Proposición 1.4 Para cada $n\geq 1$, se tiene que

$$P_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}(k)\, P_{jj}(n-k)$$

Demostración

$A_1 = (X_n=j, X_1=j, X_0=i)$

$A_2 = (X_n=j, X_2=j, X_1\neq j, X_0=i)$

$A_3 = (X_n=j, X_3=j, X_2\neq j, X_1\neq j, X_0=i)$

$\vdots$

$A_n = (X_n=j, X_k=j, X_{k-1}\neq j, \ldots, X_1\neq j, X_0=i)$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = (X_n=j, X_0=i)$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$$

$$P(A_1) = P(X_n=j, X_1=j, X_0=i)$$
$$= P(X_n=j \mid X_1=j, X_0=i)\, P(X_1=j, X_0=i)$$
$$= P(X_n=j \mid X_1=j)\, P(X_1=j \mid X_0=i)\, P(X_0=i)$$
$$= P_{jj}(n-1)\, p_{ij}(1)\, P(X_0=i)$$
$$= p_{jj}(n-1)\, f_{ij}(1)\, P(X_0=i)$$

$$P(A_2) = P(X_n=j, X_2=j, X_1\neq j, X_0=i)$$
$$= P(X_n=j \mid X_2=j, X_1\neq j, X_0=i)\, P(X_2=j, X_1\neq j, X_0=i)$$
$$= P(X_n=j \mid X_2=j)\, P(X_2=j \mid X_1\neq j, X_0=i)\, P(X_1\neq j, X_0=i)$$
$$= p_{jj}(n-2)\, P(X_2=j \mid X_1\neq j)\, P(X_1\neq j \mid X_0=i)\, P(X_0=i)$$
$$= P_{jj}(n-2)\, p_{ij}(1)\, p_{in}(1)$$

$$P(A_k) = P(X_0=i)\, f_{ij}(k)\, p_{jj}(n-k)$$

Observe que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = (X_n=j, X_0=i)$ y que $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$

Por lo tanto,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(X_n=j, X_0=i) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} P(X_0=i)\, f_{ij}(k)\, p_{ij}(1-k)$$
$$\frac{P(X_n=j, X_0=1)}{P(X_0=i)} = \sum_{k=1}^{n} p_{jj}(n-k)\, f_{ij}(k)$$

$$p_{ij}(n) = P(X_n=j \mid X_0=1) = \sum_{k=1}^{n} p_{jj}(n-k)\, f_{ij}(k)$$

Paseo aleatorio.

Definición 1.5 - Paseo aleatorio - Sean $\xi_1, \xi_2, \dots$ una sucesión de v.a. i.i.d tales que

$$\xi_j = \begin{cases} 1 & p \\ -1 & 1-p = q \end{cases}$$

Entonces se define el paseo aleatorio X_n como:

$$X_n = X_0 + \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$$

Sin pérdida de generalidad, asumiremos $X_0 = 0$. Las probabilidades de transición se escriben de la siguiente manera

$$p_{ij} = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = \begin{cases} p & j=i+1 \\ q & j=i-1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$\forall n\geq 0 \quad E[X_n] = E[X_0+\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n] = X_0 + nE[\xi_1] = 0 + n(p-q)$

$\forall n\geq 0 \quad Var(X_n) = E[X_n^2] - E[X_n]^2$

$$= E[X_n^2] - n^2(p-q)^2$$
$$= E[(X_0+\xi_1+\cdots+\xi_n)^2] - n^2(p-q)^2$$

$$(x_0+\xi_1+\cdots+\xi_n)(x_0+\xi_1+\cdots+\xi_n)$$

$$= x_0^2 + x_0\xi_1 + \cdots + x_0\xi_n + \xi_1 x_0 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_1\xi_n + \xi_n x_0 + \cdots + \xi_n^2 \quad \cdots$$

$$Var(X_n) = Var\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n Var(\xi_i) = n\, Var(\xi_1)$$

$$Var(\xi_1) = E[\xi_1^2] - E[\xi_1]^2$$

$$= E[\xi_1^2] - (p-q)^2$$

$$= (p+q) - (p-q)^2$$

$$= 1 - (p^2 - 2pq + q^2 + 2pq - 2pq)$$

$$= 1 - [(p+q)^2 - 4pq] = 4pq$$

Proposición 1.6 Para cualesquiera x y n tales que $-n \leq x \leq n$ siempre que x y n sean ambos pares o impares, se tiene que

$$P(X_n = x \mid X_0 = 0) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+x)} p^{\frac{1}{2}(n+x)} q^{\frac{1}{2}(n-x)}$$

Para valores de x y n que no cumplen con las condiciones indicadas, la probabilidad en cuestión es cero.

Demostración

Sean R_n y L_n el número de pasos realizados hacia la derecha y hacia la izquierda en el instante n. Luego

$$R_n - L_n = X_n \qquad y \qquad R_n + L_n = n$$

Sumando las dos ecuaciones tenemos que

$$R_n = \frac{1}{2}(n + X_n)$$

Como $X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, entonces

$$R_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(1+\xi_i) \qquad [R_n \text{ es entero para las condiciones de la proposición}] \quad [1]$$

Observe que $\frac{1}{2}(1+\xi)$ es una v.a. con la siguiente distribución

$$\frac{1}{2}(1+\xi) = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & q, \end{cases}$$

luego, R_n tiene distribución binomial con parámetros (n,p). Por lo tanto,

$$P(X_n = x \mid X_0 = 0) = P\left(R_n = \tfrac{1}{2}(n+x)\right)$$

$$= \binom{n}{\frac{1}{2}(n+x)} p^{\frac{1}{2}(n+x)} q^{\frac{1}{2}(n+x)}.$$

Si $p = q = (1/2)$

$$P(X_n = x \mid X_0 = 0) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+x)} \frac{1}{2^n}$$

Proposición 1.7 Si n y $x-y$ son ambos pares o impares, entonces para $-n \leq x \leq n$

$$P(X_n = x \mid X_0 = y) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+x-y)} p^{\frac{1}{2}(x+n-y)} q^{(\frac{1}{2})(n-x+y)}$$

Martes, 22 de noviembre de 2022.

Ejercicio 1. Para un paseo aleatorio simple $\{X_n : n \geq 0\}$ sobre $\mathbb{Z}$. Demuestre que

$$P(X_{n+1}=x) = p\,P(X_n = x-1) + q\,P(X_n = x+1)$$

$$P(X_{n+1}=x) = P(X_{n+1}=x \mid X_n = x-1)\,P(X_n = x-1) + P(X_{n+1}=x \mid X_n = x+1)\,P(X_n = x+1)$$
$$= p\,P(X_n = x-1) + q\,P(X_n = x+1)$$

Ejercicio 2. Una partícula realiza un paseo aleatorio simétrico en $\mathbb{Z}$ empezando en cero

a) ¿Cuál es la probabilidad de que regrese a cero por primera vez en el segundo paso?

$$f_0(2) = P(X_2 = 0, X_1 \neq 0 \mid X_0 = 0) \qquad P(X_2=0, X_0=0) = \binom{2}{\frac{1}{2}(2+0)}\frac{1}{2^2} = \binom{2}{1}\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}' P(X_2 = 0 \mid X_1 = k, X_0 = 0)\,P(X_1 = k, X_0 = 0)$$

$$= P(X_2 = 0 \mid X_1 = 1, X_0 = 0)\,P(X_1 = 1, X_0 = 0) + P(X_2 = 0 \mid X_1 = -1, X_0)\,P(X_1 = -1, 0)$$

$$= q\cdot p + p\cdot q = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula se encuentre nuevamente en cero en el cuarto paso

$$P(X_4 = 0 \mid X_0 = 0) = \binom{4}{\left(\frac{1}{2}\right)(4+0)}\cdot\frac{1}{2^4} = \binom{4}{2}\cdot\frac{1}{2^4} = \frac{4\times 3\times \cancel{2\times 1}}{(4-2)!\,2!}\cdot\frac{1}{2^4} = 6\cdot\frac{1}{2^4}\cdot\frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

$$P(X_4 = 0 \mid X_0 = 0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}' P(X_4 = 0 \mid X_3 = k)\,P(X_3 = k, X_0 = 0)$$

$$= P(X_4 = 0 \mid X_3 = 3)P(X_3 = 3, X_0 = 0) + P(X_4 = 0 \mid X_3 = 1)P(X_3 = 1, X_0 = 0) + P(X_4 = 0 \mid X_3 = -1)$$
$$P(X_3 = -1, X_0 = 0) + P(X_3 = -3, X_0 = 0)$$

$$= P(X_4 = 0 \mid X_3 = 3)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}' P(X_3 = 3 \mid X_2 = k)\,P(X_2 = k, X_0 = 0)\right] + P(X_4 = 0 \mid X_3 = 1)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}' P(X_3 = 1 \mid X_2 = k)\,P(X_2 = k, X_0 = 0)\right]$$

$$+ P(X_4 = 0 \mid X_3 = -1)\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} P(X_3 = -1 \mid X_2 = k)\,P(X_2 = k, X_0 = 0)\right] + P(X_3 = -3, X_0 = 0)\left[\sum_{z\in\mathbb{Z}} P(X_3 = -3, X_2 = k)\,P(X_2 = k, X_0 = 0)\right]$$

$$p_{00}(4) = \sum_{k=1}^{4}' f_{00}(k)\,p_{00}(4-k)$$

$$= \cancel{f_{00}(1)}\,\overset{0}{p_{00}(3)} + f_{00}(2)^{1/2}\,p_{00}(2)^{1/2} + \cancel{f_{00}(3)}\,\overset{0}{p_{00}(1)} + f_{00}(4)\,p_{00}(0)^{1}$$

$$f_{00}(4) = P(X_4 = 0, X_3 \neq 0, X_2 \neq 0, X_1 \neq 0 \mid X_0 = 0)$$

$$= \sum_{i,j,k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}' P(X_4 = 0 \mid X_3 = i, X_2 = j, X_1 = k, X_0 = 0)\,P(X_3 = i, X_2 = j, X_1 = k \mid X_0 = 0)$$

$$= P(X_4 = 0 \mid X_3 = 1, X_2 = 2, X_1 = 1, X_0 = 0)\,P(X_3 = 1, X_2 = 2, X_1 = 1 \mid X_0 = 0)$$
$$+ P(X_4 = 0 \mid X_3 = -1, X_2 = -2, X_1 = -1 \mid X_0 = 0)$$

$$= P(X_4 = 0 \mid X_3 = 1)\,P(X_3 = 1, X_2 = 2, X_1 = 1 \mid X_0 = 0) + P(X_4 = 0 \mid X_3 = -1)\,P(X_3 = -1, X_2 = -2, X_1 = -1 \mid X_0 = 0)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$p_{00}(4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$E[X_2 \mid X_0=0] = \sum_{k\in\mathbb{Z}}' k\,P(X_2=k \mid X_0=0)$$

$$= 2P(X_2=2 \mid X_0=0) + 0P(X_2=0 \mid X_0=0) - 2P(X_2=-2 \mid X_0=0)$$

$$= 2\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}' P(X_2=2 \mid X_1=k, X_0=0)\,P(X_1=k \mid X_0=0)\right)$$

$$-2\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}' P(X_2=-2 \mid X_1=k, X_0=0)\,P(X_1=k \mid X_0=0)\right)$$

$$= 2P(X_2=2 \mid X_1=1)P(X_1=1 \mid X_0=0) - 2P(X_2=-2 \mid X_1=-1)P(X_1=-1 \mid X_0=0)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

Ejercicio 3: Cadena de inventarios

Considere la siguiente política de inventarios

Si el inventario al final del día llega a ser menor o igual a 1, entonces se ordena la cantidad de inventario suficiente para alcanzar 5 unidades (esto sucede al inicio del día siguiente)

Si la demanda se comporta bajo la siguiente distribución

$$D_{n+1} = \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \end{cases}$$

y X_n son las unidades disponibles al final del día.

¿Cuál es la matriz de transición del proceso X_n? $S=\{0,1,2,3,4,5\}$.

- Si $X_n > 1$, entonces $\max\{-D_{n+1}+X_n, 0\}$
- Si $X_n \le 1$, entonces $X_{n+1} = \max\{X_n + (5-X_n) - D_{n+1}, 0\}$.

luego la matriz de transición está dada por

$$\begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 2 & 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \end{array} \quad (P_{ij})$$

(X_n)

$P_{20} = P(X_n=2, D_{n+1}=3) + P(X_n=2, D_{n+1}=2)$

$P_{10} = P(X_n=1, D_{n+1}=1) + P(X_n=2, D_{n+1}=2) + P(X_n=2, D_{n+1}=3)$
$= 0.4 + 0.2 + 0.1.$?

Miércoles, 23 de noviembre de 2022.

Proposición 1.8. Para una caminata aleatoria sobre $\mathbb{Z}$ la probabilidad de un eventual regreso al punto de partida es

$$1-|p-q| = \begin{cases} 1 & \text{si } p=q \\ <1 & \text{si } p\neq q \end{cases}$$

Definición 1.9. - Función generadora de momentos - Sea Ω un espacio muestral y p_k la probabilidad de que el evento k ocurra ($p_k>0$, $\forall k$; $\sum_k p_k = 1$). La función generadora de momentos se define como

$$G(x) = \sum_k' p_k x^k.$$

Además,

$$G'(1) = \sum_k' k\,p_k$$

Lema 1.10. Si la serie $\sum_k a_k$ es convergente, entonces

$$\lim_{t\to 1} \sum_k a_k t^k = \sum_k a_k$$

Observación: Note que $\sum_k f_{00}(k)$ es la probabilidad de que el paseo aleatorio regrese eventualmente a cero. Además, esta serie es convergente pues se trata de una suma de probabilidades de eventos disjuntos. Es decir, su suma es como máximo 1.

Demostración (Proposición 1.8)
Sabemos que, por la [Proposición 1.4]

$$p_{00}(n) = \sum_{k=0}^{n} f_{00}(k)\, p_{00}(n-k) \qquad [1]$$

luego, multiplicamos por t^n a ambos lados en [1]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_{00}(n)\, t^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} f_{00}(k)\, p_{00}(n-k)\right) t^n$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} f_{00}(k)\, p_{00}(n-k)\, t^n$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} f_{00}(k)\, t^k \sum_{n=k}^{+\infty} p_{00}(n-k)\, t^{n-k}$$

De esta manera,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_{00}(n)\, t^n = G(t)\sum_{n=k}^{+\infty} p_{00}(n-k)\, t^{n-k}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_{00}(n)\, t^n - 1\right) = G(t)\cdot\sum_{n=0}^{+\infty} p_{00}(n)\, t^n \qquad [2]$$

De [2] para encontrar $G(t)$ debemos hallar antes la función generadora de momentos de las probabilidades de transición a n pasos. Luego

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_{00}(n)\, t^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n} p^n q^n t^{2n}$$

(Distribución del paseo aleatorio en el istante n)

$$\boxed{(1+t)^a = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{a}{n} t^n \qquad |t|<1}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(-4)^n\binom{-1/2}{n} p^n q^n t^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{n}(-4pqt^2)^n$$

$$= (1-4pqt^2)^{-1/2} \qquad [3]$$

Substituyendo [2] en [3]

$$(1-4pqt^2)^{-1/2} = G(t)(1-4pqt^2)^{-1/2}$$

$$G(t) = 1-(1-4pqt^2)^{1/2} \qquad [4]$$

Con esto, se sigue que

$$G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_{00}(k)\, t^k$$

y aplicando el [Lema 1.10]

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_{00}(k) = \lim_{t\to 1} G(t) = 1-(1-4pq)^{1/2} = 1-|p-q|.$$

Tiempo esperado de retorno ($p=q=1/2$, paseo simétrico)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\, f_{00}(k) = \lim_{t\nearrow 1} G'(t) = \lim_{t\nearrow 1}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = +\infty$$

Jueves, 24 de noviembre de 2022.

Sección: Procesos de Markov a tiempo discreto.

Distribución inicial

$\{X_n : n \geq 0\}$

Podemos considerar que una C.H. no necesariamente inicia desde un estado fijo cualquiera, sino que inicia bajo una distribución de probabilidad.

Por ejemplo, si consideramos $S = \mathbb{N}_0$ entonces la distribución de probabilidad inicial es la colección de probabilidades $p_0, p_1, p_2, \ldots$ con $(\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n = 1)$ donde p_n es la probabilidad de que la C.H. comience en n.

↳ Si se conoce la matriz $P^{(n)}$ y la distribución inicial. Entonces la distribución de la v.a. X_n es $P(X_n = j) = \sum_i p_i \, p_{ij}(n)$

$$P(X_n = j) = \sum_{i} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{probabilidad de} \\ \text{comenzar en } i}}{p_i} \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{probabilidad de estar en } j \text{ si comenzamos en} \\ i, \text{ luego de } n \text{ pasos.}}}{p_{ij}(n)} \tag{1.1}$$

Ecuación de Chapman - Kolmogorov

Para cualquier par de números enteros r y n, tales que $n \geq r \geq 0$ y para cualesquiera estados i y j, se cumple que

$$p_{ij}(n) = \sum_k p_{ik}(r)\, p_{kj}(n-r)$$

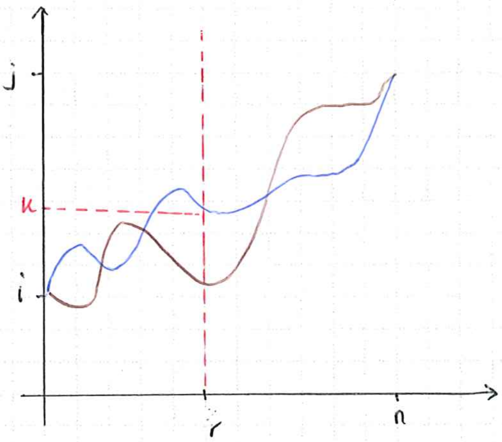


Figura: Idea intuitiva de la ecuación de Chapman- Kolmogorov

Demostración
(Ideas)

$$p_{ij}(n) = P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

$$P(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(X_n = j \mid X_r = k)\, P(X_r = k \mid X_0 = i)$$

Sean $n, r \in \mathbb{Z}$ tales que $0 \leq r \leq n$ y sean $i, j \in S$ cualesquiera. Sea A_k el evento $X_r = k$ para cada $k \in S$, entonces de la probabilidad total

$$\begin{aligned} p_{ij}(n) &= P(X_n = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X_n = j \mid X_r = k)\, P(X_r = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} p_{kj}(n-r)\, p_{ik}(r) \end{aligned}$$

Observación

$$p_{ij}(n) \geq p_{ik}(r)\, p_{kj}(n-r)$$

Proposición 1.11 Prop 3.3 [1] (pág 40) La probabilidad de transición en n pasos $(p_{ij}(n))$ está dada por la entrada (i,j) de la n-ésima potencia de la matriz de transición a un paso P. Es decir,

$$p_{ij}(n) = (P^n)_{ij}$$

Demostración
Por Chapman - Kolmogorov

$$\begin{aligned} p_{ij}(n) &= \sum_k p_{kj}(n-1)\, p_{ik}(1) \\ &= \sum_{k_1} p_{ik_1}(1) \sum_{k_2} p_{k_2 j}(n-2)\, p_{k_1 k_2}(1) \\ &= \sum_{k_1, k_2} p_{ik_1}(1)\, p_{k_2 j}(n-2)\, p_{k_1 k_2}(1) \\ &\;\vdots \\ &= \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}} p_{ik_1}(1)\, p_{ik_2}(1) \cdots p_{ik_{n-1}}(1) = (P^n)_{ij} \end{aligned}$$

Definición 1.12. - Comunicación -

Se dice que el estado j es accesible a partir del estado i si existe $n \geq 0$ tal que $P_{ij}(n) > 0$. Vamos a denotar la accesibilidad a j desde i por $i \to j$.
Se dice que i y j son comunicantes si $i \to j$ y si $j \to i$.
Denotaremos la comunicación por $i \leftrightarrow j$

La comunicación es una relación de equivalencia.

Al ser una clase de equivalencia; la comunicación induce una partición del espacio de estados de una CM. dada por los subconjuntos de estados comunicantes.

A la clase de comunicación de un estado i se la denotará por $C(i)$.

$$\therefore \; i \leftrightarrow j \iff C(i) = C(j)$$

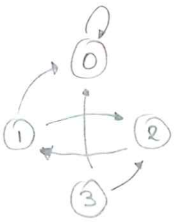
Ejemplo:

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$C(0) = \{0\}$

$C(1) = \{1, 2\}$

$C(3) = \{3\}$



Definición 1.13. Se dice que una cadena de Markov es irreducible si todos los estados se comunican entre sí.

Notación: La probabilidad de un eventual retorno a un estado j la denotaremos f_{jj}. Por ejemplo,

$$f_{00} = \sum_k f_{00}(k)$$

Definición 1.14 Decimos que τ es un tiempo de paro si la ocurrencia o no del evento $\{\tau = n\}$ puede ser determinada mirando los valores del proceso hasta el instante n.

Por ejemplo, si

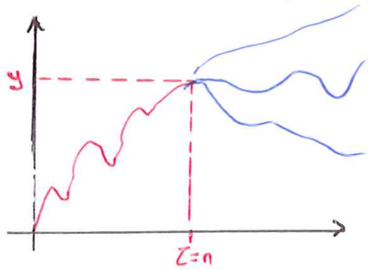
$\tau_y = \min\{n \geq 1 : X_n = y\}$, entonces τ_y es tiempo de paro

$\{\tau_y = n\} = \{X_n = y, X_{n-1} \neq y, \ldots, X_1 \neq y, X_0 = y\}$.

Propiedad Fuerte de Markov.

Teorema 1.15 Suponga que τ es un tiempo de paro. Dado que $\tau = n$ y $X_\tau = y$ cualquier otra información sobre $X_0, X_1, \ldots, X_{\tau-1}$ es irrelevante para predecir el futuro.

$X_{\tau+k}, k \geq 0$, se comporta como una cadena de Markov que inicia en y.



Repaso Prueba I

Un hombre lanza una moneda hasta el momento en que suceden 3 caras consecutivas. Sea X_n la mayor cadena de caras hasta el n-ésimo intento

a) Pruebe que X_n es cadena de Markov.

Solución

Este proceso es discreto con espacio de estados $S = \{0, 1, 2, 3\}$

¡Ejercicio pendiente de consultar!

Proposición 1.11.1 Matrices semejantes tienen los mismos valores propios

Proposición 1.11.2 Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y solo si tiene n vectores propios linealmente independientes

Si todas las raíces del polinomio característico de una matriz A de $n \times n$ son distintas A es diagonalizable

Proposición 1.11.3. Cuando P una matriz estocástica es diagonalizable, es decir

$$P = Q D Q^{-1}$$

con D una matriz diagonal, entonces

$$P^n = Q D^n Q^{-1}$$

Ejemplo: Consideremos nuevamente la cadena general de dos estados

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Los valores propios están dados por $Av = v\lambda \Rightarrow Av - v\lambda = (A - \lambda I)v = 0$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-a-\lambda & a \\ b & 1-b-\lambda \end{pmatrix}$$

Así

$$\begin{aligned}(1-a-\lambda)(1-b-\lambda) - ab &= 1 - b - \lambda - a + \cancel{ab} + a\lambda - \cancel{\lambda} + \lambda b + \lambda^2 - \cancel{ab} \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + \lambda a + \lambda b + 1 - a - b \\ &= \lambda^2 - \lambda(2 + a - b) + 1 - a - b\end{aligned}$$

Luego, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1 - a - b$. Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -a v_1 + a v_2 = 0 \\ b v_1 - b v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = v_2 \text{ y } v_2 = v_1 \quad (v_1, v_1) = v_1(1,1)$$

Así, los valores propios asociados son

$$v_1 = (1,1) \quad \text{y} \quad v_2 = (a, -b),$$

respectivamente, con esto se sigue que

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{pmatrix}$$

Luego

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & -b & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & -b-a & -1 & 1 \end{array}\right) \quad F_2 - F_1 \to F_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & b+a & 1 & -1 \end{array}\right) \quad -1 \cdot F_2 \to F_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{b+a} & -\frac{1}{b+a} \end{array}\right) \quad \frac{F_2}{b+a} \to F_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 - a/b+a & -\frac{a}{b+a} \\ 0 & 1 & 1/(b+a) & -\frac{1}{b+a} \end{array}\right)$$

$F_1 - aF_2 \to F_1$

$$\begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & -\frac{a}{b+a} \\ \frac{1}{b+a} & -\frac{1}{b+a} \end{pmatrix} = \frac{1}{b+a}\left(\begin{matrix} b & \\ 1 & - \end{matrix}\right.$$

Por lo tanto

$$P^n = Q D^n Q^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-a-b)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{a+b}$$

$$= \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b} \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Martes, 6 de diciembre de 2022. (Clase Ejercicios)

Ejercicio 1. Sean $\xi_1, \xi_2, \ldots$ una sucesión de v.a. independientes i.d. que toman valores en $\mathbb{N}_0$ tales que

$$P(\xi_i = 0) = a_0, \quad P(\xi_i = 1) = a_1, \quad P(\xi_i = 2) = a_2$$

y así sucesivamente

a) Sea $X_n = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$

a.1) ¿Es X_n una CM?
a2) ¿S? $\quad S = \mathbb{N}_0$
a3) ¿P?
a4) ¿Cuáles son las clases de comunicación

a1) Propiedad de Markov

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0)$$

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \ldots, X_1 = x_1) = P(\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \ldots, \xi_1 = x_1)$$

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \; \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$C(0) = \{0\}$
$C(1) = \{1\}$
$C(2) = \{2\}$
$\vdots$

$X_n = \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$

$X_{n+1} = \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$

$$X_{n+1} = \begin{cases} \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} & \text{si } \xi_{n+1} \le X_n \\ \xi_{n+1} & \text{si } \xi_{n+1} > X_n \end{cases} \overset{[*]}{=} \begin{cases} X_n & \text{si } \xi_{n+1} \le X_n \\ \xi_{n+1} & \text{si } \xi_{n+1} > X_n \end{cases}$$

Sí es una cadena de Markov

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = i \mid X_n = j)$$

$$p(i, i+1) = P(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i) = P(\xi_{n+1} = i+1) = a_{i+1}$$

$$p(i, i-1) = p(X_{n+1} = i-1 \mid X_n = i) = P(X_n = i-1) = 0$$

por la definición [*]

$$p(0,0) = P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = P(X_n = 0) = a_0$$

$p(1,1) = P(X_{n+1}=1 \mid X_n=1) = P(\xi_{n+1}=1) + P(\xi_{n+1}=0) = a_0+a_1$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 0 & a_0+a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 2 & 0 & 0 & a_0+a_1+a_2 & a_3 & a_4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & a_0+a_1+a_2+a_3 & a_4 \end{array}$$

Ejercicio 2.

Sea $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$

2.1) X_n es CH?
2.2) $S = ?$
2.3) $P = ?$

2.1)

$X_{n+1} = \underbrace{\xi_1 + \dots + \xi_n}_{X_n} + \xi_{n+1} \Rightarrow X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}$ Es cadena de Markov.

2.2) $\mathbb{N}_0$ (Espacio de estados)

$P(i,i) = P(X_{n+1}=i \mid X_n=i) = P(\xi_{n+1}=0) = a_0$.

$P(i,i+1) = P(X_{n+1}=i+1 \mid X_n=i) = P(\xi_{n+1}=1) = a_1$

$\vdots$

$P(i,i+2) = P(X_{n+1}=i+2 \mid X_n=i) = P(\xi_{n+1}=2) = a_2$

$P(i,i_j) = P(X_{n+1}=i_j \mid X_n=i) = P(\xi=k) = 0$ pues $k<0$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 2 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{array}$$

Ejercicio 3

Considere una ~~CH~~ proceso estocástico con espacio de estados $S=\{0,1\}$ donde $0 \le a,b \le 1$. Suponga que la distribución inicial está dada por $P(X_0=i)=p_i$

a) Si $a=1-b$. X_n es CH?
b) Si $a \neq 1-b$, X_n es CH?
c) Encuentre $f_{ij}(n)$ $\forall i,j \in S$
d) $P^{(n)}$

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1-a & a \\ 1 & b & 1-b \end{array}$$

$S = \mathbb{N}_0$

a) Si $a=1-b$

$P = \begin{pmatrix} b & 1-b \\ b & 1-b \end{pmatrix}$

$P(X_{n+1}=0 \mid X_n=0) = b$
$P(X_{n+1}=0 \mid X_n=1) = b$.
$P(X_{n+1}=1 \mid X_n=0) = 1-b$
$P(X_{n+1}=1 \mid X_n=0) = 1-b$.

No es cadena de Markov

b) Si $a \neq 1-b$, entonces X_{n+1} es dependiente de X_n. Como tenemos la matriz de transición, por hipótesis ya sería cadena de Markov.

c) $f_{ij}(n)$ $\forall i,j \in S$.

$f_{00}(n) = P(X_n=0, X_{n-1}=1, \dots, X_1=1 \mid X_0=0)$
$= P(X_n=0 \mid X_{n-1}=1)P(X_{n-1}=1 \mid X_{n-2}=1) \cdots P(X_1=1 \mid X_0=0)$
$= p_0\, a(1-b)^{n-2} b$

$f_{01}(n) = P(X_n=1, X_{n-1}=0, \dots, X_1=0 \mid X_0=1)$
$= p_0(1-a)\cdots(1-a)a$
$= a.\, p_0 (1-a)^{n-1}$

$f_{10}(n) = P(X_n=0, X_{n-1}=1, \dots, X_1=0 \mid X_0=0) = p_1(1-b)^{n-1}a$

$f_{11}(n) = p_1\, b(1-a)^{n-2}a$.

(d) Para encontrar $P^{(n)}$

Ejercicios extra

Ejercicio 1. Suponga que X tiene una distribución continua con función de densidad f_X. Muestre que

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x)$$

si f_X es continua en x.

Notemos que

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$$

Luego, como f_X es continua en x, entonces F_X es diferenciable en x y

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x)$$

Ejercicio 2. Sea $B_1, B_2, \ldots$ una partición de Ω y sea $A \in \mathcal{F}$ un evento cualquiera, pruebe la fórmula de probabilidad total.

P.D. $\quad P(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A \mid B_i) P(B_i)$

Notemos que

$$\begin{aligned} A &= A \cap \Omega \\ &= A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots) \\ &= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \qquad [*] \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} (A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) &= A \cap (B_i \cap B_j) \\ &= A \cap \emptyset \\ &= \emptyset \qquad [**] \end{aligned}$$

De donde, se sigue que por [*] y [**]

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A\cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots) \\ &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots \\ &= P(A \mid B_1) P(B_1) + P(A \mid B_2) P(B_2) + \ldots \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(A \mid B_i) P(B_i) \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Suponga que tenemos 3 monedas 10 ctvs, 25ctvs, 50ctvs. Cuando las 3 monedas se lanzan, sumamos los valores de ellas que cayeron con los valores hacia arriba y denotamos a esta v.a. por X

¿Cuál es la esperanza total de X dado que 2 monedas cayeron con sus valores hacia arriba?

Sea A el evento en el que dos de las tres monedas caen con los valores hacia arriba. Queremos calcular $E[X \mid A]$

$$A = \{ccs, csc, scc\} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{3}{8}$$

Luego, como

$$E[X \mid A] = \frac{1}{P(A)} \int_A X\,dP \qquad X \mid A = \begin{cases} 35 \text{ ctv} \\ 60 \text{ ctv} \\ 75 \text{ ctv} \end{cases} \quad \text{Posibilidades al condicionar } X \text{ por } A$$

$$E[X \mid A] = \frac{1}{3/8}\left(0.35 \cdot \frac{1}{8} + 0.60 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{75}{8}\right) = \frac{1.70}{3}$$

Ejercicio 4. Muestre que si

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

entonces $E[\mathbb{1}_A \mid B] = P(A \mid B)$

Notemos que

$$E[\mathbb{1}_A \mid B] = \frac{1}{P(B)} \int_B \mathbb{1}_A(w)\, dP = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A \mid B)$$

Ejercicio 5.
Considere $\Omega = [0,1]$ con la σ-álgebra de Borel y P la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Encuentre $E(\xi \mid \eta)$, con

$$\xi(x) = 2x^2 \quad y \quad \eta(x) = \begin{cases} 1 & si\ x\in[0,1/3] \\ 2 & si\ x\in(1/3, 2/3) \\ 0 & si\ x\in(2/3,1] \end{cases}$$

Notemos que η es una v.a. discreta, luego $E[\xi\mid\eta]$ es una v.a. luego como $2x^2$ es integrable en $[0,1]$, entonces

$$E[\xi \mid \eta=0] = \frac{1}{P(\eta=0)} \int_{\eta=0} \xi\, dP = 3\int_{2/3}^{1} 2x^2\, dx = 6\int_{2/3}^{1} x^2\, dx$$

$$E[\xi \mid \eta=1] = \frac{1}{P(\eta=1)} \int_{\eta=1} \xi\, dP = 3\int_{0}^{1/3} 2x^2\, dx = 6\int_{0}^{1/3} x^2\, dx$$

$$E[\xi \mid \eta=2] = \frac{1}{P(\eta=2)} \int_{\eta=2} \xi\, dP = 3\int_{1/3}^{2/3} 2x^2\, dx = 6\int_{1/3}^{2/3} x^2\, dx$$

Ejercicio 6. Sea $\{X_n : n=0,1,2,\dots\}$ un proceso estocástico a tiempo discreto

Pág 28 [1] a) Muestre que $\{X_n : n=0,1,2,\dots\}$ es una cadena de Markov si y solo si para todo $n\geq 0$ y para cualesquiera estados $x_0, x_1, \dots, x_n$ se verifica que

$$P(X_0=x_0,\dots,X_n=x_n) = P(X_0=x_0)\,P(X_1=x_1\mid X_0=x_0)\cdots P(X_n=x_n\mid X_{n-1}=x_{n-1}) \qquad [*]$$

($\Rightarrow$) Notemos que

$$\begin{aligned}
P(X_0=x_0,\dots,X_n=x_n) &= P(X_n=x_n\mid X_{n-1}=x_{n-1},\dots,X_0=x_0)\,P(X_{n-1}=x_{n-1},\dots,X_0=x_0) \quad \text{Probabilidad Condicional}\\
&= P(X_n=x_n\mid X_{n-1}=x_{n-1})\,P(X_{n-1}=x_{n-1}\mid X_{n-2}=x_{n-2},\dots,X_0=x_0)\,P(X_{n-2}=x_{n-2},\dots,X_0=x_0)\\
&= P(X_n=x_n\mid X_{n-1}=x_{n-1})\cdots P(X_2=x_2\mid X_1=x_1, X_0=0)\,P(X_1=x_1, X_0=0)\\
&= P(X_n=x_n\mid X_{n-1}=x_{n-1})\cdots P(X_1=x\mid X_0=x_0)\,P(X_0=x_0)
\end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de Markov

($\Leftarrow$) Supongamos [*], notemos que

$$P(X_{n+1}=x_{n+1},\dots,X_0=x_0) = P(X_{n+1}=x_{n+1}\mid X_n=x_n)\cdots P(X_1=x_1\mid X_0=x_0)\,P(X_0=x_0)$$

Por otro lado, por condicionamiento

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1}=x_{n+1}\mid X_n=x_n,\dots,X_0=x_0) &= \frac{P(X_{n+1}=x_{n+1},\dots,X_0=x_0)}{P(X_n=x_n,\dots,X_0=x_0)}\\
&= \frac{P(X_{n+1}=x_{n+1}\mid X_n=x_n)\cdots \cancel{P(X_1=x_1\mid X_0=x_0)}\,\cancel{P(X_0=x_0)}}{P(X_n=x_n\mid X_{n-1}=x_{n-1})\cdots \cancel{P(X_1=x_1\mid X_0=x_0)}\,\cancel{P(X_0=x_0)}}\\
&= P(X_{n+1}=x_{n+1}\mid X_n=x_n)
\end{aligned}$$

Con lo que se cumple la propiedad.

b) Muestre que si $\{X_n : n=0,1,2,\dots\}$ es una cadena de Markov entonces para todo $n\geq 0$ y para cualesquiera estados $x_0, x_1,\dots,x_n$ se verifica que

$$P(X_0=x_0\mid X_1=x_1,\dots,X_n=x_n) = P(X_0=x_0\mid X_1=x_1)$$

Aplicando probabilidad condicional, notemos que

$$P(X_0=x_0\mid X_1=x_1,\dots,X_n=x_n) = \frac{P(X_0=x_0,\dots,X_n=x_n)}{P(X_1=x_1,\dots,X_n=X_n)}$$

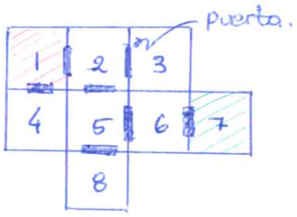
$$= \frac{P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}) \cdots P(X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0) P(X_0 = x_0)}{P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}) \cdots P(X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1) P(X_1 = x_1)}$$

$$= \frac{P(X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0) P(X_0 = x_0)}{P(X_1 = x_1)}.$$

$$= \frac{P(X_1 = x_1, X_0 = x_0)}{P(X_1 = x_1)} = P(X_0 = x_0 \mid X_1 = x_1)$$

Con lo que se sigue el resultado.

Ejercicio 7. Un conejillo de indias se mueve en un laberinto cuyo esquema se encuentra a continuación:



El conejillo se mueve aleatoriamente a través de los compartimientos, es decir, si hay k formas de dejar un compartimiento, elige cada una de ellas con probabilidad $1/k$. Considere el movimiento del conejillo como un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$, en el cual X_n representa el número de compartimiento en el que se encuentra el conejillo al tiempo n.

a) Explique por qué $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ es un proceso de markov.

b) Suponiendo que el laberinto inicia en el compartimiento 1 y tiene su salida en el compartimiento 7, ¿cuál es la probabilidad de que el conejillo salga del laberinto en el menor número de pasos posible?

a) Dado que el conejillo avanza un compartimiento a la vez, el estar en un nuevo compartimiento solo depende del estado o compartiento actual

Las trayectorias de salida para el conejillo son las siguientes

$$1 - 2 - 5 - 6 - 7$$

Por lo tanto, la probabilidad buscada es:

$$P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 5, X_3 = 6, X_4 = 7)$$

Luego, aplicando el ejercicio 6, se sigue que

$$P(X_4 = 7, X_3 = 6, X_2 = 5, X_1 = 2, X_0 = 1) = \underbrace{P(X_4 = 7 \mid X_3 = 6)}_{1/2} \underbrace{P(X_3 = 6 \mid X_2 = 5)}_{1/3} \underbrace{P(X_2 = 5 \mid X_1 = 2)}_{1/3} \underbrace{P(X_1 = 2 \mid X_0 = 1)}_{1/2} \overbrace{P(X_0 = 1)}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{36}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el conejillo salga en el menor número de pasos posibles es $1/36$

Ejercicio 8. Sea $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ una caminata aleatoria simple sobre $\mathbb{Z}$ con probabilidades de transición $p = q$

a) Demuestre que la función generadora de momentos de $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ es

$$H(t) = E[e^{tX_n}] = (pe^t + qe^{-t})^n$$

b) Utilice el resultado anterior para encontrar la esperanza de X_n

a) Recordemos que podemos definir el paseo aleatorio simétrico de la siguiente forma: Sean $\xi_1, \xi_2, \ldots$ v.a. i.i.d con

$$P(\xi_i = 1) = p, \quad P(\xi_i = -1) = q \qquad \text{con } i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Así, el paseo aleatorio es, sin pérdida de generalidad,

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \xi_i & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Con esto tenemos que

$$e^{tX_n} = e^{t(\xi_1+\dots+\xi_n)} = e^{t\xi_1}e^{t\xi_2}\dots e^{t\xi_n} = \prod_{i=1}^{n} e^{t\xi_i}$$

Si X y Y son v.a. independientes, entonces $E[XY]=E[X]E[Y]$. Si además, f es medible, $f(X)$ y $f(Y)$ son v.a. independientes.

Con esto, se sigue que

$$M(t) = E[e^{tX_n}] = E\left[\prod_{i=1}^{n} e^{t\xi_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} E[e^{t\xi_i}]$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (e^{t}p + e^{-t}q)$$

$$= (pe^{t} + qe^{-t})^{n}$$

b) Recordemos la definición del momento k-ésimo

$$m_k = E[X_n^k] = \frac{d^k}{dt^k} M(t) \Big|_{t=0}$$

La esperanza es el primer momento

$$m_1 = E[X_n] = \frac{d}{dt} M(t)\Big|_{t=0} = n(pe^{t}+qe^{-t})^{n-1}(pe^{t}-qe^{-t})\Big|_{t=0}$$

$$= n(p+q)^{n-1}(p-q)$$

$$= n(p-q)$$

Ejercicio 9. Demuestre que todo proceso a tiempo discreto $\{X_n : n\geq 0\}$ con incrementos independientes, cumple con la propiedad de Markov.

Recordemos que un proceso con incrementos independientes satisface que las v.a.

$$X_0, X_1 - X_0, X_2 - X_1, \dots, \quad \text{son independientes.}$$

Con esto, notemos que

$$P(X_{n+1}=x_{n+1} \mid X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0)$$

$$= \frac{P(X_{n+1}=x_{n+1}, X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0)}{P(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0)}$$

$$= \frac{P(X_{n+1}-X_n = x_{n+1}-x_n, \dots, X_2 - X_1 = x_2 - x_1, X_1 - X_0 = x_1 - x_0, X_0 = x_0)}{P(X_n - X_{n-1} = x_n - x_{n-1}, \dots, X_1 - X_0 = x_1 - x_0, X_0 = x_0)}$$

$$= \frac{P(X_{n+1}-X_n = x_{n+1}-x_n)\cdots \cancel{P(X_1 - X_0 = x_1 - x_0) P(X_0 = x_0)}}{P(X_n - X_{n-1} = x_n - x_{n-1})\cdots \cancel{P(X_1 - X_0 = x_1 - x_0) P(X_0 = x_0)}}$$

$$= P(X_{n+1} - X_n = x_{n+1} - x_n)\frac{P(X_n = x_n)}{P(X_n = x_n)} = \frac{P(X_{n+1}=x_{n+1}, X_n = x_n)}{P(X_n = x_n)} = P(X_{n+1}=x_{n+1} \mid X_n = x_n)$$

Como se quería.

Jueves, 8 de diciembre de 2022

Demostración (Teorema 1.15)

P.D. $P(X_{\tau+1}=z \mid X_\tau = y, \tau = n) = p(y,z)$ (Con esto se prueba el resultado)

Sea V_n el conjunto de vectores tales que $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ son las posibles trayectorias que hacen que se cumpla con $\tau = n$ y $X_\tau = y$, entonces

$$P(X_{\tau+1}=z, X_\tau = y, \tau_n) = \sum_{x\in V_n} P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = n, X_{n+1}=z)$$

$$= \sum_{x\in V_n} P(X_{n+1}=z \mid X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) P(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0)$$

$$= p(y,z) \sum_{x\in V_n} P(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0)$$

$$= p(y,z)\, P(\tau = n,\ X_\tau = y)$$

De donde, se sigue que

$$\frac{P(X_{\tau+1} = z \mid X_\tau = y,\ \tau = n)}{P(\tau = n,\ X_\tau = y)} = p(y,z)$$

con lo que se sigue que

$$P(X_{\tau+1} = z \mid X_\tau = y,\ \tau = n) = p(y,z)$$

Proposición 1.17 Sea N_i la v.a. que cuenta el número de veces que el proceso regresa al estado i a partir del primer paro. Es decir

Prop. 3.8 (pág 51) [1]

$$N_i = \sum_n \mathbb{1}_{\{X_n = i\}} \qquad \text{cuando } X_0 = i$$

Entonces

$$P(N_i \geq k \mid X_0 = i) = f_i^k \qquad \text{y sigue una distribución geométrica}$$

Demostración

$$P(N_i \geq k \mid X_0 = i) = \sum_{m=1}^{+\infty} P(N_i \geq k,\ X_m = i,\ X_{m-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} P(N_i \geq k \mid X_m = i,\ X_{m-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i,\ X_0 = i)\, P(X_m = i,\ X_{m-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i,\ X_0 = i)$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} P(N_i \geq k-1 \mid X_0 = i)\, f_i(m)$$

$$= P(N_i \geq k-1 \mid X_0 = i) \sum_{m=1}^{+\infty} f_i(m)$$

$$= P(N_i \geq k-1 \mid X_0 = i)\, f_i$$

$$= P(N_i \geq k-2 \mid X_0 = i)\, f_i \cdot f_i$$

Como

$$P(N_i \geq k \mid X_0 = i) = P(N_i \geq k-1 \mid X_0 = i)\, f_i \qquad [1]$$

entonces

$$P(N_i \geq k-1 \mid X_0 = i) = P(N_i \geq k-2 \mid X_0 = i)\, f_i \qquad [2]$$

Sustituyendo [2] en [1]

$$P(N_i \geq k \mid X_0 = i) = P(N_i \geq k-2 \mid X_0 = i)\, f_i^2$$

Luego, repitiendo este proceso

$$P(N_i \geq k \mid X_0 = i) = P(N_i \geq 1 \mid X_0 = i)\, f_i^{k-1} = f_i^k.$$

Definición 1.18 Para $k \geq 2$ sea

$$\tau_y^k = \min\{ n > \tau_y^{k-1} : X_n = y \}$$

entonces τ_y^k es el tiempo del k-ésimo retorno a y.

La propiedad fuerte de Markov implica que

$$P(\tau_y^k < +\infty) = f_y^k$$

↳ $f_y < 1$: Entonces la probabilidad de retornar k veces es f_y^k y $f_y^k \to 0$. Entonces, la C.H. eventualmente no encuentra la manera de regresar a y.

En este caso, el estado y es llamado transitorio.

↳ $f_y = 1$. La probabilidad de retornar k-veces es $f_y^k = 1$. Es decir, la CH retorna infinitas veces a y. En este caso el estado es recurrente

Ejemplo

Clasifique los estados

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

> 0 es recurrente $P(\tau_0 = 1) = 1$, es decir $f_0 = 1$

> 4 es recurrente $P(\tau_0 = 1) = 1$, es decir $f_4 = 1$.

> 1 es transitorio, $p(1,0) = 0.6$

$$P(\tau_1 = +\infty) \geq 0.6 > 0$$

$\therefore f_1 < 1$ Por lo tanto, 1 es transitorio

$$P(\tau_y < +\infty) + P(\tau_y = +\infty) = 1$$

> 2 es transitorio, consideremos la trayectoria 2-1-0. luego

$$P(\tau_2 = +\infty) \geq 0.36$$

> 3 es transitorio.

Teorema 1.19 Si $f_{xy} > 0$ pero $f_{yx} < 1$, entonces x es transitorio.

Demostración

Sea $K = \min\{k : P_{x,y}(k) > 0\}$ el menor número de pasos en los que puedo acceder a y a partir de x.

Es decir, como $f_{xy} > 0$, entonces existe una trayectoria $(x, y_1, y_2, \ldots, y_{K-1}, y)$ tal que

$$p(x, y_1)\, p(y_1, y_2) \cdots p(y_{K-1}, y) > 0$$

luego,

$$P(\tau_x = +\infty) \geq p(x, y_1)\, p(y_1, y_2) \cdots p(y_{K-1}, y)\, \underbrace{P(\tau_{yx} = +\infty)}_{\underbrace{(1 - f_{yx})}_{> 0}} > 0$$

Lema 1.20. Si x es recurrente y $f_{xy} > 0$. Entonces $f_{yx} = 1$

(Corolario del teorema anterior)

Definición 1.21. Un conjunto A es cerrado si es imposible salir de él. Es decir, si $i \in A$ y $j \notin A$, entonces $P_{ij}(n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Definición 1.22. Un conjunto B es irreducible si $\forall i, j \in B$ j es accesible a partir de i.

Teorema 1.23. Si el conjunto C es finito, cerrado e irreducible entonces todos los estados en C son recurrentes.

Lema 1.24 Suponga que $P(\tau_{xy} \leq k) \geq \alpha > 0$ $\forall x \in S$, entonces

$$P(\tau_{xz} > nk) \leq (1 - \alpha)^n$$

Lunes, 12 de diciembre de 2022.

Definición 1.25 - Periodo - El periodo de un estado i es un número entero no negativo denotado por $d(i)$ y definido de la siguiente manera.

$$d(i) = \text{m.c.d}\{n \geq 1 : p_{ii}(n) > 0\}$$

↳ Si $p_{ii}(n) = 0$ para todo $n \geq 1$, entonces $d(i) = 0$

↳ Se dice que i es aperiódico si $d(i) = 1$

↳ Cuando $d(i) = k \geq 2$ se dice que i es periódico con periodo k.

Proposición 1.26. Si los estados i y j pertenecen a la misma clase de comunicación, entonces tienen el mismo periodo.

Demostración
Como i, j están en la misma clase de comunicación, entonces existen enteros $n, m \geq 1$ tales que $p_{ij}(n) > 0$ y $p_{ji}(m) > 0$.
Sea $s \geq 1$ tal que $p_{ii}(s) > 0$ (Por Chapman-Kolmogorov $p_{ii}(n+m) \geq p_{ij}(n) p_{ji}(m) > 0$)
Denotemos $d(i)$ y $d(j)$ a los periodos de i y j respectivamente.

Aplicando Chapman-Kolmogorov al estado j tenemos

$$p_{jj}(n+m+s) \geq p_{ji}(m)\, p_{ii}(s)\, p_{ij}(n) > 0 \quad [1]$$

$$p_{jj}(n+m+2s) \geq p_{ji}(m)\, p_{ii}(2s)\, p_{ij}(n) > 0 \quad [2]$$

Como $d(j)$ es el periodo de j, entonces $d(j)$ divide a $n+m+s$ y divide también a $n+m+2s$. Es decir,

$\exists q \in \mathbb{Z}$ tal que $q\, d(j) = n+m+s$ [3]

$\exists r \in \mathbb{Z}$ tal que $r\, d(j) = n+m+2s$ [4]

Si restamos [4] - [3], entonces $(r-q)d(j) = s$. Es decir, $d(j)$ divide a s. Como $d(i)$ divide a s y es el periodo de i, entonces

$$d(i) \geq d(j)$$

Procediendo de manera análoga con el estado i, se obtiene que

$$d(j) \geq d(i)$$

y por lo tanto $d(i) = d(j)$

Proposición 1.27. Para cada estado i existe un entero N tal que para todo $n \geq N$ se cumple que

$$p_{ii}(n\, d(i)) > 0$$

Proposición 1.28. El estado i es:

a) Recurrente si y solo si $\sum_{n=1}^{+\infty} p_{ii}(n) = +\infty$

b) Transitorio si y solo si $\sum_{n=1}^{+\infty} p_{ii}(n) < +\infty$.

Demostración
Conocemos que

$$N_i = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}}$$

dado que $X_0 = i$, y además $P(N_i \geq k \mid X_0 = i) = f_i^k$

$$\begin{aligned} E[N_i \mid X_0 = i] &= E\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=i\}} \,\Big|\, X_0 = i\right] \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} E[\mathbb{1}_{\{X_n=i\}} \mid X_0 = i] \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_n = i \mid X_0 = i) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_{ii}(n) \end{aligned}$$

Con esto,

$$\begin{aligned} E[N_i \mid X_0 = i] &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\, P(N_i = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(N_i \geq k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} f_i^k = \begin{cases} \dfrac{f_i}{1-f_i} & \text{si } f_i < 1 \\ +\infty & \text{si } f_i = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Para un paseo aleatorio simple simétrico

$$p_{ii}(n) = \binom{n}{n/2} \frac{1}{2^n} \quad \text{si } p = q$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_{ii}(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{n/2} \frac{1}{2^n} \overset{?}{=} +\infty$$ ← Debes

Proposición (1.29) a) Si i es recurrente y $j \leftrightarrow i$, entonces j es recurrente

b) Si i es transitorio y $j \leftrightarrow i$, entonces j es transitorio

Proposición 1.30. Sea j un estado transitorio. Para cualquier estado inicial i, se cumple que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_{ij}(n) < +\infty$$

En consecuencia $p_{ij}(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Demostración

Recordemos que

$$p_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}(k)\, p_{jj}(n-k)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} p_{ij}(n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}(n-k)\, p_{jj}(k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} f_{ij}(n-k)\, p_{jj}(k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} f_{ij}(m)\, p_{jj}(k) \\
&= f_{ij} \sum_{k=0}^{+\infty} p_{jj}(k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} p_{jj}(k) < +\infty.
\end{aligned}$$

Definición 1.31 El tiempo medio de recurrencia de un estado recurrente j a partir del estado i, μ_{ij}, se define como

$$\mu_{ij} = E[\tau_{ij}] = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, f_{ij}(n)$$

Ahora, definamos $N_{ij}(n)$ como

$$N_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k = j\}} \quad \text{cuando } X_0 = i$$

$N_{ij}(n)$ converge casi-seguramente a

$$N_{ij} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_k = j\}} \quad \text{cuando } X_0 = i$$

Proposición 1.32.

$$P(N_{ij} \geq k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ f_{ij}\, f_j^{k-1} & k \geq 1. \end{cases}$$

Demostración (Partimos de la segunda-tercera linea) (Ver demostración anterior)

$$\begin{aligned}
P(N_{ij} \geq k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} f_{ij}(n)\, P(N_j \geq k-1) \\
&= f_{ij}\, P(N_j \geq k-1) \\
&= f_{ij}\, f_j^{k-1}
\end{aligned}$$

Martes, 13 de Noviembre de 2022. (Clase de ejercicios)

Pueba 1 - Corrección

Pregunta 1.

$$P = \begin{array}{c|cc} & S & N \\ \hline S & 0.75 & 0.25 \\ N & 0.08 & 0.92 \end{array} \qquad P(X_0 = S) = 0.3 \qquad P(X_0 = N) = 0.30$$

$n = 3$

$$P(X_n = j) = \sum_i p_i \, P_{ij}(n) \qquad P^3 = \begin{array}{c|cc} & S & N \\ \hline S & 0.47 & 0.52 \\ N & 0.17 & 0.87 \end{array}$$

Pregunta 2.

Forma 1.

$X_n :=$ La mayor cadena de caras hasta el n-ésimo intento.

$n =$	1	2	3	4	5
$Y_n =$	S	S	C	C	S
$X_n =$	0	0	1	2	0

Sí es cadena de Markov.

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$C(0) = C(1) = C(2) = \{0, 1, 2\} \qquad C(3) = \{3\}$

Forma 2.

$n =$	1	2	3	4	5
$Y_n =$	S	S	C	C	S
$X_n =$	0	0	1	2	2

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n & Y_{n+1} = S \\ \max(X_n, 1) & Y_{n+1} = C \\ \max(X_n, 2) & Y_n = S \\ \vdots \end{cases} \qquad P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \end{array}$$

Problema 1.

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 2 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 3 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{array}$$

Clasifique los estados.

$C(1) = \{1, 2, 3\} = C(2) = C(3)$

Por tanto todos los estados tienen la misma clasificación

$P(\tau_1 = +\infty) + P(\tau_1 < +\infty) = 1$ Pero $P(\tau_1 = 1) = 0.7$, luego $P(\tau_1 = +\infty) = 0$

$$\therefore P(\tau_1 < +\infty) = 1 = f_1$$

$\Rightarrow 1$ es recurrente.

Aplicando el teorema 1.23 se tiene el resultado

$$P_x(\tau_y \leq k) \geq \alpha > 0 \quad \forall x \in S \quad \Rightarrow P_x(\tau_y > nk) \leq (1-\alpha)^n$$

$$P(\tau_{x_1} = 1) \geq 0.2 \quad \Rightarrow P(\tau_{x_1} > n) \leq (0.8)^n$$

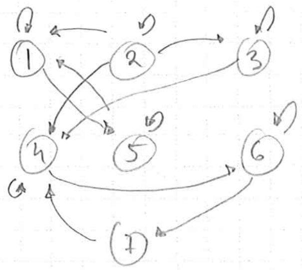
$$\therefore P(\tau_{x_1} > n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Problema 2. Considere la matriz de transición

$$\begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 2 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 5 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

c) ¿Qué conjuntos son cerrados?

- $C(1) = \{1, 5\}$ → Recurrente
- $C(2) = \{2\}$
- $C(3) = \{3\}$
- $C(4) = \{4, 6, 7\}$ → Recurrente



- $A = \{4, 6, 7\}$
- $B = \{1, 5\}$
- S
- $C = \{1,5\} \cup \{4,6,7\} = \{1, 5, 4, 6, 7\}$
- $D = \{3, 4, 6, 7\}$

> $P(\overset{>0}{\cancel{Z_1 = +\infty}}) + P(Z_1 < +\infty) = 1$ Pero $(Z_1 = 1) = 0.3$

$P(Z_1 < +\infty) = 1$ ⇒ 1 y 5 son recurrentes

$$f_2 = f_{22} \sum_{n \geq 1} f_{22}(n) = \underset{\downarrow \atop 0.2}{f_{22}(1)} + \cancel{f_{22}(2)}^{>0} + \cancel{f_{22}(3)}^{>0} + \cdots$$

$\Rightarrow f_2 = 0.2 < 1$

Otra forma, notemos que $f_{21} \geq f_{21}(1) = P_{21}(1) = 0.1 > 0$ y $f_{12} = 0 < 1$ ∴ 2 es transitorio

Análogamente, 3 es transitorio.

Lunes, 19 de diciembre de 2022.

$$P(N_{ij} = k) = P(N_{ij} \geq k) - P(N_{ij} \geq k+1) \qquad \text{Si } k \geq 1$$
$$= f_{ij} f_j^{k-1} - f_{ij} f_j^{k}$$
$$= f_{ij} (f_j^{k-1} - f_j^{k})$$
$$= f_{ij} f_j^{k-1} (1 - f_j)$$

Luego,

$$[*] \quad P(N_{ij} = k) = \begin{cases} 1 - f_{ij} & \text{si } k = 0 \\ f_{ij} f_j^{k-1} (1 - f_j) & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

$$P(N_{ij} < +\infty) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ es transitorio} \\ 1 - f_{ij} & \text{si } j \text{ es recurrente} \end{cases}$$

$$P(N_{ij} = +\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ es transitorio} \\ f_{ij} & \text{si } j \text{ es recurrente} \end{cases}$$

$$P(N_{ij} < +\infty) + P(N_{ij} = +\infty) = 1.$$

$$P(N_{ij} < +\infty) = 1 - P(N_{ij} = +\infty)$$

$$P(N_{ij} = +\infty) = \lim_{k \to +\infty} P(N_{ij} \geq k)$$
$$= \lim_{k \to +\infty} f_{ij} f_j^{k}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ es transitorio} \\ f_{ij} & \text{si } j \text{ es recurrente} \end{cases}$$

$$E[N_{ij}] = \sum_{k \in \mathbb{N}} k P(N_{ij} = k)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} P(N_{ij} \geq k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_{ij} f_j^{k-1}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } f_{ij} = 0 \\ \frac{f_{ij}}{1-f_i} & \text{si } f_{ij} \neq 0, \; f_i < 1 \\ +\infty & \text{si } f_{ij} \neq 0, \; f_i = 1 \end{cases}$$

- $f_{ij} = 0$

  $P(N_{ij} = 0) = 1$

- $f_{ij} > 0, \; f_j = 1$

  $P(N_{ij} = 0) = 1 - f_{ij}$

  $P(N_{ij} = +\infty) = f_{ij}$

- $f_{ij} > 0, \; f_j < 1$

Entonces N_{ij} se distribuye sobre valores finitos de acuerdo a [*]

Ver páginas 58 - 60 [1]

Teorema 1.33 - Teorema ergódico para cadenas de Markov.
Para cualesquier estados i, j de una C.M irreducible se tiene que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{N_{ij}(n)}{n} = \frac{1}{\mu_j} \quad \text{c.s.}$$

Si j es transitorio $\mu_j = +\infty$

siendo este límite cero cuando $\mu_j = +\infty$

si j es recurrente $\mu_j < +\infty$ o $\mu_j = +\infty$

Este teorema nos dice que los promedios espaciales son iguales a los tiempos promedio (promedios temporales)

Demostración

Si j es transitorio entonces ambos lados de la igualdad se anulan. Veamos lo que sucede cuando j es recurrente

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{N_{ij}(n)}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{N_{ij}(\tau_{ij} + n)}{\tau_{ij} + n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1 + N_{jj}(n)}{n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{N_{jj}(n)}{n} \cdot \frac{n}{\tau_{ij} + n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{N_{jj}(n)}{n}$$

Ahora, definimos $Y(k)$ a la v.a. que registra el número de pasos entre la $k-1$ ésima visita y la k-ésima visita a j.

Luego

$$\frac{Y(1) + Y(2) + \cdots + Y(N_j(n))}{N_j(n)} \xrightarrow{c.s.} \mu_j$$

Por la ley de los grandes números y por que $N_j(n) \to +\infty$ acorde $n \to +\infty$

Se tiene entonces que

$$\underbrace{\frac{Y(1) + Y(2) + \cdots + Y(N_j(n))}{N_j(n)}}_{\xrightarrow{c.s} \mu_j} \leq \frac{n}{N_j(n)} \leq \overbrace{\frac{Y(1) + Y(2) + \cdots + Y(N_j(n))}{N_j(n)}}^{\xrightarrow{c.s.} \mu_j}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{N_j(n)}{n} = \frac{1}{\mu_j}$$

Tiempo promedio que la CH está en j.

Tomando la esperanza, por convergencia dominada y para una cadena irreducible se tiene que

$$\frac{1}{\mu_j} = E\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} N_{ij}(n)\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} E[N_{ij}(n)] = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}(k)$$

Definición 1.34 Se dice que un estado recurrente i es

a) recurrente positivo si $\mu_i < +\infty$
b) recurrente nulo si $\mu_i = +\infty$

Proposición 1.35 Sea i un estado recurrente. Entonces

a) Si i es recurrente positivo, $i \leftrightarrow j \Rightarrow j$ es recurrente positivo
b) Si i es recurrente nulo, $i \leftrightarrow j$, $\Rightarrow j$ es recurrente nulo.

Sección: Distribución límite de una Cadena de Markov

Consideremos $S = \{0, 1, \dots, n\}$ y una distribución inicial $\pi^0 = (\pi_0^0, \pi_1^0, \dots, \pi_n^0)$ donde $\pi_j^0 = P(X_0 = j)$

Después de transcurrido un primer paso, la C.M. se encuentra en cualquiera de los estados de acuerdo a la distribución de probabilidad π'

$\pi' = (\pi_0', \pi_1', \dots, \pi_n')$ donde $\pi_j' = P(X_1 = j)$

Luego

$$\pi_j' = P(X_1 = j) = \sum_{i=0}^{n} \pi_i^0 p_{ij}$$

en forma matricial:

$$(\pi_0', \pi_1', \dots, \pi_n') = (\pi_0^0, \pi_1^0, \dots, \pi_n^0)\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ p_{n0} & p_{n1} & & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Con esto:

$$\pi' = \pi^0 P$$
$$\pi^2 = \pi^0 P^2 = \pi^0 P P = \pi' P$$
$$\pi^3 = \pi^0 P^3 = \pi^2 P$$
$$\vdots$$
$$\pi^m = \pi^0 P^m = \pi^{m-1} P$$

Ejemplo:
Considere $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\pi^0 = (\alpha, 1-\alpha)$ con $0 \le \alpha \le 1$.

$\pi^1 = (1-\alpha, \alpha)$
$\pi^2 = (\alpha, 1-\alpha)$
$\pi^3 = (1-\alpha, \alpha)$

Las distribuciones tienen comportamiento oscilatorio.

Martes, 20 de diciembre de 2022 (Clase de ejercicios)

Ejercicio 1.

Considere

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} a \neq 1-b \\ 0 < a, b < 1 \end{array}$$

a) Calcule la probabilidad de un eventual retorno a cero dado que $X_0 = 0$

b) Clasifique sus estados

c) ¿Cual es el tiempo medio que la cadena de Markov permanece en el cero?

a)

$$f_{00} = \sum_{n\geq 1} f_{00}(n)$$

$$= \sum_{n\geq 1} P(\tau_{00} = n)$$

$$= \sum_{n\geq 1} P(X_n = 0\ X_{n-1} \neq 0, \ldots, X_1 \neq 0 \mid X_0 = 0)$$

$$= \sum_{n\geq 1} P(X_n = 0, X_{n-1} = 1, \ldots, X_1 = 1 \mid X_0 = 0)$$

$$= \sum_{n\geq 1} P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = 1, \ldots, X_1 = 1, X_0 = 0)\, P(X_{n-1} = 1, \ldots, 1$$

Notemos que

$$f_{00}(1) = 1-a$$
$$f_{00}(2) = a\cdot b(1-b)^0$$
$$f_{00}(3) = a\cdot b(1-b)$$
$$f_{00}(4) = a\cdot b(1-b)^2$$
$$\vdots$$
$$f_{00}(n) = a\cdot b(1-b)^{n-2}$$

$$f_{00} = \sum_{n\geq 1} f_{00}(n)$$

$$= \sum_{n\geq 2} f_{00}(n) + (1-a)$$

$$= \sum_{n\geq 2} a\cdot b(1-b)^{n-2} + (1-a)$$

$$= a\cdot b \sum_{n\geq 2} (1-b)^{n-2} + (1-a)$$

$$= a\cdot b \sum_{k\geq 0} (1-b)^k + (1-a)$$

$$= a b \left(1 + \sum_{k\geq \phi} (1-b)^k\right) + (1-a)$$

$$= ab\left(1 + \frac{1-b}{b}\right) + (1-a) = ab + a - ba + 1 - a = 1$$

Por lo tanto

$$f_{00} = 1$$

b) $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}(1) = \{0,1\}$. Así, como es cerrada, finita e irreducible, todos sus estados son recurrentes

c) $\frac{1}{\mu_0}$ Ahora

$$\mu_{jj} = \sum_{n\geq 1} n f_{jj}(n) = (1-a) + \sum_{n\geq 2} n\cdot a\cdot b(1-b)^{n-2} = (1-a) + a\cdot b \sum_{n\geq 2} n(1-b)^{n-2}$$

$$= (1-a) + a.b \sum_{k\geq 2} k(1-b)^{k-2} = (1-a) + a\cdot b \cdot \frac{b+1}{b^2}$$

$$= 1-a + \frac{ab+a}{b} = \frac{b+a}{b}$$

Con esto, se tiene que

$$\frac{1}{\mu_0} = \frac{b}{b+a}.$$

Ejercicio 2. Demuestre que toda cadena de Markov finita tiene por lo menos un estado recurrente

Considere la cadena $\{X_n\}_{n=1}^{m}$.

Supongamos que todos los estados de la cadena son transitorios. Así, para todo i,j

$$\sum_{n\geq 1} p_{ij}(n) < +\infty.$$

Luego

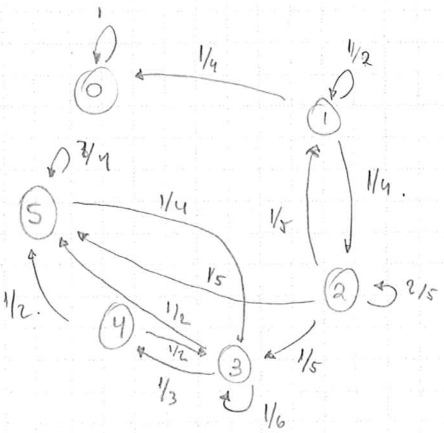
$$\sum_{j} \sum_{n\geq 1} p_{ij}(n) < +\infty.$$

es finita pues es la suma finita de valores finitos. Por otro lado

$$\sum_{n\geq 1} \sum_{j} p_{ij}(n) = \sum_{n\geq 1} 1 = +\infty.$$

Ejercicio 3. Clasifique los estados

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array}$$



$C(0) = \{0\}$ $\quad C(1) = C(2) = \{1, 2\}$

$C(5) = C(4) = C(3) = \{3, 4, 5\}$

* Para el estado 0.

$$\sum_{n\geq 1} P_{00}(n) = \sum_{n\geq 1} 1 = +\infty.$$

Es estado absorvente y por lo tanto, recurrente.

* Para C(5).

Cerrado ✓
finito ✓
irreducible ✓

* C(1)

$f_{25} > 0$ y $f_{52} < 1 \Rightarrow$ transitorio

$$f_{25} = \sum_{n\geq 1} f_{25}(n) \geq f_{25}(1) = P_{25}(1) = 1/5$$

$$f_{52} = 0 < 1$$

Ejercicio 4

Muestre que si j es absorvente, entonces

$$p_{ij}(n) = P(\tau_{ij} \leq n)$$

Como j es absorbente

$$p_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}(k) \overset{1}{\cancel{p_{jj}(n-k)}} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}(k) = \sum_{k=1}^{n} P(\tau_{ij} = n) = P(\tau_{ij} \leq n)$$

Definición Una variable aleatoria τ en $\mathbb{N}$ es un tiempo de paro respecto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$ si

$$(\tau \leq n) \in \mathcal{F}_n$$

Ejercicios extra

Problema 1. Dada la matriz de probabilidad de transición de una cadena de Markov de 3 estados

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentre la matriz de probabilidad de transición a n pasos, $P^{(n)}$ para $n \geq 1$.

Notemos que

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

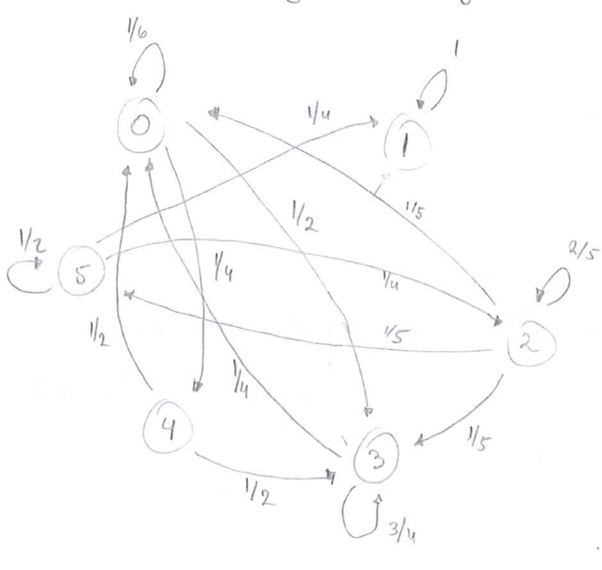
Luego, tenemos que

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & & \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2. La siguiente es la matriz de transición de una cadena de Markov de 6 estados numerados de 0 a 5

$$\begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 1/6 & 0 & 0 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1/5 & 0 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 3 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}$$

Consideremos el siguiente diagrama



Con esto tenemos las siguientes clases de equivalencia

$C(0) = \{0, 3, 4\}$ finito cerrado irreducible $\Rightarrow$ todos sus estados son recurrentes

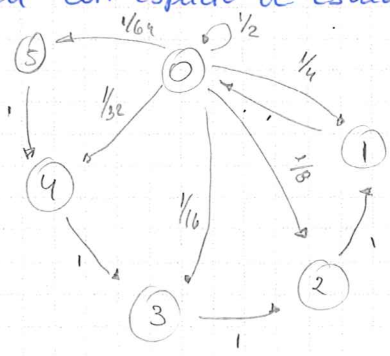
$C(5) = \{2, 5\}$ finito no es cerrado irreducible

$C(1) = \{1\}$ finito cerrado irreducible $\Rightarrow$ todos sus estados son recurrentes por ser absorbente

Analicemos 5, notemos que $f_{51} > 0$ y $f_{15} < 1$. Por lo tanto 5 es transitorio y 2 también

Problema 3. Clasifique los estados de la CH homogenea con espacio de estados $S = \mathbb{N}_0$ dada por la matriz de transición

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$



Consideremos la siguiente simplificación del diagrama

Luego, tenemos los estados .

$C(0) = C(1) = \cdots = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Notemos que

$P(\tau_0 = +\infty) + P(\tau_0 < +\infty) = 1$ Pero $P(\tau_{00} = 1) = 1/2$, luego $P(\tau_0 = +\infty) = 0$.

$\therefore P(\tau_0 < +\infty) = 1$.

Luego, todos sus estados son recurrentes

Problema 4. Muestre que toda cadena de Markov finita tiene por lo menos un estado recurrente.

Demostración Por contradicción, supongamos que todos sus estados son transitorios. Entonces para todo i, j, se tiene que

$$\sum_{n\geq 1} p_{ij}(n) < +\infty$$

Luego, se sigue que como la cadena es finita, entonces sus estados son finitos y más aún

$$\sum_{j} \sum_{n\geq 1} p_{ij}(n) < +\infty.$$

Por otro lado,

$$\sum_{j} p_{ij}(n) = 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \sum_{j} p_{ij}(n) = \sum_{n\geq 1} 1 = +\infty$$

lo que no es posible. Así, toda cadena de Markov tiene por lo menos un estado recurrente.

Problema 5. Muestre que toda colección de estados que es cerrada e irreducible es una clase de comunicación.

Demostración Sea $\mathscr{C}$ una colección no vacía de estados que es irreducible y cerrada, y sea $i \in \mathscr{C}$. Luego $\mathscr{C} \subseteq C(i)$ pues como $\mathscr{C}$ es irreducible, todos sus estados se comunican y más aún deben permanecer en la misma clase de comunicación.

Por otro lado, como $\mathscr{C}$ es cerrada, entonces no existe $j \in C(i)$ tal que $j \notin \mathscr{C}$ pues contradice el hecho de que $\mathscr{C}$ es cerrada por definición.

Problema 6. Muestre que toda clase de comunicación recurrente es cerrada.

Demostración Sea $\mathcal{C}$ una clase de comunicación recurrente. Vamos a probar que $\mathcal{C}$ es cerrada. Por absurdo, supongamos que no es cerrada, así existen $i \in \mathcal{C}$ y $j \notin \mathcal{C}$ tales que $i \to j$. Ahora, como $i \in \mathcal{C}$, i es recurrente y por lo tanto $j \to i$. Con esto, j pertenece a la clase de comunicación y más aún $j \in \mathcal{C}$ lo que no es posible.

Problema 7 Muestre que no existen estados recurrentes nulos en cadenas de Markov finitas.

Demostración

Sea j un estado recurrente y C su clase de comunicación. La clase C es cerrada y finita pues toda la cadena lo es. Vamos a probar que $\mu_j < +\infty$. Así, se tiene que por ser un proceso a tiempo discreto, para todo $j \in C$ y $k \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{j} p_{ij}(k) = 1$$

Luego, se sigue que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in C} p_{ij}(k) = \sum_{j \in C} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}(k) = 1$$

Así, tomando el límite, como

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}(k) = \frac{1}{\mu_j}$$

entonces

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in C} p_{ij}(k) = \sum_{j \in C} \frac{1}{\mu_j} = 1$$

luego debe existir $\hat{j} \in C$ tal que $\mu_{\hat{j}} < +\infty$. Así, j es recurrente no nulo y toda su clase de comunicación lo es.

Problema 8 Muestre que la unión de dos clases cerradas es una clase cerrada.

Demostración Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos clases cerradas. Consideremos

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$$

Sean $i \in \mathcal{C}$ y $j \notin \mathcal{C}$. Como $i \in \mathcal{C}$, entonces sin pérdida de generalidad $i \in \mathcal{C}_1$, luego $j \notin \mathcal{C}_1$ y como $\mathcal{C}_1$ es cerrado $i \not\to j$. Así, $\mathcal{C}$ es cerrada.

Martes, 3 de enero de 2023.

Distribución Límite

$$\pi^m = \pi^{m-1} P = \pi^0 P^m$$

$$\pi^0 = (\alpha, 1-\alpha)$$
$$\pi^1 = (1-\alpha, \alpha)$$
$$\pi^2 = (\alpha, 1-\alpha)$$
$$\vdots$$

$$\lim_{n \to +\infty} \pi^n = \pi$$

Distribución Estacionaria.

Definición 1.36. - Distribución estacionaria-
Una distribución $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ es invariante o estacionaria para una CM. con matriz de transición $P = (p_{ij})$ si

$$\pi_j = \sum_{i} \pi_i p_{ij} \quad \text{y} \quad \pi = \pi P \quad \left(\text{más aún} \quad \pi = \pi P^m \right)$$

Para que π sea una distribución se requiere que

$$\sum_{j} \pi_j = 1.$$

Observación Si π es estacionario para P, entonces también será estacionaria para P^n con $n \in \mathbb{N}$, es decir

$$\pi = \pi P^n$$

Esto implica que si X_0 tiene distribución π, entonces la distribución de X_n también será π pues:

$$P(X_n = j) = \sum_i{}' \pi_i p_{ij}(n) = \pi_j$$

Es decir, la distribución no cambia con el pasar del tiempo.

Proposición 1.37. Sea π una distribución estacionaria para una CM. Si j es un estado transitorio o recurrente nulo, entonces $\pi_j = 0$.

Demostración:

Recordemos que si j es un estado transitorio o recurrente no nulo, entonces

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n}{}' p_{ij}(k) = 0$$

Como π es una distribución estacionaria, entonces

$$\pi_j = \sum_i{}' \pi_i p_{ij}$$

$$= \sum_i{}' \pi_i p_{ij}(k)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n}{}' \sum_i{}' \pi_i p_{ij}(k)$$

$$= \sum_i{}' \pi_i \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n}{}' p_{ij}(k) \right)$$

Tomando el límite cuando $n \to +\infty$, entonces

$$\pi_j = \sum_i{}' \left(\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n}{}' p_{ij}(k) \right) = 0$$

Como consecuencia de esta proposición, si $\pi_j > 0$, entonces j es un estado recurrente positivo.

Proposición 1.38. Toda CM irreducible y recurrente positiva tiene una única distribución estacionaria dada por

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j}$$

(Tenemos que $\mu_j < +\infty$ $\forall j \in S$. Por lo tanto, $1/\mu_j < +\infty$) [1]

Demostración

a) P.D. $\pi = \pi P$

$$\hookrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n}{}' p_{ij}(m) = \frac{1}{\mu_j} = \pi_j \qquad [2]$$

P.D $\pi_j = \sum_i{}' \pi_j p_{ij}$

Consideremos un $N \in \mathbb{N}_0$, así

$$\sum_{i=0}^{N}{}' \pi_i p_{ij} = \sum_{i=0}^{N}{}' \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n}{}' p_{ki}(m) \right) p_{ij} \qquad [2]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n}{}' \sum_{i=0}^{N}{}' p_{ki}(m) p_{ij}$$

$$\leq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n}{}' p_{kj}(m+1)$$

$$= \pi_j$$

Haciendo $N \to +\infty$, se sigue que

$$\sum_i' \pi_i p_{ij} \leq \pi_j \qquad [3]$$

Supongamos que existe un j para el cual se cumple la desigualdad estricta en (3). Sumando sobre todos los j tenemos que

$$\sum_j' \pi_j > \sum_j' \sum_i' \pi_i p_{ij}$$

$$= \sum_i' \pi_i \underbrace{\sum_j' p_{ij}}_{=1} = \sum_i' \pi_i \cdot 1 = \sum_i' \pi_i \implies \sum' \pi_i < \sum_i' \pi_i \implies\!\Leftarrow$$

Por lo tanto,

$$\therefore \sum_i' \pi_i p_{ij} = \pi_i \qquad [4]$$

P.D. $\sum_i' \pi_i = 1$

Consideremos cualquier $N \in \mathbb{N}$, luego

$$\sum_{j=0}^{N} \pi_j = \sum_{j=0}^{N}{}' \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n}{}' p_{ij}(m) \right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n}{}' \sum_{j=0}^{N}{}' p_{ij}(m)$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n}{}' 1. = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1.$$

$$\therefore \sum_{j=0}^{N}{}' \pi_j \leq 1 \qquad [5]$$

De [4] encontramos que π es estacionaria para P Por lo que π también es estacionario para P^n para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir,

$$\pi = \pi P^n$$

$$\pi_j = \sum_i' \pi_i p_{ij}(n) \qquad [6]$$

Así, de [6]

$$\pi_j = \sum_i' \pi_i \left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n}{}' p_{ij}(m) \right) \qquad [7]$$

Haciendo que $m \to +\infty$, se tiene que

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty}{}' \pi_i \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n}{}' p_{ij}(m) \right) \quad \leftarrow \text{(Convergencia dominada)}$$

$$= \sum_i' \pi_i \pi_j \,.$$

Luego, como $\pi_j > 0$, entonces

$$\sum_i' \pi_i = 1$$

P.D π es única

Suponga que existen dos distribuciones estacionarias para P; π y π'. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\pi_j' = \sum_i' \pi_i' \left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n}{}' p_{ij}(m) \right)$$

$$\geq \sum_{i=0}^{N} \pi_i' \left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n}{}' p_{ij}(m) \right).$$

luego, si $n \to +\infty$

$$\pi_j' \geq \sum_{i=0}^{N} \pi_i' \pi_j \qquad [8]$$

Ahora, si $N \to +\infty$ entonces

$$\pi_j' \geq \pi_j \qquad [9]$$

si para algún $j \in S$ existe la desigualdad estricta en [9], entonces

$$1 = \sum_j \pi_j' > \sum_j \pi_j = 1 \qquad \Rightarrow \Leftarrow$$

$$\therefore \pi_j' = \pi_j$$

Supongamos que existe

$$\pi = \lim_{n \to +\infty} \pi^n \qquad y \qquad \pi^n = \pi^{n-1} P = \pi^0 P^n$$

Así se tendría que

$$\lim_{n \to +\infty} \pi^n = \lim_{n \to +\infty} \pi^{n-1} P$$

La distribución inicial no influye en la distribución límite

$$\pi = \lim_{n \to +\infty} \pi^n = \pi^0 \lim_{n \to +\infty} P^n$$

Definición 1.39. Considere una CH con matriz P y distribución inicial π^0. Se llama distribución límite al vector

$$\pi = \lim_{n \to +\infty} \pi^0 P^n = \lim_{n \to +\infty} \sum_i \pi_i^0 p_{ij}(n)$$

Miercoles, 4 de enero de 2023. (Clase de ejercicios)

Ejercicio 1. Considere la CH de dos estados

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1-a & a \\ 1 & b & 1-b \end{array} \qquad \text{con } 0 \leq a, b \leq 1 \quad y \quad a \neq 1-b$$

Encuentre la distribución estacionaria

$$\pi^0 = (1-a, b)$$

$$\pi^1 = (1-a, b) \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} = \left((1-a)^2 + b^2 \quad (1-a)a + (1-b)b \right)$$

$$\pi^2 = \left((1-a)^2 + b^2 \quad (1-a)a + (1-b)b \right) \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} = \left((1-a)^3 \right.$$

$$\pi = \pi P \qquad\qquad Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} - I \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -a\alpha_1 + a\alpha_2 = 0 \\ b\alpha_1 - b\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a\alpha_1 + a\alpha_2 = 0 \\ b\alpha_1 - b\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$\alpha_2 = \alpha_1$

$$\rightarrow \frac{ba}{a}\alpha_1 + \frac{ba}{a}\alpha_2 = 0$$

$$\rightarrow -b\alpha_1 + b\alpha_2 = 0$$

$$b\alpha_1 - b\alpha_2 = 0$$

$$\overline{0 \qquad 0 \quad = 0.}$$

$$\mu_0 = \frac{a+b}{b} \qquad \mu_1 = \frac{a+b}{b}$$

$$\pi = (\mu_0, \mu_1) = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right)$$

Ejercicio 2.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Sea $\pi = (x, y, z)$ tal que $\pi = \pi P$.
¿Cuál es la distribución estacionaria si $x = 1$?

Luego, $\pi = (1, y, z)$ Así

$$\pi_1 = \pi^0 P = (1, y, z)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (y/6 \quad 1 + y/2 + 2z/3 \quad y/3 + z/3)$$

$$\pi_2 = \pi^1 P = (y/6 \quad 1 + y/2 + 2z/3 \quad y/3 + z/3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \left(1/6\,(1 + y/2 + 2z/3),\right.$$

$$(1, 0, 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (0 \quad 1 \quad 0)$$

$$(0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (1/6 \quad 1/2 \quad 1/3)$$

$$(1/6 \quad 1/2 \quad 1/3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (1/12 \quad 1/6 + 1/4 + 2/9 \quad 1/6 + 1/9)$$

$$\pi P = \pi \iff \pi P - \pi = 0$$

$$x = 1, \quad y = 6, \quad z = 3.$$

Ejercicio 3

$$\begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

Encuentre la distribución ~~conte~~ estacionaria condensada en cada conjunto irreducible cerrado

- Para $C(0)$

$$\pi = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

- Para $C(1)$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $C(5)$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\pi = \left(0, 0, 0, \tfrac{1}{14}, \tfrac{1}{12}, \tfrac{2}{3}\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\pi_3}{6} + \dfrac{\pi_4}{2} + \dfrac{\pi_5}{4} = \pi_3 \\ \dfrac{\pi_3}{3} = \pi_4 \\ \dfrac{\pi_3}{2} + \dfrac{\pi_4}{2} + \dfrac{3}{4}\pi_5 = \pi_5 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

Jueves, 5 de enero de 2023.

Proposición 1.40. Considere una cadena de Markov con probabilidad de transición p_{ij} tales que los límites $\pi_j = \lim_{n\to+\infty} p_{ij}(n)$ existen $\forall j$ y no dependen de i.

Entonces

a) $\sum_j \pi_j \leq 1$ (Si S es finito se cumple la igualdad)

b) $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$

Teorema 1.41. Considere una C.M. irreducible, aperiódica y con distribución estacionaria π. Entonces para todo i, j

Ver [1] Pág 83

$$\lim_{n\to+\infty} p_{ij}(n) = \pi_j.$$

Teorema 1.42. Considere una cadena de Markov irreducible, recurrente positiva y aperiódica. Entonces las probabilidades límites

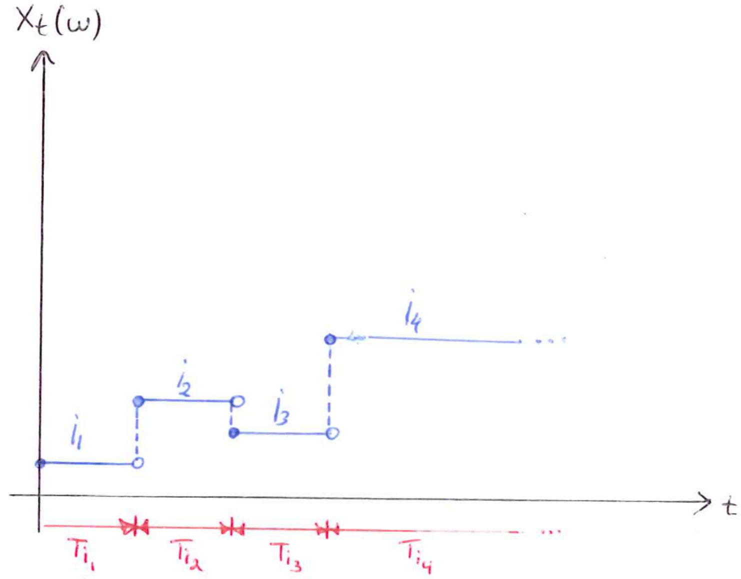
Respecto a la proposición 1.38 la aperiodicidad nos da la unicidad.

$$\pi_j = \lim_{n\to+\infty} p_{ij}(n)$$

existen y están dadas por $\pi_j = 1/\mu_j$ y constituyen una solución única al sistema de ecuaciones

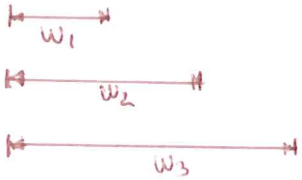
$$\pi = \pi P \quad \text{s.a.} \quad \sum_j \pi_j = 1 \quad \pi_j \geq 0$$

Capítulo 2: Procesos Markovianos a tiempo continuo.



↑ tiempo de estancia

tiempo entre arrivos.



En general $W_n = T_{i_1} + \cdots + T_{i_n}$

Ahora vamos a considerar cadenas de Markov donde el tiempo es continuo y las variables toman valores enteros.

El proceso ahora incluye un tiempo aleatorio T_{ij}

$$P(t) \neq P$$

P ← Probabilidad de salto en cualquier momento

$P(t)$ ↑ Probabilidad de salto sujeto al tiempo t.

Para que el proceso sea Markoviano, se tiene que

$$T_i \sim exp(\lambda_i)$$

En el gráfico, los tiempos aleatorios T son los tiempos en los que el proceso permanece constante en alguno de sus estados y se llaman tiempos de estancia (tiempos de interarrivo, tiempos entre eventos)

Los momentos en los que el proceso tiene saltos son los tiempos $W_n = T_{i_1} + \cdots + T_{i_n}$ para $n \geq 1$. Entonces el proceso $\{X_t : t \geq 0\}$ puede escribirse como sigue

$$X_t = \begin{cases} i_1 & 0 \leq t < W_1 \\ i_2 & W_1 \leq t < W_2 \\ i_3 & W_2 \leq t < W_3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Para este proceso, imponemos las siguientes condiciones

① $\lim_{n \to +\infty} W_n = +\infty$ c.s. | Caso contrario existe la posibilidad de realizar infinitos saltos en un intervalo de tiempo acotado.

② $T_i \sim exp(\lambda_i)$ Para que sea Markoviano

③ T_i es finita o infinita con probabilidad 1. | Si $T_i < +\infty$, i no es absorbente, caso contrario i es absorvente.

Vamos a denotar por P_{ij} a la probabilidad de que la cadena pase del estado i al estado j al efectuar un salto. Las probabilidades de salto deben satisfacer las siguientes propiedades

a) $P_{ij} \geq 0$

b) $P_{ii} = 0$

c) $\sum_i P_{ij} = 1$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & 0 & P_{12} & \cdots \\ P_{20} & P_{21} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Vamos a considerar que la propiedad de Markov tiene la siguiente forma.

Para cualesquiera tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$

$$P(X_{t_n} \mid X_{t_1}, \ldots, X_{t_{n-1}}) = P(X_{t_n} \mid X_{t_{n-1}})$$

Las probabilidades de transición son homogéneas (estacionarias) en el tiempo.

Es decir, para todo $s, t \geq 0$, se tiene que

$$P(X_{t+s} = j \mid X_s = i) = P(X_t = j \mid X_0 = i) = p_{ij}(t)$$

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Así, se tiene la matriz de probabilidades de transición al tiempo t, que denotaremos por P_t y en ocasiones $P(t)$:

$$P(t) = P_t = (p_{ij}(t)) = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & p_{02}(t) & \cdots \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots \\ p_{20}(t) & p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Algunas propiedades

$$\sum_j p_{ij}(t) \leq 1$$

Es igual a 1 si S es finito

Solución - Clase de ejercicios miércoles 4 de enero de 2023 -

Ejercicio 1. Considere la CH de dos estados

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Encuentre la distribución estacionaria.

Notemos que una distribución estacionaria cumple que

$$\pi = \pi P \iff (\alpha_1 \ \ \alpha_2) = (\alpha_1 \ \ \alpha_2) \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

De esta manera, se sigue que

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1(1-a) + \alpha_2 b \\ \alpha_2 = \alpha_1 a + \alpha_2(1-b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_1 a + \alpha_2 b \\ \alpha_2 = \alpha_1 a + \alpha_2 - \alpha_2 b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 b - \alpha_1 a = 0 \\ \alpha_1 a - \alpha_2 b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 b = \alpha_1 a \\ \alpha_1 a = \alpha_2 b \end{cases}$$

$$\therefore \alpha_2 b = \alpha_1 a \iff \alpha_1 = \alpha_2 \cdot \frac{b}{a}$$

Así, como $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, entonces

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \iff \alpha_2 \cdot \frac{b}{a} + \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2\left(1 + \frac{b}{a}\right) = 1 \Rightarrow \alpha_2\left(\frac{a+b}{a}\right) = 1$$

$$\therefore \alpha_2 = \frac{a}{a+b} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{b}{a+b}$$

Ejercicio 2.

Sea $\pi = (x, y, z)$ tal que $\pi = \pi P$ ¿Cuál es la distribución estacionaria si $x = 1$?

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Notemos que $\pi = (x, y, z) = (1, y, z)$, entonces

$$(1, y, z) = (1, y, z)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \left(y/6 ,\ 1 + y/2 + 2z/3 ,\ y/3 ,\ z/3 \right)$$

Con esto, se sigue que

$$\left| \begin{array}{l} 1 = y/6 \\ y = 1 + y/2 + 2z/3 \\ z = y/3 + z/3 \\ x+y+z=1 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} y = 6 \\ 6 = 1 + 3 + 2z/3 \\ z = 2 + z/3 \\ 1+6+z=1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 6 \\ 2 = 2z/3 \\ 2/3 z = 2 \\ 1+6+z=1 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 6 \\ z = 3 \end{array} \right.$$

Así, $(1,6,3) = \hat{\pi}$ es un vector estacionario, luego para que sea distribución, considerabo

$$\pi = \frac{\hat{\pi}}{10} = \left(\frac{1}{10}, \frac{6}{10}, \frac{3}{10}\right)$$

Con esto, π es una distribución estacionaria.

Ejercicio 3. Considere la matriz de transición P definida por

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Encuentre la distribución estacionaria condensada en cada conjunto irreducible cerrado.

En primer lugar, notemos que los conjuntos cerrados irreducibles son

$\mathcal{C}(0) = \{0\}$

$\mathcal{C}(3) = \{3, 4, 5\}$

Así, para $\mathcal{C}(0)$, tenemos que $\pi = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$. Por otro lado, para $\mathcal{C}(3)$, se tiene que

$$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3) = (\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\alpha_1/6 + \alpha_2/2 + \alpha_3/4 ,\ \alpha_1/3 ,\ \alpha_1/2 + \alpha_2/2 + \alpha_3 \cdot 3/4\right)$$

Con esto, tenemos que

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_1/6 + \alpha_2/2 + \alpha_3/4 \\ \alpha_2 = \alpha_1/3 \\ \alpha_3 = \alpha_1/2 + \alpha_2/2 + \alpha_3 \cdot 3/4 \end{array} \right.$$

$$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3) = (\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$(0\ \ 0\ \ 0) = (\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} - (\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)$$

$$(0\ \ 0\ \ 0) = (\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\left[\begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= (\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\begin{pmatrix} -5/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Resta resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1/6 + \alpha_2/2 + \alpha_3/4 \ ✓ \\ \alpha_2 = \alpha_1/3 \quad (3\alpha_2 = \alpha_1) \ ✓ \\ \alpha_3 = \alpha_1/2 + \alpha_2/2 + \alpha_3 \cdot 3/4 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \ ✓ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1/6 + \alpha_1/6 + \alpha_3/4 \\ \alpha_1 + \alpha_1/3 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_3 = \alpha_1/2 + \alpha_2/2 + \alpha_3 \cdot 3/4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1/3 + \alpha_3/4 \\ 4/3\,\alpha_1 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_3 = \alpha_1/2 + \alpha_2/2 + \alpha_3 \cdot 3/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2/3 \cdot \alpha_1 = \alpha_3/4 \\ 4/3\,\alpha_1 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_3 = \alpha_1/2 + \alpha_2/2 + \alpha_3 \cdot 3/4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_3/2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_3 = \alpha_1/2 + \alpha_2/2 + \alpha_3 \cdot 3/4 \end{cases} \Rightarrow \quad 5/2\ \alpha_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = 2/5$$

Otro camino

$$\begin{cases} 3\alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4\alpha_2 + \alpha_3 = 1. \\ 3\alpha_2 = 3\alpha_2/6 + \alpha_2/2 + \alpha_3/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ 3\alpha_2 = \alpha_2/2 + \alpha_2/2 + \alpha_3/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_2 - \alpha_3/4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ -4\alpha_2 + \alpha_3/2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{3}{2} \cdot \alpha_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = \frac{2}{3}$$

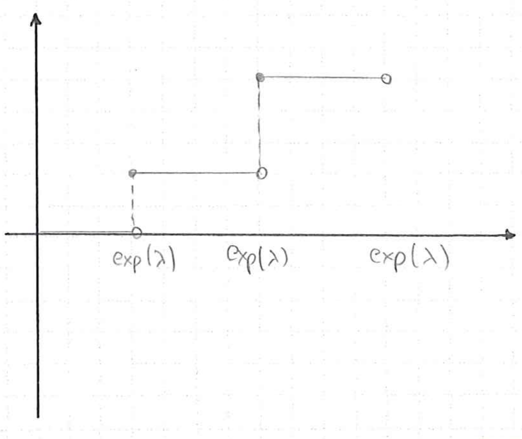
$$4/3\,\alpha_1 + 2/3 = 1 \Rightarrow 4/3\,\alpha_1 = 1/3 \Rightarrow \alpha_1 = 1/4 \quad \Big| \quad \alpha_2 = \frac{1/4}{3} = 1/12$$

Con esto la distribución estacionaria está dada por

$$\hat{\pi} = (1/4,\ 1/12,\ 2/3)$$

$$\Rightarrow \pi = (0,\ 0,\ 0,\ 1/4,\ 1/12,\ 2/3).$$

Martes, 10 de enero de 2023.



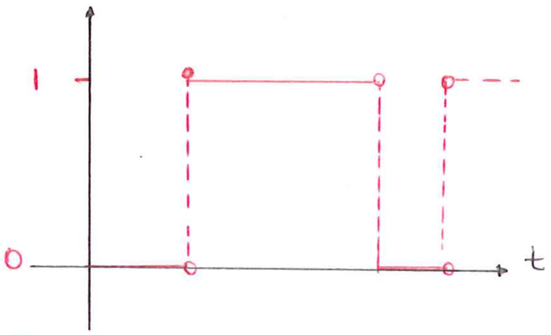
$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{si } j \neq i+1 \end{cases}$$

$X_0 = 0$

$T \sim \exp(\lambda)$

② Si $\{X_t : t \geq 0\}$ $S = \{0, 1\}$

Si el proceso entra al estado cero, permanece en él un tiemo $\exp(\lambda)$ y luego va al estado 1. En 1 permanece un tiempo $\exp(\mu)$ y regresa al cero y así sucesivamente



$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Sistemas de confiabilidad.

Proceso de Poisson. (Homogéneo)

X_t Describe el número de ocurrencias hasta el instante t

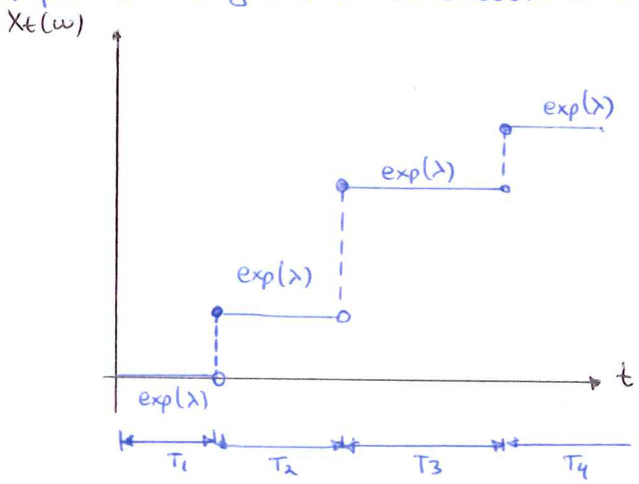
Vamos a considerar que los T_i son independientes, identicamente distribuidos, aunque esto no es estrictamente necesario para que el proceso sea Markoviano

Definición 2.1 Sea $T_1, T_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con distribución $\exp(\lambda)$. El proceso de Poisson de parámetro λ es un proceso Markoviano a tiempo continuo $\{X_t : t \geq 0\}$ de la siguiente manera

$$X_t = \max\{n \geq 1 : T_1 + \cdots + T_n \leq t\}.$$

Vamos a suponer que $X_0 = 0$

Una posible trayectoria se encuentra a continuación



$$W_n = T_1 + \cdots + T_n$$

$$W_n \sim \text{Gama}(n, \lambda)$$

$$\{X_n \geq n\} = \{W_n \leq t\}$$

Proposición 2.2. La variable X_t tiene distribución Poisson con parámetro λt, i.e., $X_t \sim Poi(\lambda t)$. Es decir que, para todo $t > 0$ y $n \in \mathbb{N}_0$

$$P(X_t = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

Demostración

Notemos que para todo $t > 0$

$$P(W_n \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Con esto se sigue que

$$\begin{aligned} P(X_t = n) &= P(X_t \geq n) - P(X_t \geq n+1) \\ &= P(W_n \leq t) - P(W_{n+1} \leq t) \\ &= e^{-\lambda t} (\lambda t)^k / k! \end{aligned}$$

Además, se tiene que

$$E[X_t] = \lambda t \quad y \quad Var(X_t) = \lambda t$$

Por lo tanto, λt es el promedio de observaciones o registros del evento de interés en el intervalo $[0,t]$

Proposición 2.3. Para cualesquiera tiempos $0 \le s < t$ y para $n \in \mathbb{N}_0$, tenemos que

$$P(X_t - X_s = n) = P(X_{t-s} = n)$$
$$= \frac{e^{-\lambda(t-s)}[(t-s)\lambda]^n}{n!}$$

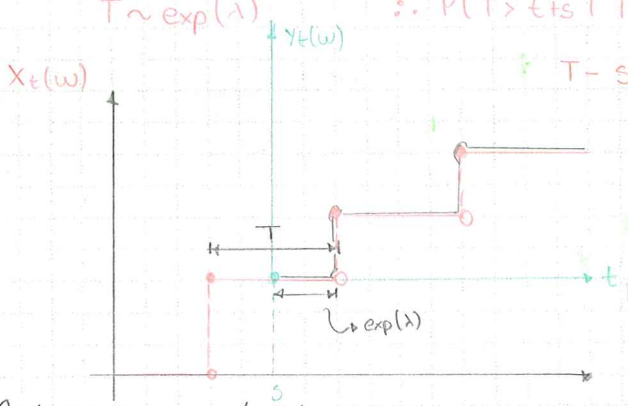
Demostración

$$P(X_t - X_s = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_t - X_s = n \mid X_s = k)P(X_s = k) \quad \text{Por probabilidad total}$$

Propiedad de pérdida de memoria

$T \sim exp(\lambda) \quad \therefore P(T > t+s \mid T > s) = P(T > t)$

$T - s \sim exp(\lambda)$



$Y_t \sim Poi(\lambda t)$

$X_t = 3 \qquad Y_t = 2$
$X_s = 1$
$X_t - X_s = 2$

$Y_t = 2 = X_{t-s}$

Continuando con la demostración

$$P(X_t - X_s = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_t - X_s = n \mid X_s = k)P(X_s = k)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_t - X_s = n)P(X_s = k) \quad \text{[Propiedad de pérdida de memoria]}$$
$$= P(X_{t-s} = n)\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_s = k)$$
$$= P(X_{t-s} = n).$$

Proposición 2.4 El proceso de Poison $\{X_t : t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes

Demostración

Considere $0 \le t_1 \le t_2 \le \dots \le t_n$ y cualesquiera estados $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$P(X_{t_1} = x, X_{t_2} - X_{t_1} = x_2, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = x_n) = P(X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_1 + x_2, \dots, X_{t_n} = x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

Denotemos por $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ luego

$$= P(X_{t_1} = s_1, X_{t_2} = s_2, \dots, X_{t_n} = s_n)$$
$$= P(X_{t_1} = s_1)P(X_{t_2} = s_2 \mid X_{t_1} = s_1)\cdots P(X_{t_n} = s_n \mid X_{t_{n-1}} = s_{n-1})$$
$$= P(X_{t_1} = s_1)\,P(X_{t_2} - X_{t_1} = x_2)\cdots P(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = x_n)$$

Proposición 2.5 El mismo proceso de Poisson $\{X_t : t \geq 0\}$ tiene las siguientes probabilidades de transición

$\forall s, t \geq 0$ y enteros $0 \le i \le j$

$$p_{ij}(t) = P(X_{t+s} \mid X_s = x_i) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

$p_{ij}(t) = p_{0,j-i}(t) \leftarrow$ Estacionaria en el tiempo.

Ejemplo: Sea $\{X_t : t \geq 0\}$. Proceso de Poisson (λ) y sea S una variable aleatoria continua con soporte $(0, +\infty)$ independiente de X_t. Entonces, para todo $t>0$, el incremento

$$(X_{s+t} - X_s) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

Demostración

Para $k \geq 0$ entero y suponiendo $F(s)$ como la función de distribución de S. Entonces

$$P(X_{s+t} - X_s = k) = \int_0^{+\infty} P(X_{s+t} - X_t = k \mid S = k)\, dF(s)$$

$$= \int_0^{+\infty} P(X_{s+t} - X_s = k)\, dF(s)$$

$$= \int_0^{+\infty} P(X_t = k)\, dF(s)$$

$$= P(X_t = k)$$

Jueves, 12 de enero de 2023.

Proceso de Poisson no homogéneo

Definición 2.6. Un proceso de Poisson no homogéneo es un proceso a tiempo continuo $\{X_t : t \geq 0\}$ con $S = \mathbb{N}_0$ y con parámetro la función positiva y localmente integrable $\lambda(t)$ y que cumple las siguientes propiedades

a) $X_0 = 0$
b) Los incrementos son independientes
c) Para cualquier $t \geq 0$, y cuando $h \searrow 0$,

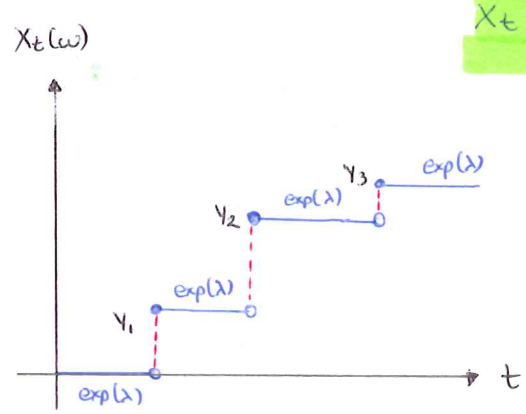
i) $P(X_{t+h} - X_t \geq 1) = \lambda(t)h + o(h)$
ii) $P(X_{t+h} - X_t \geq 2) = o(h)$

Más aún, la variable X_t tiene distribución Poisson $(\Lambda(t))$, en donde se define

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$$

Definición 2.7 Sea $\{N_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson y sean $Y_1, Y_2, \ldots$ una sucesión de v.a. i.i.d e independientes del proceso de Poisson. Sea $Y_0 = 0$. El proceso de Poisson compuesto $\{X_t\}_{t \geq 0}$ se define por

$$X_t = \sum_{n=0}^{N_t} Y_n$$



El tamaño de salto es aleatorio

Probabilidades de transición de una C.M a tiempo continuo

Proposición 2.8 Ver [Prop 5.1] Rincón. Sean i, j dos estados de la cadena de Markov. Para cualquier $t \geq 0$

$$p_{ij}(t) = \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \lambda_i e^{-\lambda_i t} \int_0^t e^{\lambda_i s} \left(\sum_{k \neq i} p_{ik} p_{kj}(s) \right) ds$$

Si i es absorbente, entonces $\lambda_i = 0$.

Demostración

Si i es absorbente, entonces $\lambda_i = 0$ y $p_{ij}(t) = \delta_{ij}$, lo cual es evidente. Si en cambio, i no es absorbente, entonces

$$p_{ij}(t) = P(X_t = j \mid X_0 = i)$$

$$= P(X_t = j, T_i > t \mid X_0 = i) + P(X_t = j, T_i \leq t \mid X_0 = i)$$

$$= \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t f_{X_t, T_i}(j, \mu | i)\, d\mu.$$

$$= \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t \sum_{k \neq i} f_{X_t, X_\mu, T_i | X_0}(j, k, \mu \,|\, i)\, d\mu$$

$$= \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t \sum_{k \neq i} f_{X_t | X_\mu, T_i, X_0}(j | k, \mu, i)\, f_{X_\mu | T_i, X_0}(k | \mu, i) \cdot f_{T_i}(\mu | i)\, d\mu$$

$$= \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t \sum_{k \neq i} p_{kj}(t-\mu)\, p_{ik}\, \lambda_i e^{-\lambda_i \mu}\, d\mu$$

$$= \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i \mu} \left(\sum_{k \neq i} p_{kj}(t-\mu)\, p_{ik} \right) d\mu$$

Haciendo el cambio de variable $s(\mu) = t - \mu$ en la integral, se obtiene el resultado

Proposición 2.9. Para cualquier par de estados $i, j \in S$ y para todo $t \geq 0$, $s \geq 0$

$$p_{ij}(t+s) = \sum_k p_{ik}(t)\, p_{kj}(s).$$

En notación matricial, se tiene que $P_{t+s} = P_t P_s$

Demostración

Notemos que

$$p_{ij}(t+s) = P(X_{t+s} = j \mid X_0 = i)$$
$$= \sum_k P(X_{t+s} = j, X_t = k \mid X_0 = i)$$
$$= \sum_k P(X_{t+s} = j \mid X_t = k)\, P(X_t = k \mid X_0 = i)$$
$$= \sum_k p_{ik}(t)\, p_{kj}(s)$$

En la literatura se puede encontrar a la [Prop 2.9] como la ecuación de Chapman Kolmogorov o como la propiedad de semi grupo.

La colección $\{P_t : t \geq 0\}$ constituye un semigrupo de matrices si satisface que

a) $P_0 = I$, donde I es la matriz identidad

b) $P_{t+s} = P_t P_s$, para cualesquiera estados $t, s \geq 0$.

De la ecuación de Chapman-Kolmogorov, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos escribir

$$p_{ij}(t) = \sum_{k_1, \ldots, k_{n-1}} p_{ik_1}(t/n)\, p_{k_1,k_2}(t/n) \cdots p_{k_{n-1},j}(t/n)$$

Proposición 2.10. Para cualquier par de estados i, j y para todo $t \geq 0$

$$p'_{ij}(t) = -\lambda_i p_{ij}(t) + \lambda_i \sum_{k \neq i} p_{ik}\, p_{kj}(t)$$ [1]

Más aún, tenemos que

$$\Rightarrow p'_{ij}(0) = -\lambda_i \delta_{ij} + \lambda_i \sum_{k \neq i} p_{ik} \delta_{kj}$$

$$= -\lambda_i \delta_{ij} + \lambda_i p_{ij}$$

$$= \begin{cases} -\lambda_i & \text{si } j = i \\ \lambda_i p_{i} & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

A las cantidades $p'_{ij}(0)$ se les denomina generadores infinitesimales del proceso y se les deno[...]
q_{ij}

Es decir que

$$q_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i & i = j \\ \lambda_i p_{ij} & i \neq j \end{cases}$$

Así, si $S = \mathbb{N}_0$, entonces

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 p_{01} & \lambda_0 p_{02} & \cdots \\ \lambda_1 p_{10} & -\lambda_1 & \lambda_1 p_{12} & \cdots \\ \lambda_2 p_{20} & \lambda_2 p_{21} & -\lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, Q es el generador infinitesimal del proceso, con las siguientes propiedades

a) $q_{ij} \geq 0 \quad i \neq j$

b) $q_{ii} \leq 0$

c) $\sum_j q_{ij} = 0$

Observe que de la ecuación [1], se tiene que

$$p'_{ij}(t) = \sum_k q_{ik} p_{kj}(t)$$

En forma matricial, se tiene que

$$P'(t) = Q\,P(t)$$

Explícitamente, se tiene que

$$\begin{pmatrix} p'_{00}(t) & p'_{01}(t) & \cdots \\ p'_{10}(t) & p'_{11}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 p_{01} & \cdots \\ \lambda_1 p_{10} & -\lambda_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & \cdots \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Ecuaciones retrospectivas de Kolmogorov

Lunes, 16 de enero de 2023.

Para el proceso de Poisson se tiene que

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & \cdots \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} = \begin{matrix} -\lambda p_{00}(t) + \lambda p_{10}(t) & -\lambda p_{01}(t) + \lambda p_{11}(t) \\ -\lambda p_{10}(t) + \lambda p_{20}(t) & -\lambda p_{11}(t) + \lambda p_{21}(t) \end{matrix}$$

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

- $p'_{ii}(t) = -\lambda p_{ii}(t)$
- [illegible]$) = -\lambda p_{ij}(t) + \lambda p_{i+1,j}(t)$ para $i<j$

Proceso de Poisson

Alternativamente a lo que hemos visto podemos definir al proceso de Poisson a través de los siguientes postulados

- Los incrementos son independientes y estacionarios
- Las probabilidades de transición son estacionarias $p_{ij}(t) = P(X_{t+s} = j \mid X_t = i)$

Cuando $h \searrow 0$

a) $p_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h)$, para $i \geq 0$

b) $p_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h)$, para $i \geq 1$

c) $p_{i,i}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h)$, para $i \geq 1$

Derivación intuitiva de los sistemas de ecuaciones diferenciales retrospectivos del Proceso de Poisson

Para cualquier $t \geq 0$ y $h \geq 0$ pequeños consideremos el intervalo $[0, t+h]$ visto de la siguiente forma

$$[0, t+h] = [0,h] \cup (h, t+h].$$

Queremos calcular $p_{ij}(t+h)$, para ello

$$p_{ij}(t+h) = \lambda p_{i+1,j}(t) + (1-\lambda h) p_{ij}(t) + o(h)$$

$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = \lambda p_{i+1,j}(t) - \lambda p_{ij}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

Si $h \searrow 0$,

$$p_{ij}'(t) = \begin{cases} -\lambda p_{ii}(t) & \\ \lambda p_{i+1,j}(t) - \lambda p_{ij}(t) & i<j \end{cases}$$

Considere un proceso de Poisson $\{X_t\}_{t\geq 0}$ de tasa λ y suponga que cada vez que el evento ocurre este es clasificado como tipo 1 o tipo 2, con probabilidades p y $1-p$ respectivamente

Sean $X_1(t)$ y $X_2(t)$ el número de eventos de tipo 1 y tipo 2, respectivamente, al tiempo t. $(X(t) = X_1(t) + X_2(t))$

Proposición 2.11. Los procesos $\{X_1(t)\}_t$ y $\{X_2(t)\}_t$ son procesos de Poisson con parámetros λp y $\lambda(1-p)$, respectivamente.

Suponga que ahora existen k eventos posibles y que la probabilidad de clasificarlos como tipo i, $i = 1, 2, \dots, k$ depende del tiempo en el que evento ocurre.

Es decir, suponga que si el evento ocurre al tiempo t, entonces este será clasificado como del tipo i con probabilidad $P_i(j)$, $j = 1, 2, \dots, k)$, donde

$$\sum_{j=1}^{k} P_i(j) = 1.$$

Proposición 2.12 Si $X_i(t)$, con $i = 1, \dots, k$ representa el número de eventos del tipo i ocurriendo al tiempo t, entonces $X_i(t)$ $(i = 1, \dots, k)$ son procesos de Poisson con media

$$E[X_i(t)] = \lambda \int_0^t P_i(s)\,ds$$

$S = \mathbb{N}_0$

$$Q = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & \cdots & \\ \hline 0 & -w_0 & w_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & \mu_1 & -(w_1+\mu_1) & w_1 & 0 & \cdots \\ 2 & 0 & \mu_2 & -(w_2+\mu_2) & \mu_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{array}$$

Procesos de Nacimiento y muerte.

$\mu_0 = 0$

$w_0, w_1, w_2, \dots$ y $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ son constantes positivas

$T_i \sim exp\,(w_i + \mu_i)$

Las probabilidades de salto de un estado a otro están dadas por

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{w_i}{w_i + \mu_i} & si\ j = i+1 \\[2ex] \dfrac{\mu_i}{w_i + \mu_i} & si\ j = i-1 \\[2ex] 0 & c.c. \end{cases}$$

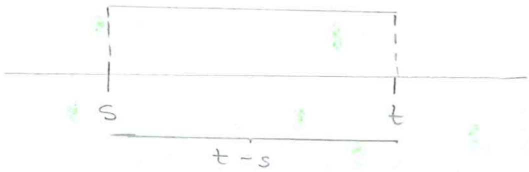
Martes, 17 de enero de 2023.

Ejercicio. Suponga que clientes llegan a una estación de servicio de acuerdo a un proceso de Poisson con tasa $\lambda = 1/2$. Al llegar recibe el servicio inmediatamente. Los tiempos de servicio son independientes con distribución exponencial $(\sim exp(\mu))$ $\mu = 1/2$.

a) ¿Cuál es la distribución de $X(t) = \#$ de clientes que han recibido el servicio al tiempo t?

b) ¿Cuál es la distribución de $Y(t) = \#$ número de clientes que están recibiendo el servicio al tiempo t?

Sea s un tiempo cualquiera tal que $s<t$, entonces se tiene el siguiente gráfico



$P(Z_1 \leq t-s)$

$1 - e^{-(t-s)\lambda}$

Así, $X(t)$ sigue una distribución de Poisson con esperanza

$$E[X(t)] = \frac{1}{2}\int_0^t \left(1 - e^{-\frac{1}{2}(t-s)}\right) ds$$

$Y(t) \sim$ Poisson

$$E[X(t)] = \frac{1}{2}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-s)}\, ds$$

Ejercicio. Sea $\{X(t) : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson con intensidad λ. Suponga que cada evento es registrado con probabilidad p independiente de otros eventos.

Sea $\{Y(t) : t \geq 0\}$ el proceso que registra los eventos

Pruebe que

$$P(Y(t) = \overset{(k)}{m}) = e^{-\lambda p t}\frac{(\lambda p t)^k}{k}$$

Notemos que

$$P(Y(t) = k) = P(Y(t) \geq k) - P(Y(k) < k)$$

$$E[Y(t)] = \lambda \int_0^t p_i(s)\,ds$$

$$= \lambda \int_0^t p \quad = \lambda p t$$

Por lo tanto $Y(t) \sim Poi(\lambda p t)$, es decir qe

$$P(Y(t)=k) = \frac{e^{-\lambda p t}(\lambda p t)^k}{k}$$

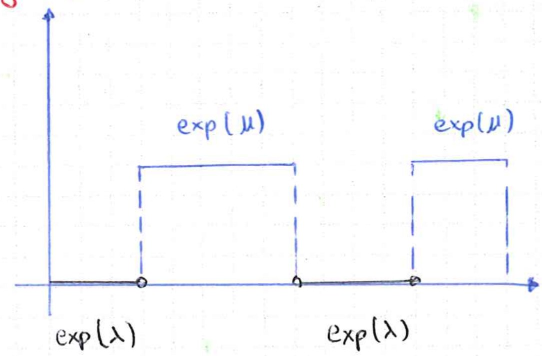
Solución

$$P(Y(t)=m) = \sum_{k \geq m} P(Y(t)=m \mid X(t)=k)\, P(X(t)=k)$$

$$= \sum_{k\geq m} \binom{m}{k} p^m (1-p)^{m-k} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

↳ luego usar la aproximación de una binomial por una normal.

Ejercicio. $S = \{0,1\}$



$p_{00}(t) = ¿?$

Consideremos el generador infinitesimal de la cadena, este está dado por

$$Q = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & -\lambda & \lambda \\ 1 & \mu & -\mu \end{array} \qquad P(t) = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{pmatrix}$$

$$P'(t) = \begin{pmatrix} p'_{00}(t) & p'_{01}(t) \\ p'_{10}(t) & p_{11}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} p'_{00}(t) = -\lambda p_{00}(t) + \lambda p_{10}(t) \\ p'_{01}(t) = -\lambda p_{01}(t) + \lambda p_{11}(t) \\ p'_{10}(t) = \mu p_{00}(t) - \mu p_{10}(t) \\ p'_{11}(t) = \mu p_{01}(t) - \mu p_{11}(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = -\lambda x(t) + \lambda y(t) \\ z'(t) = -\lambda z(t) + \lambda w(t) \\ y'(t) = \mu x(t) - \mu y(t) \\ w'(t) = \mu z(t) - \mu w(t) \end{cases}$$

Resolviendo con Wolfram

$$p_{00}(t) = x(t) = \frac{c_1(\lambda e^{-t(\lambda+\mu)} + \mu)}{\mu+\lambda} - \frac{c_2 \lambda (e^{-t(\lambda+\mu)} - 1)}{\mu+\lambda}$$

$$p_{10}(t) = y(t) = \frac{c_2(\mu e^{-t(\lambda+\mu)} + \lambda)}{\lambda+\mu} - \frac{c_1 \mu (e^{-t(\lambda+\mu)} - 1)}{\lambda+\mu}$$

$$p_{01}(t) = z(t) = \frac{c_3(\mu e^{-t(\lambda+\mu)} + \lambda)}{\lambda+\mu} - \frac{c_4 \mu (e^{-t(\lambda+\mu)} - 1)}{\lambda+\mu}$$

$$p_{11}(t) = w(t) = \frac{c_4(\lambda e^{-t(\lambda+\mu)} + \mu)}{\lambda+\mu} - \frac{c_3 \lambda (e^{-t(\lambda+\mu)} - 1)}{\lambda+\mu}$$

Miércoles 18 de enero de 2023.

Sección: Proceso de Nacimiento y Muerte

Consideremos $S = \mathbb{N}_0$, notemos que

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$$

en donde

$\lambda_0, \lambda_1, \dots$ y $\mu_1, \mu_2, \dots$

son constantes positivas

Además, podemos concluir que el tiempo de estancia en cualquier estado, $i \geq 0$ tiene distribución $\exp(\lambda_i + \mu_i)$ en donde se define $\mu_0 = 0$.

Las probabilidades de salto están dadas por

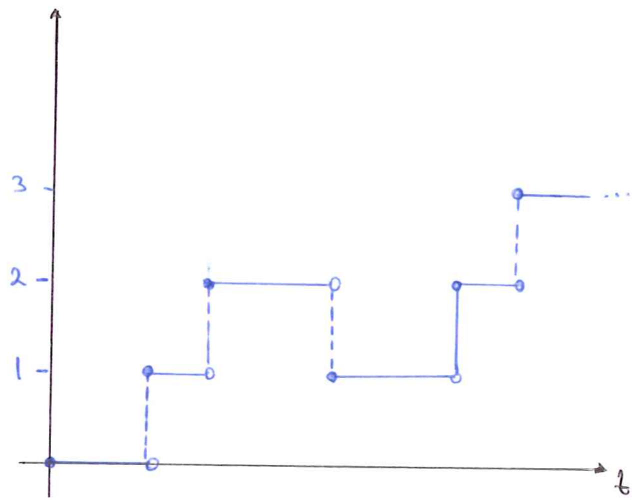
$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} & \text{si } j = i+1 \\ \dfrac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} & \text{si } j = i-1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$T_i \sim \exp(\lambda_i + \mu_i)$

$X_0 = 0$

X_t = # de individuos en la población al tiempo t

$X_t(\omega)$



Postulados

a) Los incrementos son independientes y estacionarios

b) Las probabilidades de transición son estacionarias, es decir,

$$p_{ij}(t) = P(X_{t+s} = j \mid X_s = i)$$

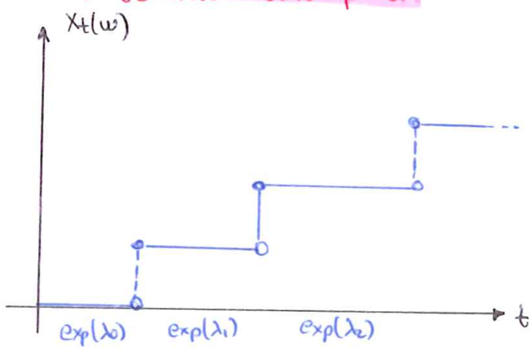
Cuando $h \searrow 0$

c) $p_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h)$, para $i \geq 0$

d) $p_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h)$, para $i \geq 1$

e) $p_{i,i}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h)$, para $i \geq 0$.

Proceso de nacimiento puro



Este proceso surge cuando consideramos

$$\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \cdot \ = 0$$

Puede demostrarse que los incrementos en un proceso de nacimiento puro son independientes pero no necesariamente estacionarios

Un proceso de nacimiento puro puede definirse mediante las siguientes probabilidades infinitesimales, cuando $h \searrow 0$

a) $P(X_{t+h} - X_t = 1 \mid X_t = k) = \lambda_k h + o(h)$

b) $P(X_{t+h} - X_t = 0 \mid X_t = k) = 1 - \lambda_k h + o(h)$

Proceso de muerte puro

Análogamente se puede definir un proceso de muerte pura como un proceso de nacimiento y muerte en donde

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = 0.$$

El proceso inicia con una población de tamaño $k \geq 1$ y presentar fallecimientos sucesivos.

Proceso de Yule

Es un tipo de proceso particular del proceso de nacimiento y muerte en el que es posible encontrar explícitamente las probabilidades de transición.

Este proceso se define con los siguientes postulados

a) $X_0 = k, \quad k \geq 1$

b) Si $X_t = n$, entonces cada una de las partículas puede dar nacimiento a un nuevo elemento durante un periodo de longitud infinitesimal $h>0$ con probabilidad $\lambda h + o(h)$, en donde $\lambda > 0$, es decir,

$$P(X_{t+h} - X_t = 1 \mid X_t = n) = \binom{n}{1} (\lambda h + o(h))^1 (1 - \lambda h + o(h))^{n-1}$$

Por lo tanto, la tasa instantánea de nacimiento es $\lambda_n = \lambda n$.

El tiempo de estancia en el estado n tiene distribución $\exp(\lambda n)$, en consecuencia el tiempo medio en ese estado es $(\lambda n)^{-1}$

Proposición 2.12. Las probabilidades de transición para el proceso de Yule son

Ver prop. 5.7

$$p_{kn}(t) = \binom{n-1}{n-k} e^{-\lambda k t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-k} \quad \text{para} \quad n \geq k.$$

Conceptos y propiedades varias

Recurrencia:

Un estado i es recurrente si, partiendo de i, con probabilidad 1 el conjunto

$$\{ t \geq 0 : X_t = i \}$$

es no acotado

- Si $E[\tau_i] = +\infty$, i es recurrente nulo
- Si $E[\tau_i] < +\infty$, i es recurrente positivo

donde

$$\tau_{ij} = \inf \{ t > 0 : X_t = j \} \quad \text{con} \quad X_0 = i$$

El tiempo medio de primera visita es $\mu_{ij} = E[\tau_{ij}]$.

Transitoriedad

Un estado i es transitorio si, partiendo de i con probabilidad 1, el conjunto

$$\{ t \geq 0 : X_t = i \}$$

es acotado.

Distribuciones estacionarias

Si $P(t)$ es la matriz de probabilidades de transición, π es una distribución estacionaria si

$$\pi P(t) = \pi$$

$$\sum_i \pi_i \, p_{ij}(t) = \pi_j$$

π es estacionaria para la cadena de Markov con generador infinitesimal Q si

$$\pi Q = 0$$

Ver Proposición 5.8, libro.

Ejercicio de repaso (Clase 24 de enero de 2023)

Ejercicio 1. Considere un sistema de servicios donde clientes llegan con tasa λ. Existen s servidores, el tiempo de servicio de cada uno es exponencial con tasa μ.

Los clientes en fila esperan hasta que alguno de los servidores se desocupe.

¿Con qué proceso podría modelarse esta dinámica si el objetivo es conocer el número de clientes en el sistema?
¿Cuáles son las tasas de los tiempos de instancia?

$T_i \sim exp(\mu_i + \lambda_i)$ $\quad \lambda_i = \lambda$ para todo i

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu & \text{si } i \leq s \\ s\mu & \text{si } i > s \end{cases}$$

Utilizamos un proceso de nacimiento y muerte.

Ejercicio 2. Considere un proceso de nacimiento y muerte con tasa λ_n y μ_n respectivamente. ($\mu_0 = 0$). Sea K_i el tiempo que demora en saltar de i al estado $i+1$. ¿Cuál es $E(K_i)$?

$$E[K_0] = \frac{1}{\lambda_0}$$

Z es la variable que indica si a partir del estado i al estado $i-1$ o $i+1$

$$E[K_i] = E[K_i \mid Z=-1]\, P(Z=-1) + E[K_i \mid Z=1]\, P(Z=1)$$

$$= E[K_i \mid Z=-1]\, p_{i,i-1} + E[K_i \mid Z=1]\, p_{i,i+1}$$

Como $T_i \sim exp(\lambda_i + \mu_i)$, entonces

$$E[K_i \mid Z=1] = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} = E[T_i]$$

luego

$$E[K_i \mid Z=-1] = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + E[K_{i-1}] + E[K_i]$$

Por lo tanto

$$E[K_i] = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}\right) + \left(\frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + E[K_{i-1}] + E[K_i]\right)\left(\frac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i}\right)$$

Ejercicio 3. Se tienen

- 2 técnicos
- 3 impresoras

Solo un técnico trabaja en cada impresora en cada momento.

Cuando las 3 impresoras han fallado la última a fallar debe esperar hasta que uno de los técnicos finalice su tarea.

El tiempo hasta la falla es exponencial con media de dos días. El tiempo de reparación es exponencial con media 0.5 días.

Sea $X(t) :=$ número de impresoras en funcionamiento al tiempo t.

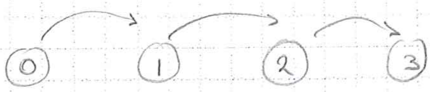
¿Q = ?

Notemos que $N = \{0, 1, 2, 3\}$

Ahora, la tasa de reparación de cada impresora es 2 y la tasa de falla es de 0.5

$\lambda_0 = 2 \cdot 2 = 4$ $\qquad \mu_0 = 0$

$\uparrow$ tasa de cada máquina $\quad \uparrow$ # de técnicos



$\lambda_1 = 2 \cdot 2 = 4$ $\qquad \mu_1 = 0.5$

$\lambda_2 = 2$ $\qquad \mu_2 = 0.5 \cdot 2$

$\lambda_3 = 0$ $\qquad \mu_3 = 0.5 \cdot 3$

$$Q = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0.5 & -(0.5+4) & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

De manera analítica obtenemos el sistema de ecuaciones retrospectivas para el proceso de nacimiento y muerte

Para $t>0$ y $h>0$,

$$[0, t+h] = [0,h] \cup]h, t+h]$$

Queremos calcular $p_{ij}(t+h)$, para ello

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+h) &= \sum_{k} p_{ik}(h)\, p_{kj}(t) \\ &= p_{i,i-1}(h)\, p_{i-1,j}(t) + p_{i,i}(h)\, p_{i,j}(t) + p_{i+1,i}(h)\, p_{i+1,j}(t) \\ &= h\mu_i\, p_{i-1,j}(t) + h\lambda_i\, p_{i+1,j}(t) + (1 - h\lambda_i - h\mu_i)\, p_{ij}(t) \end{aligned}$$

Ejercicios extra.

Ejercicio 1.

Sea X una cadena de Markov homogénea a tiempo continuo con espacio de estados $S=\{0,1,2\}$ y generador infinitesimal

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

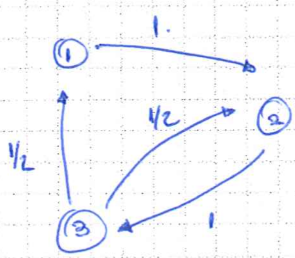
Calcule su matriz de transición

Recordemos que $P'(t) = Q\,P(t)$, en forma matricial

$$\begin{pmatrix} p'_{00}(t) & p'_{01}(t) & p'_{02}(t) \\ p'_{10}(t) & p'_{11}(t) & p'_{12}(t) \\ p'_{20}(t) & p'_{21}(t) & p'_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & p_{02}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{20}(t) & p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema se tiene el resultado.

Ejercicio 2. Considere la cadena de Markov a tiempo continuo $X(t)$ que tiene la cadena de saltos mostrada en la figura. Asuma $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$. Encuentre la distribución estacionaria.



Notemos que

$$(P_{ij}) = P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

luego, recordemos que

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 p_{12} & \lambda_1 p_{13} \\ \lambda_2 p_{21} & -\lambda_2 & \lambda_2 p_{23} \\ \lambda_3 p_{31} & \lambda_3 p_{32} & -\lambda_3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se sigue que

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3/2 & 3/2 & -3 \end{pmatrix}$$

Así, queremos encontrar π, tal que $\sum_i \pi_j = 1$ y

$$\underset{1\times 3}{\pi} \, \underset{3\times 3}{Q} = 0.$$

Es decir,

$$(\pi_1 \;\; \pi_2 \;\; \pi_3) \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3/2 & 3/2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo, se tiene que

$$\pi = (3/19, 12/19, 4/19)$$

$$\pi = \frac{1}{19}(3, 12, 4)$$

Jueves, 26 de enero de 2023

Capítulo 3: Procesos de Renovación

Definición 3.1. Un proceso de renovación N_t se define como

$$N_t = \max\{n \geq 0 : W_n \leq t\} \qquad \forall\, t \geq 0$$

donde $W_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ y $T_1, T_2, \ldots, T_n$ son v.a. i.i.d no negativas $T_i \sim F$.

Como antes:

- W_n representa el tiempo en el que se realiza la n-ésima renovación
- N_t representa el # de renovaciones hasta el tiempo t.

Análogamente, se tiene que $(N_t \geq n) = (W_n \leq t)$

Notemos que la función de distribución de W_n es la convolución de $F(t)$ consigo mismo n veces

$$F_{W_n}(t) = F^{*n}(t) = (F * F * \cdots * F)(t)$$

donde, en particular $F^{*1}(t) = F(t)$ y para $n=0$, se define como

$$F^{*0}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 & t \geq 0. \end{cases}$$

Más aún, se tiene que

$$P(N_t = n) = P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n-1) = P(W_n \leq t) - P(W_{n+1} \leq t)$$

$$P(N_t = n) = F^{*(n)}(t) - F^{*(n)}(t)$$

Ejemplo: Suponga que $P(T_n = i) = p(1-p)^{i-1}$, $i \geq 1$.

¿Cuál es la distribución de N_t? Notemos que T_n tiene distribución geométrica

$$W_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$$

Luego, W_n puede interpretarse como el número de tentativas hasta el n-ésimo éxito. Por lo tanto, W_n sigue una distribución binomial negativa

$$P(W_n = k) = \begin{cases} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{si } k < n \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$P(N_t = n) = \sum_{k=n}^{[t]} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} - \sum_{k=n+1}^{[t]} \binom{k-1}{n} p^{n+1} (1-p)^{k-n-1}$$

$$= \binom{[t]}{n} p^n (1-p)^{[t]-n}$$

Calculemos ahora $E[N_t]$

$$E[N_t] = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N_t \geq n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(W_n \leq t) = \sum_{n=1}^{+\infty} F^{*(n)}(t)$$

$E[N_t]$ es conocida como la función de valor medio o la función de renovación

Proposición 3.2. La función de renovación que denotaremos por m_t ($m_t = E[N_t]$) satisface la ecuación

$$m_{(t)} = F(t) + \int_0^t m(t-s)\, dF(s)$$

Demostración
Condicionando sobre el primer tiempo de renovación T_1, tenemos que

$$m_{(t)} = \int_0^{+\infty} E[N_t \mid T_1 = s]\, dF_s, \qquad [1]$$

en donde

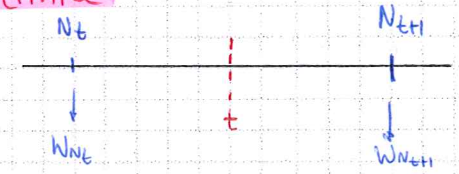
$$E[N_t \mid T_1 = s] = \begin{cases} 0 & \text{si } s > t \\ 1 + \underbrace{E[N_{(t-s)}]}_{m_{t-s}} & \text{si } s \leq t \end{cases} \qquad [2]$$

Substituyendo [2] en [1], se sigue que

$$m_t = \int_0^t (1 + m_{(t-s)})\, dF_s = F(t) + \int_0^t m_{(t-s)}\, dF(s)$$

$$= F(t) + \int_0^t m_{(t-s)} f(s)\, ds = F(t) = +(m * f)(t)$$

Sección: Teoremas Límite



W_{N_t} puede verse como la última renovación al tiempo t.

$W_{N_{t+1}}$ representa el tiempo de la primera renovación después de t.

Teorema 3.3. Sea $\mu = E[T]$, si $P(T_1 > 0) > 0$, entonces con probabilidad 1

Ver 6.1 [1]
Teorema elemental de renovación

tasa de renovaciones $\rightarrow$ $\dfrac{N_t}{t} \longrightarrow \dfrac{1}{\mu}$ con $t \to +\infty$

Bosquejo de la demostración
Para cualquier $t > 0$, se tiene que $W_{N_t} \leq t \leq W_{N_{t+1}}$, por lo tanto

$$\mu \leftarrow \frac{W_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} < \underbrace{\frac{W_{N_{t+1}}}{N_t + 1}}_{\to \mu} \; \frac{N_t + 1}{N_t}$$

$t \to +\infty \Rightarrow N_t \to +\infty$

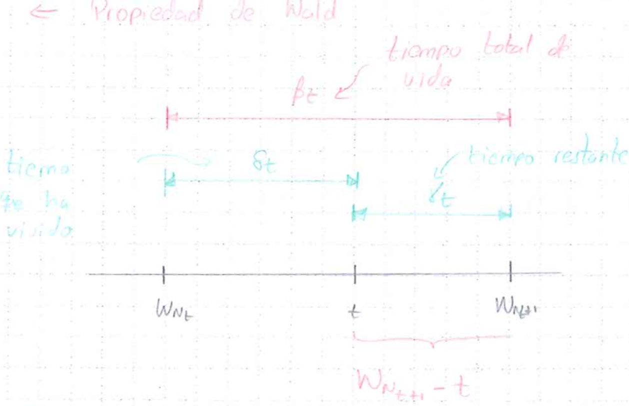
Teorema 3.4. - Teorema elemental de renovación -
Considere un proceso de renovación en donde $E(T) = \mu$, con $0 < \mu < +\infty$, entonces

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{m_{(t)}}{t} = \frac{1}{\mu}$$

Demostración

Observemos lo siguiente

$$E[W_{N_{t+1}}] = E\left[\sum_{i=1}^{N_{t+1}} T_i\right] = E[N_{t+1}]\,E[T] \leftarrow \text{Propiedad de Wald}$$
$$= m(t+1)\,E[T]$$
$$= m(t+1)\,\mu.$$



luego, despejando

$$m(t) = \frac{E[W_{N_{t+1}}]}{\mu} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu t} E[W_{N_{t+1}} - t] + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}$$

Teorema 3.5. Para un proceso de renovación $\{N_t : t \geq 0\}$ donde $\mu = E[T]$, entonces
Ver Prop. 6.8 [1]

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{W_{N_t}}{N_t} = \mu \quad \text{c.s.}$$

Cada cuanto tiempo existe una renovación

Lunes, 30 de enero de 2023.

Teorema 3.6 - Teorema del límite central -
Sea $N(t)$ un proceso de renovación, entonces se tiene que

$$\lim_{t \to +\infty} P\left\{ \frac{N(t) - t/\mu}{\sqrt{t\sigma^2/\mu^3}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2}\, dx$$

donde $E[T] = \mu$ y $Var[T] = \sigma^2$. Además, también se puede demostrar que

$$\lim_{t \to} \frac{Var(N(t))}{t} = \frac{\sigma^2}{\mu^3}$$

Ejemplo: Dos máquinas trabajan realizando un cierto proceso, continuamente. El tiempo que le toma a la máquina 1 realizar el mismo tiene distribución Gamma $(4, 2)$ y el tiempo que ocupa la máquina 2 es uniforme $[0, 4]$.

¿Cuál es la probabilidad de que ambas máquinas trabajando juntas culminen al menos 90 procesos al tiempo $t = 100$?

Consideremos

$N_1(t)$: # de trabajos realizados por la máquina 1 al tiempo t, $(\mu_1 = 4/2 = 2$ y $\sigma_1^2 = 16/16)$
$N_2(t)$: # de trabajos realizados por la máquina 2 al tiempo t $(\mu_2 = 2$ y $\sigma_2^2 = \frac{1}{12}(4-0)^2 = 4/3)$
$N(t)$: # de trabajos totales

$$P(N(100) \geq 90) = P(N_1(100) + N_2(100) \geq 90).$$

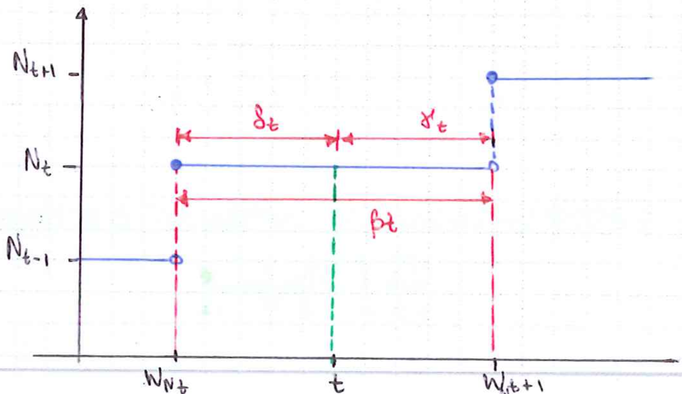
Donde

$$N_1(100) \sim N\left(\frac{100}{2}, \frac{50}{4}\right) \qquad P(N(100) \geq 90) = P\left(Z \geq (90 - 100)/\sqrt{175/6}\right)$$

$$N_2(100) \sim N(50, 50/3) \qquad =$$

$$N(100) \sim N(100, 175/6)$$

Tiempos de Vida



Tiempo restante de vida

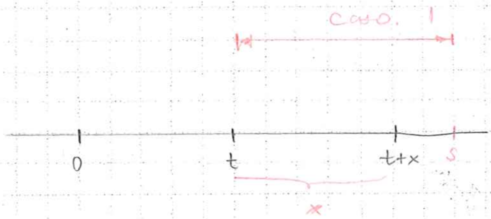
$$\gamma_t = W_{N_{t+1}} - t$$

Proposición 3.7 Para todo $x \geq 0$, $t \to P(\gamma_t > x)$ satisface la ecuación de renovación. Es decir

$$P(\gamma_t > x) = 1 - F(t+x) + \int_0^t P(\gamma_{t-s} > x)\, dF(s)$$

Demostración

Notemos que



$$P(\gamma_t > x) = \int_0^{+\infty} P(\gamma_t > x \mid T_1 = s)\, dF(s)$$

Además,

$$P(\gamma_t > x \mid T_1 = s) = \begin{cases} 1 & s > t+x \\ 0 & t < s \leq t+x \\ P(\gamma_{t-s} \geq x) & 0 < s \leq t \end{cases}$$

sustituyendo en la integral, se tiene que

$$\begin{aligned} P(\gamma_t > x) &= \int_0^{+\infty} P(\gamma_t > x \mid T_1 = s)\, dF(s) \\ &= \int_0^t P(\gamma_{t-s} \geq x)\, dF(s) + \int_{t+x}^{+\infty} dF(s) \\ &= 1 - F(t+x) + \int_0^t P(\gamma_{t-s} > x)\, dF(s) \end{aligned}$$

Si $T \sim exp(\lambda)$, entonces

$$P(\gamma_t > x) = e^{-\lambda x}$$

Caso particular, en el mismo no hace falta resolver lo indicado en la proposición 3.7.

Tiempo de vida transcurrido

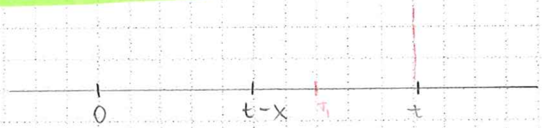
$$\delta_t = t - W_{N_t}$$

Proposición 3.8 Para todo $x \geq 0$, $t \to P(\delta_t > x)$ satisface la ecuación de renovación. Es decir,

$$P(\delta_t > x) = 1 - F(t) - \int_0^{t-x} P(\delta_{t-s} > x)\, dF(s)$$

Demostración

Notemos que



$$P(\delta_t > x) = \int_0^{+\infty} P(\delta_t > x \mid T_1 = s)\, ds$$

Además,

$$P(\delta_t > x \mid T_1 = s) = \begin{cases} 1 & s \geq t \\ 0 & t-x \leq s \leq t \\ P(\delta_{t-s} > x) & 0 \leq s < t-x \end{cases}$$

por lo tanto

$$P(\delta_t > x) = \int_0^{+\infty} P(\delta_t > x \mid T_1 = s)\, ds = \int_t^{+\infty} dF(s) + \int_0^{t-x} P(\delta_{t-s} > x)\, dF(s) = 1 - F(t) + \int_0^{t-x} P(\delta_{t-s} > x)\, dF(s)$$

Si $T \sim exp(\lambda)$

$$P(\delta_t \leq 1) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & 0 < x < t \\ 1 & x \geq t \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Tiempo de vida total

$$\beta_t = \gamma_t + \delta_t = W_{N_t+1} - W_{N_t} = T_{N_t+1}$$

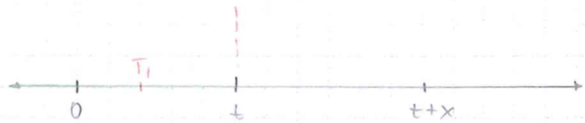
Proposición 3.9 Para todo $x \geq 0$, $t \to P(\beta_t > x)$ satisface la ecuación de renovación. Es decir que

$$P(\beta_t > x) = 1 - F(t \vee x) + \int_0^t P(\beta_{t-s} > x)\, dF(s)$$

Demostración

Notemos que

$$P(\beta_t > x) = \int_0^{\infty} P(\beta_t \geq x \mid T_1 = s)\, dF(s)$$



luego

$$P(\beta_t \geq x \mid T_1 = s) = \begin{cases} P(\beta_{t-s} > x) & \text{si } 0 \leq s \leq t \\ 1 & \text{si } s \geq t+x \\ 1 & \text{si } t < s < t+x, \ s > x \\ 0 & \text{si } t < s < t+x, \ s \leq x \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$P(\beta_t > x) = \int_0^{+\infty} P(\beta_t > x \mid T_1 = s)\, dF(s)$$

$$= \int_0^t P(\beta_{t-s} > x)\, dF(s) + \int_{t+x}^{+\infty} dF(s) = 1 - F(t+x) + \int_0^t P(\beta_{t-s} > x)\, dF(s)$$

Ejercicios extra:

Problema 1. Encuentre una expresión para la esperanza del tiempo restante de vida condicionado en el evento en el que el tiempo transcurrido de vida es igual a x.

Solución

Queremos encontrar $E[\gamma_t \mid \delta_t = x]$, así

$$E[\gamma_t \mid \delta_t = x] = \int_0^{+\infty} P(\gamma_t > y \mid \delta(t) = x)\, dy$$

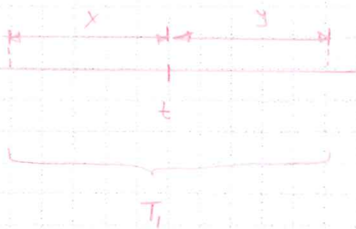
pues el tiempo transcurrido es positivo y la variable monótona positiva. luego

$$P(\gamma(t) > y \mid \delta(t) = x) = P(T_1 > x+y \mid T_1 > x)$$

$$= \frac{P(T_1 > x+y,\ T_1 > x)}{P(T_1 > x)}$$

$$= \frac{P(T_1 > x+y)}{P(T_1 > x)}$$

$$= \frac{1 - F(x+y)}{1 - F(x)}$$

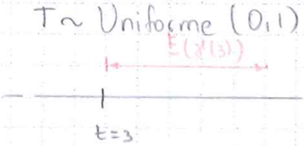


Sustituyendo

$$E[\gamma_t \mid \delta_t = x] = \int_0^{+\infty} \frac{1 - F(x+y)}{1 - F(x)}\, dy$$

Problema 2. Para el proceso de renovación cuyo intervalo entre arrivos es uniforme distribuido en $(0,1)$. Determine el tiempo esperado desde $t = 3$ hasta el próximo evento de renovación.

$T \sim$ Uniforme $(0,1)$



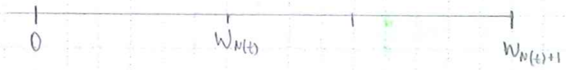
Buscamos $E[\gamma(3)] \Rightarrow E[W_{N(t)+1} - t] = \mu(m(t)+1) - t$

$\mu = \frac{1}{2}$

$$\gamma(t) = W_{N(t)+1} - t$$

$$E[W_{N(t)+1}] = \mu(m(t)+1) = \frac{1}{2}(m(t)+1)$$

$$m(t) = e^t - 1$$



$$E[\gamma(3)] = \frac{1}{2}(e^3 - 1 + 1) - 3 = \frac{e^3}{2} - 3.$$

Ejercicio 3. Suponga que una máquina tiene la siguiente dinámica de funcionamiento.

↳ La máquina posee dos componentes
↳ Comienza su trabajo con el componente 1 durante un tiempo exponencial con tasa μ_1
↳ Luego entra en funcionamiento el componente 2, durante un tiempo exponencial con tasa μ_2
↳ Luego el componente 2 falla, entra en funcionamiento una nueva máquina bajo la misma dinámica

a) $E[\gamma_t] = ?$ $\qquad \gamma_t = W_{N(t)+1} - t$

b) $m(t) = ?$

a) $E[\gamma_t] = E[\gamma_t \mid A]P(A) + E[\gamma_t \mid B]P(B)$

A: Componente 1 está trabajando al tiempo t
B: Componente 2 está trabajando al tiempo t

$$E[\gamma_t] = \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)\underbrace{P(t)}_{P_{11}(t)} + \frac{1}{\mu_2}(1 - \underbrace{P(t)}_{P_{11}(t)})$$

$$= \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right) + \frac{1}{\mu_2}\left(1 - \left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)\right)$$

$$= \frac{P(t)}{\mu_1} + \cancel{\frac{P(t)}{\mu_2}} + \frac{1}{\mu_2} - \cancel{\frac{P(t)}{\mu_2}}$$

$$= \frac{1}{\mu_2} + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)\frac{1}{\mu_1}$$

b) $m(t) = \frac{t}{\mu} + \frac{E[\gamma_t]}{\mu} - 1$ $\qquad$ con $\mu = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$

Ejercicios repaso:

Ejercicio 1. Calcule la función de renovación $m(t)$ correspondiente a un proceso de renovación con distribución entre arribos Erlang $(2;\lambda)$

Por inducción, mostremos que $W_n \sim$ Earlang $(2n, \lambda)$

Ejercicio 3 Suponga que el mantenimiento de un local de lavado de autos funciona de la siguiente manera: autos llegan al local de acuerdo con un proceso de renovación donde los tiempos entre arribos están uniformemente distribuidos en $[1,3]$ (minutos). Cada vez que hay N autos esperando a ser lavados, la totalidad de esos N autos son llevados al túnel de lavado (y se dice que el túnel está lleno). Si el costo de mantenimiento del local es 2n dólares por minuto cada vez que hay n autos esperando y el local incurre en un costo adicional de mantenimiento de 21 dólares cada vez que el túnel está lleno. ¿Cuál es el número de autos promedio que minimiza el costo promedio de mantenimiento de la estación

Notemos T_i el tiempo entre arribos de los autos

- $T_i \sim \mathcal{U}[1,3]$
- Costo \$ 2n por minuto cada vez
- Costo \$ 21 cada vez que entra en funcionamiento

1) Llega el primer auto $\quad 2 \cdot 1 \cdot T_1$
2) Llega el segundo auto $\quad 2 \cdot 2 \cdot T_2$

⋮

el nésimo auto $\quad 2 \cdot t \cdot T_t$

$E[T] = N\mu = 2N$

Los costos hasta el n-ésimo auto es

$$C_n = \sum_{i=1}^{N} 2 \cdot t\, T_t$$

$$= 2\sum_{i=1}^{N} i\, T_i$$

Luego

$$E[C_n] = 2\sum_{i=1}^{n} i\, E[T_i] = 2\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2 = 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Problema 3. Para un proceso de renovación, sea $\delta(t)$ la edad en el tiempo t. Demuestre que si la media interarrivos es $\mu<+\infty$, entonces con probabilidad 1

$$\frac{\delta(t)}{t} \to 0 \quad \text{cuando} \quad t\to+\infty$$

Solución

Notemos que

$$\delta(t) = t - W_{N_t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta(t)}{t} = \frac{t-W_{N_t}}{t} = 1 - \frac{W_{N_t}}{t}$$

Así, tomando el límite

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\delta(t)}{t} = 1 - \lim_{t\to+\infty} \frac{W_{N_t}}{t} = 1 - \lim_{t\to+\infty} \frac{W_{N_t}}{N_t}\cdot\frac{N_t}{t} = 1 - \mu\cdot\frac{1}{\mu} = 1-1=0.$$

Clase de ejercicios - Martes, 31 de enero de 2023.

Ejercicio 1. Suponga que los tiempos entre renovaciones siguen una distribución Uniforme $(0,1)$. Para $t\leq 1$, encuentre la función de renovación

Recordemos que la función de renovación satisface que

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-s)\,dF(s)$$

Así, como la distribución es uniforme, entonces $F(t) = t/1 = t$, luego

$$m(t) = t + \int_0^t m(t-s)\,\underbrace{dF(s)}_{1\cdot ds}.$$

Tomando $u = t-s$, $du=-ds$, así

$$m(t) = t - \int_t^0 m(u)\,du$$

derivando y por el teorema fundamental del cálculo

$$m'(t) = 1 + m(t) \iff \frac{dm}{dt} = 1+m(t) \iff \frac{dm}{1+m} = dt$$

$$\Rightarrow \ln(1+m) = t + c$$

$$1+m = ce^t \Rightarrow m(t) = ce^t - 1 \quad \text{y} \quad m(0)=0$$

$$\therefore m(t) = e^t - 1$$

Ejercicio 2 Suponga que clientes potenciales llegan a un banco de acuerdo a un proceso de Poisson con tasa 2. El cliente entra solamente si el cajero está libre.

El tiempo de servicio en caja es en media de 2.

a) ¿Cuál es la tasa con la que los clientes entran en el banco?
b) ¿Qué proporción de clientes entran al banco?

El proceso comienza cuando hay un cliente en el banco.

a) tasa de llegada 2 $\Rightarrow$ media $1/2$ $\quad T\sim \exp(1/2)$

$$\mu = 2 + \frac{1}{2} = 2.5 \qquad \text{tasa} = \frac{1}{2.5} = \frac{2}{5}$$

$\uparrow$ propiedad de pérdida de memoria

b) Se tiene que

$$\underset{\text{favorables}}{\text{casos}} \to \frac{\frac{2}{5}}{\underset{\text{casos totales}}{2}} = \frac{1}{5} \leftarrow \text{Proporción de ingreso a un banco}$$

Tiempo de vida transcurrido: $\delta_t = t - W_{N_t}$
Tiempo de vida restante: $\gamma_t = W_{N_t+1} - t$
Tiempo total de vida: $\beta_t = \gamma_t + \delta_t = W_{N_t+1} - W_{N_t} = T_{N_t+1}$

Teoremas límite

$$\frac{N_t}{t} \longrightarrow \frac{1}{\mu} \text{ c.s.}, \quad \frac{m(t)}{t} \longrightarrow \frac{1}{\mu} \text{ c.s.} \quad \frac{W_{N_t}}{N_t} \longrightarrow \mu \text{ c.s.}$$

Función de renovación

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-s)\,dF(s)$$

Así, el costo promedio está dado por

$$\frac{E[C_{n+21}]}{E[T]}$$

$X \sim \text{Uniforme}(a,b)$

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$\mu = \frac{(a+b)}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

$X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$

$$\mu = \frac{n}{\lambda} \qquad \sigma^2 = \frac{n}{\lambda^2}$$

Jueves, 2 de febrero de 2023.

Sección: Renovación con Recompensa

Considere un proceso de renovación $\{N(t): t \geq 0\}$ con tiempos de estancia T_n, $n \geq 1$. Suponga que en cada renovación existe una recompensa.

Denotamos Y_n una recompensa ganada en el tiempo de la n-ésima renovación

Sea $Y(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_i$; $Y(t)$ representa la recompensa total al tiempo t

Denotamos por ω a $E[Y_i]$ y recordemos que $E[T] = \mu$.

Proposición 3.10 Si $E[Y] < +\infty$ y $E[T] < +\infty$, entonces

a) $\lim_{t \to +\infty} \frac{Y(t)}{t} = \frac{\omega}{\mu}$ c.s.

b) $\lim_{t \to +\infty} \frac{E[Y(t)]}{t} = \frac{\omega}{\mu}$ c.s.

Demostración

$$\frac{Y(t)}{t} = \frac{\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i}{t} \cdot \frac{N(t)}{N(t)} = \frac{\omega}{\mu}$$

Ruina de una aseguradora.

Reclamos llegan a una aseguradora de acuerdo a un proceso de Poisson con tasa λ.

↳ Los siniestros $Y_1, Y_2, \ldots$ son v.a. i.i.d. con distribución F, $E[Y] = \omega$ $E[T] = \mu$.

↳ Suponga que la aseguradora comienza con un capital x y recibe un ingreso a una tasa constante c por unidad de tiempo.

Bajo esta dinámica, ¿cuál es la probabilidad de ruina de la aseguradora?

$$R(x) = P\left\{ \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i > x + ct, \text{ para algún } t \geq 0 \right\}$$

¿Cuál es la tasa con la que se pagan los siniestros? $\omega\lambda$

Sea $\rho = \frac{\omega\lambda}{c}$, entonces

- si $\rho \geq 1$ existe ruina.
- analicemos el caso $\rho < 1$.

Consideremos lo que sucede en un intervalo de tiempo pequeño h.

Notemos que

$$R(x) = (1-\lambda h) R(x+ch) + \lambda h R(x+ch-E[Y_1]) + o(h)$$

Luego

$$\frac{R(x+ch)-R(x)}{ch} = \frac{\lambda}{c} R(x+ch) - \frac{\lambda}{c} E[R(x+ch-Y_1)] + \frac{o(h)}{ch}$$

Si $h \to 0$

$$R'(x) = \frac{\lambda}{c} R(x) - \frac{\lambda}{c} E[R(x-Y_1)]$$

$$R'(x) = \frac{\lambda}{c} R(x) - \frac{\lambda}{c} \int_0^{+\infty} R(x-y) f(y) dy$$

$$R'(x) = \frac{\lambda}{c} R(x) - \frac{\lambda}{c} \int_0^{x} R(x-y) f(y) dy - \frac{\lambda}{c} \int_x^{+\infty} f(y) dy$$

Así,

$$R'(x) = \frac{\lambda}{c} R(x) - \frac{\lambda}{c} \int_0^{x} R(x-y) f(y) dy - \frac{\lambda}{c} (1-F(x))$$

La solución a esta ecuación diferencial es única y está dada por

$$R(x) = R(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^x R(x-y)(1-F(y))\, dy - \frac{\lambda}{c} \int_0^x (1-F(y))\, dy \qquad x \geq 0$$

Veamos que sucede si se establecen las siguientes condiciones.

↳ F es la distribución de los Y_i
↳ $f_T(t) = \frac{1-F(t)}{\omega}$.

Con esto, calculemos la siguiente expresión

$$q(t) = E[\rho^{N(t)+1}]$$

luego

$$q(t) = \int_0^{+\infty} E[\rho^{N(t)+1} \mid T_1 = s] \frac{1-F(s)}{\omega} ds$$

donde

$$E[\rho^{N(t)+1} \mid T_1 = s] = \begin{cases} \rho\, E[\rho^{(N(t-s)+1)}] & \text{si } t \geq s \\ \rho & \text{si } s > t \end{cases}$$

Luego, sustituyendo

$$q(x) = \int_0^x \rho\, q(x-s) \frac{(1-F(s))}{\omega} ds + \rho \int_x^{+\infty} \frac{(1-F(s))}{\omega} ds$$

$$= \frac{\lambda}{c} \int_0^x q(x-s)(1-F(s)) ds + \frac{\lambda}{s}\left[\int_0^{+\infty} (1-F(s))ds - \int_0^x (1-F(s))\, ds\right]$$

$$= \frac{\lambda}{c} \int_0^x q(x-s)(1-F(s)) ds + \rho - \frac{\lambda}{c} \int_0^x F(s) ds$$

Observe que $q(0) = \rho$.

$\therefore$ $q(x)$ es la misma ecuación satisfecha por $R(x)$

Es decir, tenemos que

$$R(x) = q(x) = E[e^{N(x)+1}]$$

Si $x=0$, entonces $R(0)=p$

Sección: Confiabilidad

Función de estructura

Considere un sistema con n componentes, suponga que cada componente adquiere 2 posibles estados: funciona o falla.

Para establecer que el componente i está o no en funcionamiento, definimos la variable indicadora

$$X_i = \begin{cases} 1 & i \text{ funciona} \\ 0 & i \text{ no funciona} \end{cases}$$

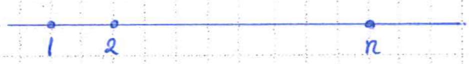
Al vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ lo llamaremos vector de estados.

Vamos a suponer que el hecho de que el sistema funcione depende completamente del vector de estados $\vec{x}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si el sistema funciona cuando el vector de estados es } \vec{x} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Sistema en serie

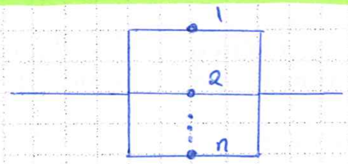
Funciona si todos los componentes funcionan



$$\varphi(\vec{x}) = \min(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

Sistema en paralelo

El sistema funciona si al menos 1 de los componentes funciona.



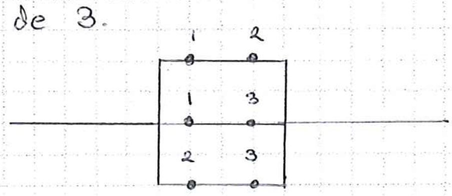
$$\varphi(\vec{x}) = \max(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-x_i)$$

Sistema k de n

El sistema funciona si al menos k de los n componentes están funcionando

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \\ 0 & \sum_{i=1}^{n} x_i < k \end{cases}$$

Ejemplo: Sistema 2 de 3.



Martes 7 de febrero de 2023.

Ejercicio. El tiempo de vida de un celular es una variable uniformemente distribuida en $(0,10)$. Considere la siguiente política de compra de un nuevo celular

a) Si el celular falla
b) Si el celular alcanza K años.

Suponga que un nuevo celular cuesta 300 dólares y que se incurre en un costo adicional de 50 dólares si falla.

Suponiendo que no existe ganancia por la reventa ¿Cuál es el costo medio a largo plazo por esta política?

¿Cuál es el tiempo K que minimiza este costo?

a)

Sea $Y(t)$ la recompensa al tiempo t.

$$Y(t) = \left[\underbrace{(300+50)\mathbb{1}_A(t)}_{\text{falla.}} + \underbrace{300 + \mathbb{1}_{A^c}(t)}_{\text{alcanza } T \text{ años}} \right]$$

$A :=$ El celular no falla antes del año K

$$E[Y(t)] = 350\,P(A^c) + 300(P(A))$$

$$P(A) = P(X \geq K) = 1 - P(X < T) = 1 - \frac{K-10}{10}$$

$$= 350\left(\frac{K-10}{10}\right) + 300\left(1 - \frac{K-10}{10}\right)$$

$$P(A^c) = 1 - \left(1 - \frac{K-10}{10}\right) = \frac{K-10}{10}$$

$$E[T] = \begin{cases} K & T \geq K \\ X & T < K \end{cases}$$

$$E[T] = \int_K^{10} K f(x)\,dx + \int_0^K X f(x)\,dx$$

$$= K[1 - F(K)] + \int_0^K x f(x)\,dx = K - \frac{K^2}{10} + \frac{K^2}{20}.$$

b)

$$\frac{w}{\mu} = \frac{300 + 5K}{K - \frac{K^2}{10} + \frac{K^2}{20}}$$

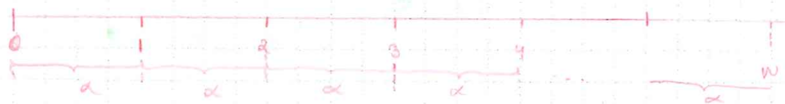
Ejercicio 2. Suponga que clientes llegan a una estación de tren de acuerdo a un proceso de renovación con tiempo interarribo μ.

Cuando existen N clientes en la fila el tren parte.

Si la estación incurre en un costo a una tasa de nc dólares por unidad de tiempo cuando hay n clientes esperando

¿Cuál es el costo medio a largo plazo incurrido por estación, si además cada vez que sale el tren se incurre en un costo fijo de d dólares?

$$\mu = E[T] = N \cdot \alpha$$



$$w = c\alpha + 2c\alpha + 3c\alpha + 4c\alpha + \cdots + (N-1)c\alpha$$

$$w = c\alpha(1 + 2 + \cdots + (N-1)) + d$$

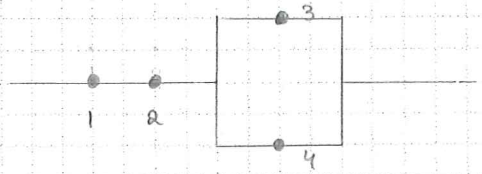
Así, la respuesta es $\frac{w}{\mu}$.

Ejercicio 3. Considere un sistema de 4 componentes. El sistema funciona si y solo si funcionan las componentes 1 y 2 y al menos uno de las componentes 3 y 4 está funcionando.

Diseñe el sistema.

Establezca $\varphi(\vec{x})$

a)



$$\phi(\vec{x}) = \min(x_1, x_2)\ \max(x_3, x_4)$$
$$= x_1 x_2 \left[1 - (1-x_3)(1-x_4)\right]$$
$$= x_1 x_2 (x_3 + x_4 + x_3 x_4)$$

Conjuntos de ruta y de corte

Un vector de estados $\vec{x}$ se llama vector de ruta si $\phi(\vec{x}) = 1$.

Notación: diremos que $\vec{y} < \vec{x}$ si $y_i \leq x_i$, $i = 1, \ldots, n$ con $y_i < x_i$ para algún i.

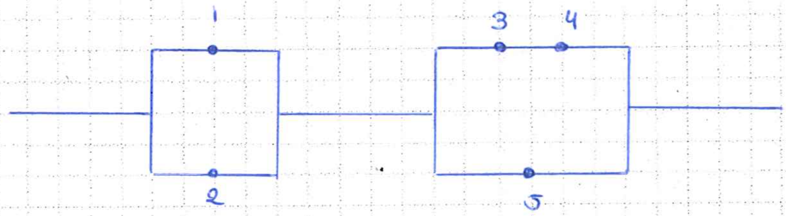
Si además, $\varphi(\vec{y}) = 0$ $\forall \vec{y} < \vec{x}$ entonces $\vec{x}$ es un vector de ruta mínima

Si $\vec{x}$ es un vector de ruta mínima, entonces el conjunto $A = \{ i : x_i = 1 \}$ es llamado conjunto de ruta minimal.

Para el ejercicio 3 (de este día), se tiene que

$$A_1 = \{1, 2, 3\} \qquad A_2 = \{1, 2, 4.\}$$

Ejercicio.

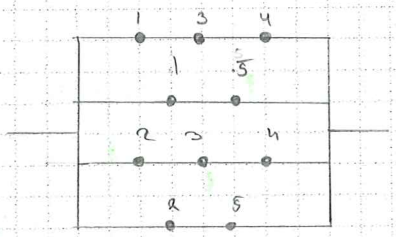


$\vec{x}_1 = (1, 0, 1, 1, 0)$ $\qquad$ $\vec{x}_3 = (0, 1, 1, 1, 0)$

$\vec{x}_2 = (1, 0, 0, 0, 1)$ $\qquad$ $\vec{x}_4 = (0, 1, 0, 0, 1)$

$A_1 = \{1, 3, 4\}$ $\qquad$ $A_3 = \{2, 3, 4\}$

$A_2 = \{1, 5\}$ $\qquad$ $A_4 = \{2, 5\}$



Miércoles 8 de febrero de 2023.

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_s$ los conjuntos de ruta mínima de un sistema dado. Definimos por $\alpha_j(\vec{x})$ a la función indicadora del j-ésimo conjunto de ruta mínima

$$\alpha_j(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si todos los componentes de } A_j \text{ están funcionando} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$= \prod_{i \in A_j} x_i$$

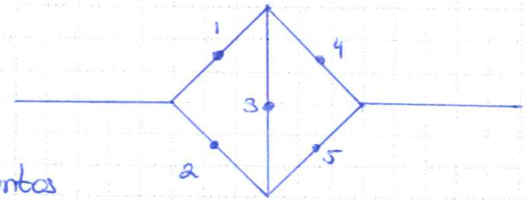
Por definición, el sistema funciona si todos los componentes de al menos un conjunto de ruta mínima están funcionando.

Es decir, si $\alpha_j(\vec{x}) = 1$ para algún j, entonces

$$\phi(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_j(\vec{x}) = 1 \text{ para algún } j \\ 0 & \text{si } \alpha_j(\vec{x}) = 0 \text{ para todo } j \end{cases}$$

$$= \max_j \alpha_j(\vec{x}) = \max_j \prod_{i \in A_j} x_i$$

Consideremos el siguiente diagrama.



¿Cuáles son los conjuntos de ruta mínima?

$\vec{x}_1 = (1, 0, 0, 1, 0)$ $\quad$ $\vec{x}_3 = (0, 1, 0, 0, 1)$ $\quad$ $\varphi(\vec{x}) = (1-(1-x_1x_4))(1-x_1x_3x_5)(1-x_2x_5)(1-x_2x_3x_4)$

$\vec{x}_2 = (1, 0, 1, 0, 1)$ $\quad$ $\vec{x}_4 = (0, 1, 1, 1, 0)$

$A_1 = \{1, 4\}$ $\quad$ $A_3 = \{2, 5\}$

$A_2 = \{1, 3, 5\}$ $\quad$ $A_4 = \{2, 3, 4\}$

Vector de corte.
Un vector de estados $\vec{x}$ es un vector de corte si $\varphi(\vec{x}) = 0$. Si además, $\varphi(\vec{y}) = 1$ para todo $\vec{y} > \vec{x}$, entonces $\vec{x}$ es un vector de corte mínimo. Si $\vec{x}$ es un vector de corte mínimo, entonces $C = \{i : x_i = 0\}$ es un conjunto de corte mínimo.

Es decir un conjunto de corte mínimo es el mínimo conjunto de componentes cuya falla asegura la falla del sistema.

Para el ejercicio anterior

Vectores de corte $\quad$ Conjuntos de corte mínimo

$\vec{x}_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$ $\quad$ $C_1 = \{1, 2\}$

$\vec{x}_2 = (0, 1, 0, 0, 0)$ $\quad$ $C_2 = \{4, 5\}$

$\vdots$ $\quad$ $C_3 = \{1, 3, 5\}$

$C_4 = \{2, 3, 4\}$

Sean $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_k$ los conjuntos de corte mínimo

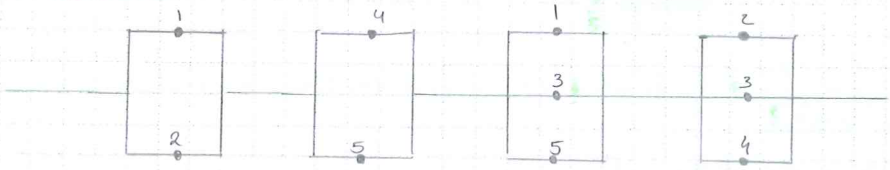
$$\beta_j(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si al menos un componente del } j\text{-ésimo conjunto de corte mínimo está funcionando} \\ 0 & \text{si todos los componentes del } j\text{-ésimo conjunto de corte no están funcionando} \end{cases}$$

$$= \max_{i \in C_j} x_i$$

Un sistema no funciona si y solo si todos los componentes de al menos un conjunto de corte mínimo no están funcionando

$$\varphi(\vec{x}) = \prod_{j=1}^{k} \beta_j(\vec{x}) = \prod_{j=1}^{k} \max_{i \in C_j} x_i$$

En el ejercicio anterior



$$\varphi(\vec{x}) = \max(x_1, x_2)\max(x_4, x_5)\max(x_1\ x_3\ x_5)\max(x_2\ x_3\ x_4)$$

Jueves, 9 de febrero de 2023.

Ahora asumiremos que X_i, el estado del componente i, es una v.a. tal que

$$P(X_i = 1) = p_i = 1 - P(X_i = 0)$$

confiabilidad del componente

Si definimos r por $r = P(\varphi(\vec{x}) = 1)$ donde $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces

confiabilidad del sistema $\rightarrow$ $r = P(\varphi(\vec{x}) = 1) = r(\vec{p})$

con $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$

Ejemplo 1: Sistema en serie

$$r(\vec{p}) = P(\varphi(\vec{x}) = 1)$$
$$= P(X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_n = 1)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = 1)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} p_i$$

Ejemplo 2: Sistema en paralelo

$$r(\vec{p}) = P(\varphi(\vec{x}) = 1)$$
$$= P\left(\begin{matrix}\text{Al menos un}\\ X_i = 1\end{matrix}, \ i = 1, \dots, n\right)$$
$$= 1 - P(X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_n = 0)$$
$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)$$

Ejemplo 3: Considere un sistema k de n. Si $p_i = p$, para todo $i = 1, \dots, n$, entonces

$$r(\vec{p}) = P(\varphi(\vec{x}) = 1)$$
$$= P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq k\right) \leftarrow \text{Es una distribución binomial}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Ejemplo 4: ¿Cuál es la confiabilidad de un sistema 2 de 3 si $P(X_i = 1) = p_i$?

$$r(\vec{p}) = P(\varphi(\vec{x}) = 1)$$
$$= P\left(\sum_{i=1}^{3} X_i \geq 2\right)$$
$$= P((X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) \cup (X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) \cup (X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) \cup (X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1))$$
$$= P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) + P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) + P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1)$$
$$= p_1(1-p_2)p_3 + (1-p_1)p_2 p_3 + p_1 p_2 (1-p_3) + p_1 p_2 p_3$$
$$= p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 + 2 p_1 p_2 p_3$$

Ejemplo 5. Considere un sistema con 5 componentes que funciona si y solo si el componente 1 y el componente 2 funcionan y al menos uno de los restantes funciones

$$r(\vec{p}) = p_1 p_2 \left(1 - (1-p_3)(1-p_4)(1-p_5)\right)$$

$$\varphi(\vec{x}) = x_1 x_2 \max(x_3, x_4, x_5).$$

Ahora, consideremos un sistema en el que el i-ésimo componente funciona durante un tiempo aleatorio con distribución F_i y luego falla.

Asumiremos que los tiempos de vida son independientes y queremos encontrar $r(\vec{p})$.
Si denotamos por F a la distribución del tiempo de vida del sistema, entonces

$$P\left(\begin{matrix}\text{tiempo de vida}\\ \text{del sistema}\end{matrix} > t\right) = P\left(\begin{matrix}\text{sistema esté funcionando}\\ \text{al tiempo } t\end{matrix}\right)$$
$$= r(P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t))$$

donde

$$P_i(t) = P(\text{El componente } i \text{ esté funcionando al tiempo } t)$$
$$= P(\text{Tiempo de vida del componente } i > t)$$
$$= 1 - F_i(t) = \overline{F_i}(t)$$

Es decir que

$$\overline{F}(t) = r(\overline{F_1}(t), \overline{F_2}(t), \dots, \overline{F_n}(t))$$

- Para un sistema serie se tiene que

$$\bar{F}(t) = \prod_{i=1}^{n} \bar{F}_i(t)$$

- Para un sistema en paralelo se tiene que

$$\bar{F}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} F_i(t)$$

En general, es interesante no solo estudiar la confiabilidad del sistema, sino también estudiar la función de tasa de fallo del mismo.

Para una función de distribución G continua definimos la tasa de falla de G, $\lambda(t)$, definida como

$$\lambda(t) = \frac{g(t)}{\bar{G}(t)} \qquad \text{donde} \quad g(t) = \frac{d}{dt} G(t).$$

Ejemplo: ¿Cuál es la distribución de tiempo de vida y tasa de falla de un sistema en paralelo con dos componentes, donde el i-ésimo componente tiene una distribución exponencial con media $1/i$, con $i=1,2$

El i-ésimo componente sigue una distribución exponencial de parámetro λ, i.e,

$$\hat{f}_i(t) = \frac{1}{i} e^{-it} \qquad \hat{F}(t) = 1 - e^{-it}$$

$$\hat{\bar{F}}(t) = e^{-}$$

Con esto

$$\bar{F}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{2} (F_i(t)) = 1 - (1-e^{-t})(1-e^{-2t})$$

$$= 1 - (1 - e^{-2t} - e^{-t} + e^{-3t})$$

$$= +e^{-2t} + e^{-t} - e^{-3t}$$

Por lo tanto,

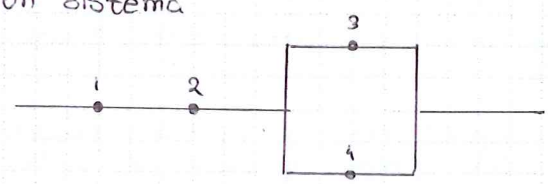
$$\lambda(t) = \frac{\frac{d}{dt} F(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{+2e^{-2t} + e^{-t} - 3e^{-3t}}{e^{-2t} + e^{-t} - e^{-3t}}$$

Finalicemos estudiando el tiempo medio de vida del sistema

$$\underset{\substack{\text{tiempo de vida}\\ \text{del sistema}}}{E[T]} = \int_0^{+\infty} P(T > t)\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} r(\bar{F}_1(t), \ldots, \bar{F}_n(t))\, dt$$

Ejemplo: Considere un sistema



¿Cuál es el tiempo medio de vida del sistema si el tiempo de vida del componente i está uniformemente distribuida $\mathcal{U}(0,i)$ con $i = 1,2,3,4$.

Notemos que

$$r(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \ldots, \bar{F}_4(t)) = \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t)(1 - F_3(t)F_4(t))$$

Luego

$$\bar{F}_1(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \qquad F_2(t) = \begin{cases} 1-t/2 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \qquad F_3(t) = \begin{cases} 1-t/3 & 0 \le t \le 3 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\bar{F}_4(t) = \begin{cases} 1-t/4 & 0 \le t \le 4 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Así,

$$r(\bar{F}_1(t), \ldots, \bar{F}_4(t)) = \begin{cases} (1-t)(1-t/2)(1-t^2/12) & 0 \le t \le 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

$$E[T] = \int_0^1 r(\bar{F}_1(t), \ldots, \bar{F}_n(t))\, dt$$

Sistemas con reparación (Jueves, 16 de febrero de 2022)

Consideremos un sistema con n componentes y función de confiabilidad $r(\vec{p})$. Suponga que el componente i funciona por un tiempo exponencialmente distribuido con tasa λ_i y falla; en el momento en el que falla, toma un tiempo exponencial con tasa μ_i para ser reparado y volver a funcionar $(i=1,2,\ldots,n)$. Todos los componentes trabajan idependientemente.
Suponga que al inicio todos los componentes están funcionando.

Sabemos que

$$\bar{F}(t) = P(\text{Sistema esté funcionando en } t)$$

$$\bar{F}(t) = r(\bar{F}_1(t), \ldots, \bar{F}_n(t))$$

donde

$$\bar{F}_i(t) = P(\text{componente } i \text{ esté funcionando en } t)$$

Pregunta 1: $\bar{F}_i(t) = ?$

Los componentes tienen la dinámica de un proceso Markoviano a tiempo continuo de dos estados.

Por lo tanto,

$$\bar{F}_i(t) = p_{00}(t) = \frac{\mu_i}{\mu_i+\lambda_i} + \frac{\lambda_i}{\mu_i+\lambda_i} e^{-(\lambda_i+\mu_i)t}$$

Pregunta 2: Si el sistema es un sistema en serie, $\bar{F}(t) = ?$

Con la respuesta de la pregunta anterior, se tiene que

$$\bar{F}(t) = \prod_{i=1}^{n} \bar{F}_i(t)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\mu_i}{\mu_i+\lambda_i} + \frac{\lambda_i}{\mu_i+\lambda_i} e^{-(\mu_i+\lambda_i)t} \right)$$

Pregunta 3: ¿Cuál es la confiabilidad límite de este sistema en serie? (a largo plazo)

$$\bar{F} = \lim_{t\to+\infty} \bar{F}(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{\mu_i+\lambda_i}$$

Pregunta 4. $\bar{F}(t)$ y $\bar{F}$ si el sistema está estructurado en paralelo

$$\bar{F}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i+\lambda_i} \left(1 - e^{-(\lambda_i+\mu_i)t}\right) \right)$$

$$\bar{F} = 1 - \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}$$

Observe que el sistema alterna entre periodos donde está funcionando y periodos donde está en reparación. Denotaremos a estos periodos por U_j y D_j, respectivamente, $j \geq 1$.

Sean

$$\bar{U} = \lim_{n\to+\infty} \frac{U_1 + U_2 + \cdots + U_n}{n} \quad \text{y} \quad \bar{D} = \lim_{n\to+\infty} \frac{D_1 + D_2 + \cdots + D_n}{n}$$

las longitudes medias de funcionamiento y reparación del sistema, respectivamente.

Objetivo: Determinar $\bar{U}$ y $\bar{D}$, para esto:
Construiremos un sistema de ecuaciones con dos incognitas

Primera ecuación

Pregunta 5: En los primeros n-ciclos el sistema habrá estado en funcionamiento por cuánto tiempo? ¿Cuál es la proporción de tiempo de funcionamiento del sistema en los primeros n-ciclos?

n ciclos $:= \sum_{i=1}^{n} U_i + D_i$	cuanto tiempo funciona hasta el ciclo n $= \sum_{i=1}^{n} U_i$	Proporción de tiempo de funcionamiento $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n} U_i}{\sum_{i=1}^{n} U_i + D_i}$

Con lo anterior, se sigue que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} U_i}{\sum_{i=1}^{n} U_i + D_i} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right)/n}{\left(\sum_{i=1}^{n} U_i + D_i\right)/n} \to \frac{\bar{U}}{\bar{U}+\bar{D}}$$

Cuando $n\to+\infty$, converge para la proporción de tiempo que el sistema funciona a largo plazo, esto es converge a $\bar{F}$. luego

$$\frac{\bar{U}}{\bar{U}+\bar{D}} = r\left(\frac{\mu_1}{\mu_1+\lambda_1}, \dots, \frac{\mu_n}{\mu_n+\lambda_n}\right)$$

función de confiabilidad

[1]

Segunda Ecuación

Para la segunda ecuación vamos a establecer la tasa con la que el sistema falla. Para esto

Pregunta 6: ¿Cuántas fallas hay en el sistema en el tiempo $\sum_{i=1}^{n} D_i + U_i$?

$$\text{Tasa de falla del sistema} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} U_i + \sum_{i=1}^{n} D_i} = \frac{1}{\bar{U}+\bar{D}}$$

Debemos calcular de manera explícita la tasa de falla del sistema para obtener nuestra segunda ecuación

Para esto, usaremos el concepto de probabilidad total condicionado a que la falla del componente i ocasiona la falla del sistema.

Esto es: El sistema va de U para D cuando el componente i falla si los estados de los $n-1$ componentes $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, \dots, x_n)$ son tales que

$$\phi(1_i, \vec{x}) = 1 \qquad \phi(0_i, \vec{x}) = 0$$

es decir

$$\varphi(1_i, \vec{x}) - \varphi(0_i, \vec{x}) = 1.$$

Pregunta 7. El componente i tiene una falla a cada cuánto tiempo?

$$\frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\mu_i}$$

La tasa de falla del componente i es $\dfrac{1}{\frac{1}{\lambda_i}+\frac{1}{\mu_i}} = \dfrac{\lambda_i\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}$

Calculemos ahora:

$$P(\varphi(1_i, \vec{x}) - \varphi(0_i, \vec{x}) = 1) = E[\varphi(1_i, \vec{x})] - E[\varphi(0_i, \vec{x})]$$

variable aleatoria de Bernoulli

$$= r\left(1_i, \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) - r\left(0_i, \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$$

vector de componentes

Por lo tanto, la tasa de fallo del sistema es

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\left[r\left(1_i, \frac{\mu}{\mu+\lambda}\right) + r\left(0_i, \frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)\right]$$

y tenemos nuestra segunda ecuación

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\left[r\left(1_i, \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) - r\left(0_i, \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\right]$$

luego

$$\bar{U} = \frac{r\left(\frac{\mu_1}{\mu_1+\lambda_1}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\left(r\left(1_i, \frac{\mu_1}{\mu_1+\lambda_1}\right) + r\left(0_i, \frac{\mu_1}{\mu_1+\lambda_1}\right)\right)}$$

$$\bar{D} = \frac{\left(1 - r\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1+\mu_1}\right)\right)\bar{U}}{r\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1+\mu_1}\right)}$$

Miércoles, 22 de febrero de 2023.

Corrección - Prueba 1 - Bimestre 2.

$\{N(t): t \geq 1\}$ Poisson $\lambda 3$.

a) $P(N(2)=3, N(6)=3) = P(N(6)=3 \mid N(2)=3)\, P(N(2)=3)$
$= P(N(6)-N(2)=0)\, P(N(2)=3)$
$= P(N(4)=0)\, P(N(2)=3)$
$= \dfrac{e^{-3\cdot 4}(3.4)^0}{0!} \cdot \dfrac{e^{-3\cdot 2}(3\cdot 2)^3}{3!}$

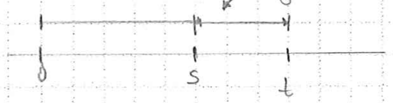
b) $E[N(3)-N(2) \mid N(2) \geq 1] = E[N(3)-N(2) \mid N(2) \geq N(0)]$
$= E[N(3)-N(2)]$
$= E[N(3)] - E[N(2)]$
$= 3\cdot(3-2) = 3$

c) $P(N(2)=3 \mid N_2 = 1.8) = P(N(2)-N(1.8)=1)$
$= P(N(0.2)=1)$
$= e^{-3\cdot(0.2)}(3)(0.2)$

Idependientes pues son incrementos.

d) $P(W_1 \leq s \mid N(t)=1) = \dfrac{P(W_1 \leq s,\ N(t)=1)}{P(N(t)=1)} = \dfrac{P(1 \text{ evento en } [0,s],\ 0 \text{ eventos en }]s,t])}{e^{-\lambda t}(\lambda t)}$

ningún evento



$= \dfrac{e^{-\lambda s}\lambda s \cdot e^{-\lambda(t-s)}\dfrac{(\lambda(t-s))^0}{0!}}{e^{-\lambda t}\lambda t}$

$= \dfrac{s}{t}.$

Pregunta 2.

N trabajadores.
↳ El trabajador que no use el dispositivo en t, comenzará a usarlo en $[t, t+h]$ con probabilidad $\lambda h + o(h)$
↳ El trabajador que usa el dispositivo en t dejará de utilizarlo en $[t, t+h]$ con probabilidad $\mu h + o(h)$

$X_t :=$ # de trabajadores usando el dispositivo en t.

Generador infinitesimal

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & N-1 & N \\
\hline
0 & -N\lambda & N\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & \mu & -\mu-(N-1)\lambda & (N-1)\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
2 & 0 & 2\mu & -2\mu-(N-2)\lambda & (N-2)\lambda & \cdots & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 3\mu & & \ddots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\
N-1 & 0 & 0 & 0 & & (N-1)\mu & -\lambda-(N-1)\mu & \lambda \\
N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N\mu & -N\mu
\end{array}$$

Prueba 2 - Bimestre 2.

Pregunta 1.

Partículas A y B

\# partículas → (m) A   \# partículas → (n) B

$A \rightarrow B \quad exp(\alpha)$
$B \mapsto 2A \quad exp(\beta)$

a) tasa $A \rightarrow B$?

$m\alpha$

b) tasa $B \rightarrow 2A$?

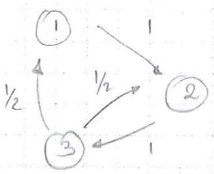
$n\beta$.

c) Probabilidades de salto

posibilidades de cambio $\begin{cases} (m,n) \rightarrow (m-1, n+1) \\ (m,n) \mapsto (m+2, n-1) \end{cases}$

$$P_{(m,n);(m-1,n+1)} = \frac{m\alpha}{m\alpha + n\beta} \qquad P_{(m,n);(m+2,n-1)} = \frac{n\beta}{m\alpha+n\beta}$$

Pregunta 2.



$\pi Q = 0$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}$$

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i P_{ij} & i \neq j \\ -\lambda_i & i = j \end{cases}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix}$$

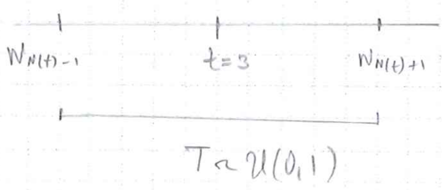
Resolvemos $\pi Q = 0$ con

$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

Prueba 3 - Bimestre 3.

Pregunta 2.

Renovación $T \sim U(0,1)$ ¿Cuál es el tiempo esperado desde $t=3$ hasta el próximo evento de renovación



$E[\gamma_t] = \mu(m(t)+1) - 3$

con $\mu = E[T]$

$m(t) = E[N_t] \Rightarrow m(t) = e^t - 1$

Así

$$E[\gamma_3] = \frac{1}{2}(e^3 - 1 + 1) = \frac{e^3}{2} - 3.$$

Jueves, 23 de febrero de 2023.

Capítulo 4: Martingalas.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad.
Consideremos sucesiones no decrecientes de subálgebras

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_3 \subseteq \ldots$$

Por ejemplo, para un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n : n \geq 1\}$ puede construirse la sucesión $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq1}$ tal que

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \leftarrow \text{Filtración canónica.}$$

En el caso continuo, los conceptos son análogos: una filtración es una colección no numerable de sub-σ-álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ tales que

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \qquad \text{para} \qquad 0 \leq s \leq t$$

La filtración natural de un proceso continuo $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es la colección de sub-σ-álgebras $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ dadas por

Historia del proceso al tiempo t

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq X_t\}$$

$\mathcal{F}_t$ es la mínima σ álgebra que hace que cada X_s con $s \in [0,t]$ sea medible.

Definición 4.1. Se dice que un proceso estocástico $\{X_n : n \geq 1\}$ es adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$ si la v.a. X_n es $\mathcal{F}_n$ medible para cada $n \geq 1$.

Observación: Note que X_n es $\mathcal{F}$ medible, para que sea adaptado es necesario que X_n sea una v.a. respecto a la sub-σ álgebra $\mathcal{F}_n$

Observación: Todo proceso es adaptado a su filtración natural.

Definición 4.2. Se dice que el proceso $\{X_n : n \geq 1\}$ es predecible respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ si para todo $n \geq 1$, X_n es $\mathcal{F}_{n-1}$ medible.

Definición 4.3. Se dice que un proceso a tiempo discreto $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una Martingal respecto a $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$ si

a) Es integrable
b) Es adaptado a $\{\mathcal{F}_n\}$
c) Para todo $n \leq m$

$$E[X_m \mid \mathcal{F}_n] = X_n \qquad \text{c.s.}$$

- Cuando en lugar de c) se cumple la desigualdad

$$E[X_m \mid \mathcal{F}] \geq X_n$$

entonces el proceso es un submartingal.

- Si $E[X_m \mid \mathcal{F}_n] \leq X_n$ el proceso es un supermartingal
- Si $\{X_n : n \geq 1\}$ es un submartingal, entonces $\{-X_n : n \geq 1\}$ es un supermartingal
- Si tomamos la esperanza en c), entonces

$$E[X_n] = E\Big[E[X_m \mid \mathcal{F}_n]\Big] = E[X_m].$$

Observaciones.
- Un martingal tiene esperanza constante
- Un submartingal cumple que $E[X_m] \geq E[X_n]$
- Un supermartingal cumple que $E[X_m] \leq E[X_n]$.

Definición 4.4. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, X una v.a. integrable y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sub σ-álgebra. La esperanza condicional de X dada $\mathcal{G}$ ($E[X \mid \mathcal{G}]$) es la clase de funciones $\mathcal{G}$-medibles tales que

$$\int_A \underbrace{E[X \mid \mathcal{G}]}_{Z \text{ v.a.}} \, dP = \int_A X \, dP \qquad \forall A \in \mathcal{G}$$

- $X \in \mathcal{F}$-medible $\qquad E[X \mid \mathcal{G}] \in \mathcal{G}$

Lema 4.5 Sea $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, entonces

$$E[E[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{H}] = E[X \mid \mathcal{H}] = E[E[X \mid \mathcal{H}] \mid \mathcal{G}]$$

Demostración

El lado derecho del lema es trivial. Vamos a demostrar el lado izquierdo

Para todo $A \in \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$

$$\int_A E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}]\, dP = \int_A E[X|\mathcal{G}]\, dP = \int_A X\, dP = \int_A E[X|\mathcal{H}]\, dP$$

Ejercicio. Demostrar que la condición c)

$$E[X_m|\mathcal{F}] = X_n \qquad \forall\, m \geq n$$

es equivalente a la igualdad

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}] = X_n$$

Demostración

$\Rightarrow$) Directo.

$\Leftarrow$) Supongamos que se cumple que

$$X_n = E[X_{n+1}|\mathcal{F}]$$

Vamos a probar que

$$E[X_m|\mathcal{F}] = X_n.$$

Notemos que

$$E[X_m|\mathcal{F}_n] = E[E[X_m|\mathcal{F}_{m-1}]] = E[X_{m-1}|\mathcal{F}_n] = E[E[X_{m-1}|\mathcal{F}_{n-2}]|\mathcal{F}_n]$$

$$\vdots$$

$$= E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n.$$

Ejercicio 2. Sea $\xi_1, \xi_2, \ldots$ una sucesión de v.a. i.i.d con esperanza finita. Sea $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ y sea $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. ¿$\{X_n : n \geq 1\}$ es un martingal?

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[\xi_{n+1} + \xi_n + \cdots + \xi_1|\mathcal{F}_n] = E[\xi_n + \cdots + \xi_1|\mathcal{F}_n] + E[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n]$$

$$= X_n + E[\xi_{n+1}]$$

Así, no es un martingal, excepto si $E[\xi_{n+1}] = 0$.

Ejercicio 3. Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson con parámetro λ. $\{X_t - \lambda t : t \geq 0\}$ es martingal.

Vamos a probar la tercera propiedad

P.D. $\forall\, 0 \leq s \leq t$ $\quad E[X_t - \lambda t|\mathcal{F}_s] = X_s - \lambda s.$

Notemos que

$$E[X_t + X_s - X_s + \lambda s - \lambda s - \lambda t|\mathcal{F}_s] = E[X_t + (X_s - \lambda s) - (X_s - \lambda s) - \lambda t|\mathcal{F}_s]$$

$$= E[(X_t - \lambda t) - (X_s - \lambda s)|\mathcal{F}_s] + E[X_s - \lambda s|\mathcal{F}_s]$$

$$= E[(X_t - \lambda t) - (X_s - \lambda s)] + X_s - \lambda s$$

$$= (\lambda t - \lambda t) - (\lambda s - \lambda s) + X_s - \lambda s$$

$$= X_s - \lambda s.$$

Por lo tanto, sí es un Martingal.

Ejercicio 4. Demuestre que $X_n = E[X|\mathcal{F}_n]$ es un martingal. Donde X es una v.a. integrable y $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 1}$ es una filtración dado.

P.D $\quad E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$.

$$E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = E[E[X \mid \mathcal{F}_{n+1}] \mid \mathcal{F}_n] = E[X \mid \mathcal{F}_n] = X_n.$$

Las primeras condiciones se cumplen.

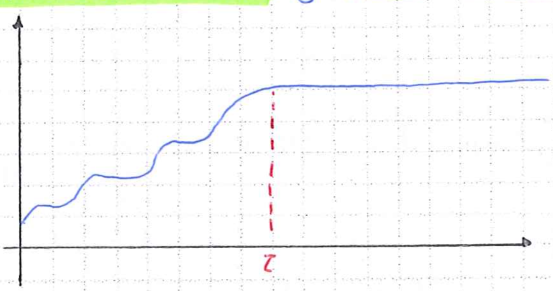
Lunes, 27 de febrero de 2023.

Procesos detenidos

Sea $\{X_n\}_{n\geq 0}$ un proceso estocástico adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ y sea τ un tiempo de paro respecto a la misma filtración

$X_{\tau\wedge n}$ es un proceso detenido si se lo define como

$$X_{\tau\wedge n} = \begin{cases} X_n & n \leq \tau \\ X_\tau & n > \tau \end{cases}$$



donde $\tau\wedge n = \min\{\tau, n\}$.

Adaptabilidad

$$(X_{\tau\wedge n} \leq x) = \underbrace{\left[\bigcup_{k=1}^{n} (\tau = k) \cap (X_k \leq x)\right] \cup \left[(\tau > n) \cap (X_n \leq x)\right]}_{\mathcal{F}_n \text{ medible. (Adaptado)}}$$

Medibilidad

$$E|X_{\tau\wedge n}| = E[|X_\tau| \mathbb{1}(\tau \leq n)] + E[|X_\tau| \mathbb{1}(\tau > n)]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E[|X_k| \mathbb{1}(\tau = k)] + E[|X_n| \mathbb{1}(\tau > n)]$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} E|X_k| + E|X_n| < +\infty \qquad \text{Si } \{X_n\} \text{ es integrable}$$

Proposición 4.6. Si $\{X_n : n \geq 0\}$ es un martingal, submartingal o supermartingal y τ es un tiempo de paro respecto a la misma filtración, entonces $\{X_{\tau\wedge n} : n \geq 0\}$ también lo es.

Demostración

P.D. $E[X_{\tau\wedge(n+1)} \mid \mathcal{F}_n] = X_{\tau\wedge n}$

Notemos que

$$E[X_{\tau\wedge(n+1)} \mid \mathcal{F}_n] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k \mathbb{1}(\tau = k) \mid \mathcal{F}_n] + E[X_{n+1} \mathbb{1}(\tau > n) \mid \mathcal{F}_n]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}(\tau = k) + E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \mathbb{1}(\tau > n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}(\tau = k) + X_{n+1} \mathbb{1}(\tau > n)$$

$$= X_{\tau\wedge n}.$$

Teorema 4.7. - Teorema de paro opcional - Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ un martingal y sea τ un tiempo de paro finito, ambos respecto a $\{\mathcal{F}_n : n \geq 1\}$ tales que

a) X_τ es integrable

b) $\lim_{n\to+\infty} E[X_n \mathbb{1}(\tau > n]$

Entonces

$$E[X_\tau] = E[X_n] \qquad n \geq 1.$$

Demostración

Es fácil ver la siguiente igualdad

$$X_\tau = X_{\tau\wedge n} + (X_\tau - X_n)\, \mathbb{1}(\tau>n)$$

$$E[X_\tau] = E[X_{\tau\wedge n}] + E[X_\tau \mathbb{1}(\tau>n)] - E[X_n \mathbb{1}(\tau>n)]$$
$$= E[X_1]$$

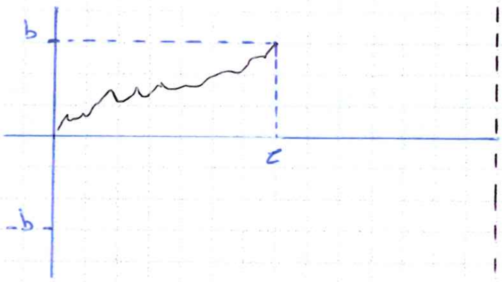
Observe que el tercer sumando se elimina por hipótesis y en el segundo usando la integrabilidad de X_τ y convergencia dominada tenemos (cuando $n\to+\infty$)

$$E[X_\tau] = E\left[\sum_{k=1}^{+\infty} X_k \mathbb{1}(\tau=k)\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} E[X_k \mathbb{1}(\tau=k)] < +\infty.$$

Ejercicio. Sea $\{X_n : n\geq 0\}$ un paseo aleatorio simple simétrico sobre $\mathbb{Z}$ iniciando en cero. Sea $b\geq 1$ un entero cualquiera y sea

$$\tau = \min\{n\geq 1 : |X_n| = b\}.$$

¿Cuál es $E[\tau]$?



Para la solución

① Demuestre que $\{X_n^2 - n : n\geq 0\}$ es martingal

② Demuestre que las condiciones de paro opcional se cumplen

Dado ① y ② tenemos que

$$E[X_\tau^2 - \tau] = E[X_1^2 - 1] = 0$$
$$b = E[X_\tau^2] = E[\tau]$$

Ejercicio 2. Considere el ejercicio anterior pero ahora definimos a τ como sigue

$$\tau = \min\{n\geq 0 : X_n = b \text{ ó } X_n = -a\}. \qquad a+b$$

$a, b \in \mathbb{N}$. ¿$E(\tau)$?

Supongamos que $\{X_n^2 - n : n\geq 0\}$ es un martingal.

$$E[X_\tau^2 - \tau] = E[X_1^2 - 1] = 0$$

$$E[\tau] = E[X_\tau^2] = \sum_{k\in A} k\, P(X_\tau^2 = k) \qquad A = \{a^2, b^2\}$$
$$a^2 P(X_\tau^2 = a^2) + b^2 P(X_\tau^2 = b^2)$$

① $P(X_\tau = a) = 1 - P(X_\tau = b)$

② X_n cumple con las condiciones de paro opcional

$$E[X_\tau] = E[X_1] = 0$$
$$-a P(X_1 = a) + b P(X_1 = b) = 0$$

$$0 = -a P(X_\tau = a) + b P(X_\tau = b)$$
$$0 = -a(1 - P(X_\tau = b)) + b P(X_\tau = b)$$
$$0 = -a + a P(X_\tau = b) + b P(X_\tau = b)$$
$$a = P(X_\tau = b)(a+b)$$
$$P(X_\tau = b) = \frac{a}{a+b}$$
$$P(X_\tau = a) = 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}$$

Reemplazando en lo anterior

$$E[X_\tau^2] = a^2\left(\frac{b}{a+b}\right) + b^2\left(\frac{a}{a+b}\right)$$
$$= \frac{a^2 b + b^2 a}{a+b}$$
$$= \frac{ab(a+b)}{a+b} = ab$$

Desigualdad Maximal de Doob

Sea $\{X_n : n \geq 0\}$ un submartingal positivo en $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ y $\lambda > 0$ una constante arbitraria entonces

$$P\left(\max_{0\leq k\leq n} X_k \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} E\left(X_n \mathbb{1}_{\{\max_{0\leq k\leq n} X_k \geq \lambda\}}\right)$$

Demostración

Sea $X_n^* = \max_{0\leq k\leq n} X_k$. Sea $\tau = \min\{k \leq n : X_k \geq \lambda\}$ si existe un $k \leq n$ tal que $X_k \geq \lambda$ y $\tau = n$ c.c.

① Note que $E[X_n] \geq E[X_\tau]$ pues $\tau \leq n$.

$$\begin{aligned} E[X_\tau] &= E[X_\tau \mathbb{1}_{\{X_n^* \geq \lambda\}}] + E[X_\tau \mathbb{1}_{\{X_n^* < \lambda\}}] \\ &\geq E[\lambda \mathbb{1}_{\{X_n^* \geq \lambda\}}] + E[X_n \mathbb{1}_{\{X_n^* < \lambda\}}] \\ &= \lambda P(X_n^* \geq \lambda) + E[X_n \mathbb{1}_{\{X_n^* < \lambda\}}] \end{aligned}$$

De [1], note que

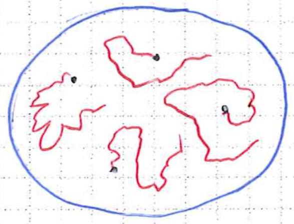
$$E[X_n] \geq E[X_\tau] \geq \lambda P(X_n^* \geq \lambda) + E[X_n \mathbb{1}_{\{X_n^* < \lambda\}}]$$

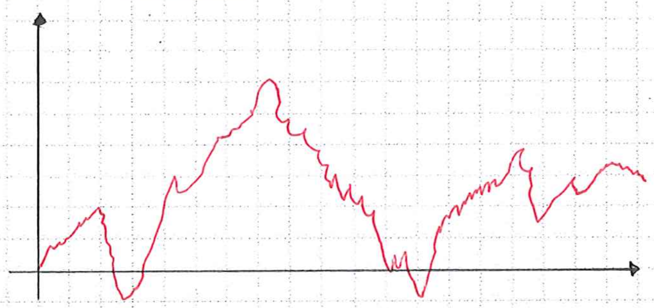
$$\Rightarrow \quad \lambda P(X_n^* \geq \lambda) \leq E[X_n] - E[X_n \mathbb{1}_{\{X_n^* < \lambda\}}]$$

$$\Rightarrow \quad P(X_n^* \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} E[X_n \mathbb{1}_{\{X_n^* \geq \lambda\}}]$$

Martes, 28 de febrero de 2023.

Capítulo 5: Movimiento Browniano





Definición 5.1 Un movimiento Browniano (M.B) en una dimensión (unidimensional) de parámetro σ^2 es un proceso estocástico $\{B_t : t \geq 0\}$ con valores en $\mathbb{R}$ que cumple con las siguientes propiedades

a) $B_0 = 0$ c.s.
b) Las trayectorias son continuas
c) El proceso tiene incrementos independientes
d) $\forall\, 0 \leq s \leq t \quad B_t - B_s \sim N(0, \sigma^2(t-s))$ } Los incrementos son estacionarios

Por c) y d) se sigue que

$$\forall\, 0 < t_1 < \cdots < t_n$$

y para cualesquiera conjuntos de Borel $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $\mathbb{R}$

$$P(B_{t_1} \in A_1, B_{t_2} \in A_2, \ldots, B_{t_n} \in A_n) = \int_{A_1} \cdots \int_{A_n} p(t_1, 0, x_1)\, p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n)\, dx_n \cdots dx_1$$

donde

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2 t}}$$

[*]

Función de transición

La función $p(t,x,y)$ definida en [*] se llama función de transición de probabilidad del movimiento Browniano con parámetro σ^2.

La probabilidad de que un movimiento Browniano que inicia en x se encuentre en $A \subseteq \mathbb{R}$ después de t unidades de tiempo es

$$p(t,x,A) = \int_A p(t,x,y)\,dy$$

Por lo tanto,

$\{x + B_t : t \geq 0\}$ también se escribe $\{B_t^x : t \geq 0\}$.

- Si la partícula es puesta al azar en la recta real de acuerdo a la densidad $f(x)$, entonces la densidad de probabilidad de la posición de la partícula después de t unidades de tiempo es

$$f(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,p(t,y,x)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,p(t,x,y)\,dy = E[f(B_t^x)] \qquad [A]$$

De [A] puede demostrarse que

- $\dfrac{\partial}{\partial t} f(t,x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x)$
- $\dfrac{\partial p}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} p$
- $p(t+s,x,y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p(t,x,\mu)\,p(s,\mu,y)\,d\mu$

Proposición 5.2. El M.B. es un proceso Markoviano

Demostración

P.D. $P(B_{t_{n+1}} \in A \mid B_{t_1} = x_1, B_{t_2} = x_2, \ldots, B_{t_n} = x_n) = P(B_{t_{n+1}} \in A \mid B_{t_n} = x_n) = \dfrac{P(B_{t_{n+1}} \in A, B_{t_n} = x_n)}{P(B_{t_n} = x_n)}$

Notemos que

$$P(B_{t_{n+1}} \in A \mid B_{t_1} = x_1, B_{t_2} = x_2, \ldots, B_{t_n} = x_n)$$

$$= \frac{P(B_{t_{n+1}} \in A, B_{t_n} = x_n, \ldots, B_{t_1} = x_1)}{P(B_{t_{n+1}} \in A)}$$

Luego, como

$$P(B_{t_{n+1}} \in A, B_{t_n} = x_n, \ldots, B_{t_1} = x_1) = \int_A \int_{A_n} \cdots \int_{A_1} p(t_1,0,x_1)\,p(t_2-t_1,x_1,x_2)\cdots p(t_n-t_{n-1},x_{n-1},x_n)\,dx_n \ldots d$$

Con $A_n = \{B_{t_n} = x_n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte

$$P(B_{t_{n+1}} \in A) = \int_A p(t_1,0,x)\,p(t_2-t_1,x_1,x_2)\cdots p(t_n-t_{n-1},x_{n-1},x_n)\,dx_n \cdots d$$

Otra forma

$$P(B_{t_{n+1}} \in A \mid B_{t_1} = x_1, B_{t_2} = x_2, \ldots, B_{t_n} = x_n)$$

$$= \frac{1}{P(B_{t_1} = x_1, B_{t_2} = x_2, \ldots, B_{t_n} = x_n)} P(B_{t_{n+1}} \in A, B_{t_1} = x_1, B_{t_2} = x_2, \ldots, B_{t_n} = x_n)$$

$$= \frac{p(t_1,0,1)\,p(t_2-t_1,x_1,x_2)\cdots p(t_{n+1},x_n,A)}{p(t_1,0,1)\cdots p(t_n-t_{n-1},x_{n-1},x_n)}$$

$$= P(t_{n+1} - t_n, x_n, A) \cdot \frac{P(t_n, 0, x_n)}{P(t_n, 0, x_n)} = P(B_{t_{n+1}} \in A \mid B_{t_n} = x_n)$$

Proposición 5.3. El M.B. es un martingal

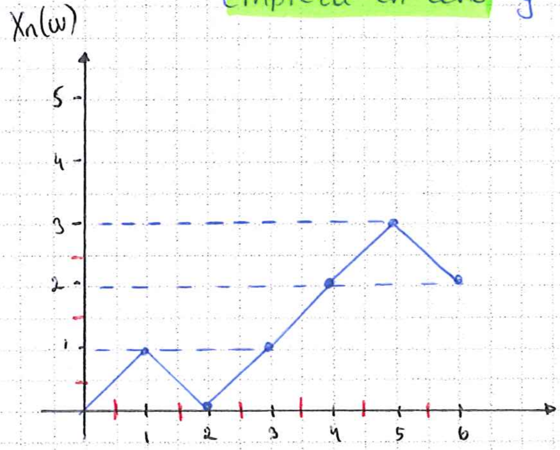
Demostración

P.D. $E[B_t \mid \mathcal{F}_s] = B_s$ con $0 \leq s \leq t$

Notemos que

$$\begin{aligned} E[B_t \mid \mathcal{F}_s] &= E[B_t + B_s - B_s \mid \mathcal{F}_s] \\ &= E[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s] + E[B_s \mid \mathcal{F}_s] \\ &= E[B_t - B_s] + B_s \\ &= E[B_t] - E[B_s] + B_s \\ &= 0. \end{aligned}$$

Teorema 5.4. Un proceso $\{X_t : t \geq 0\}$ es un M.B si y solo si tiene trayectorias continuas, empieza en cero y tanto $\{X_t : t \geq 0\}$ cuanto $\{X_t^2 - t : t \geq 0\}$ son martingalas.



- Considere un paseo aleatorio simple simétrico sobre $\mathbb{Z}$, $\{X_n : n \geq 0\}$ comenzando en cero. Esto es

$$X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n \qquad \text{con} \quad \xi_i = \begin{cases} 1 & p = 1/2 \\ -1 & p = 1/2 \end{cases}$$

Suponga que ahora caminamos en pasos cada vez más pequeños. Es decir, los pasos son ahora de tamaño Δt.
Suponga que a cada tiempo Δt damos un paso Δx hacia arriba o hacia abajo
$\sqrt{\Delta t}$
Si bajo este reescalamiento $X(t)$ es la posición de la partícula al tiempo t entonces

- $X(t) = \Delta x \left(\xi_1 + \cdots + \xi_{n[t/\Delta t]} \right)$ parte entera
- $E[X_t] = 0$
- $Var(X_t) = \Delta x^2 \left[\frac{t}{\Delta t} \right]$ $\quad \begin{matrix} \Delta x \to 0 \\ \Delta t \to 0 \end{matrix}$ $\quad \{ \quad Var(X_t) = 0$

Miércoles, 1 de marzo de 2023. (Ejercicios de repaso).

Problema 1. Considere las siguientes variables ξ_j, con $j = 1, 2, \ldots$ aleatorias i.i.d. con distribución

$$P(\xi_i = 1) = p \quad \text{y} \quad P(\xi_i = -1) = q = 1 - p$$

y sea $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_j : j \in \{1, \ldots, n\}\}$ con $n \geq 0$ su filtración natural. Sea

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \qquad n \geq 0$$

a) Pruebe que $M_n = (q/p)^{S_n}$ es un $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ martingal

b) Para $\lambda > 0$ determine $c = c(\lambda)$ tal que $Z_n^\lambda = c^n \lambda^{S_n}$ sea un $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ martingal

literal a)

- P.D. M_n es integrable.

Notemos que

$$E[M_n] = E[(q/p)^{S_n}] = E[(q/p)^{\xi_1+\cdots+\xi_n}]$$
$$= E[(q/p)^{\xi_1}] \cdots E[(q/p)^{\xi_n}]$$

Así, como

$$E[(q/p)^{\xi_i}] = p(q/p)^1 + q(q/p)^{-1} = q + p = 1$$

Por lo tanto,

$$E[M_n] = \underbrace{1 \cdots 1}_{n\text{-veces}} = 1 < +\infty$$

De esta manera, M_n es integrable para cada $n \in \mathbb{N}$.

- M_n es $\mathcal{F}_n$-medible

Puesto que $\mathcal{F}_n$ es la filtración dada por los ξ_i, entonces como la suma de funciones medibles es medible, y dado que la aplicación $t \mapsto (q/p)^t$ es continua y por lo tanto medible y como la composición de funciones medibles es medible, entonces M_n es adaptada a $\mathcal{F}_n$

- PD $E[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n$

Notemos que

$$E[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[(q/p)^{S_{n+1}} | \mathcal{F}_n]$$
$$= E[(q/p)^{\xi_1+\cdots+\xi_{n+1}} | \mathcal{F}_n]$$
$$= E[(q/p)^{S_n} (q/p)^{\xi_{n+1}} | \mathcal{F}_n]$$
$$= E[M_n (q/p)^{\xi_{n+1}} | \mathcal{F}_n]$$
$$= M_n E[(q/p)^{\xi_{n+1}} | \mathcal{F}_n]$$
$$= M_n E[(q/p)^{\xi_{n+1}}]$$
$$= M_n.$$

Así, M_n es un martingal

literal b)

- Integrabilidad

$$E[Z_n^\lambda] = E[c^n \lambda^{S_n}] = c^n E[\lambda^{S_n}] = c^n E[\lambda^{\xi_1}] \cdots E[\lambda^{\xi_n}]$$

Así, como

$$E[\lambda^{\xi_i}] = p(\lambda^1) + q(\lambda^{-1}) = p\lambda + \frac{q}{\lambda} = \gamma$$

Entonces

$$E[Z_n^\lambda] = c^n \gamma^n = (c\gamma)^n < +\infty \qquad \text{Para cada } n \in \mathbb{N}.$$

- Adaptable.

Usando un razonamiento análogo al realizado en el literal anterior, se tiene el resultado

P.D. $E[Z_{n+1}^{\lambda} | \mathcal{F}_n] = Z_n^{\lambda}$

Notemos que

$$E[Z_{n+1}^{\lambda} | \mathcal{F}_n] = E[c^{n+1}\lambda^{S_{n+1}} | \mathcal{F}_n]$$
$$= E[(c^n \lambda^{S_n})(c\lambda^{\xi_{n+1}}) | \mathcal{F}_n]$$
$$= c^n\lambda^{S_n} E[c\lambda^{\xi_{n+1}} | \mathcal{F}_n]$$
$$= Z_n^{\lambda} E[c\lambda^{\xi_{n+1}} | \mathcal{F}_n]$$
$$= Z_n^{\lambda} \, c E[\lambda^{\xi_{n+1}}]$$

Luego, para que se cumpla la igualdad buscada, se requiere que

$$1 = c E[\lambda^{\xi_{n+1}}].$$

Por la primera parte, esto es igual a

$$1 = c(\lambda p + q/\lambda) \Leftrightarrow c = \frac{1}{\lambda p + q/\lambda}$$

Problema 2. Sean $X_1, X_2, \ldots,$ variables aleatorias independientes tales que

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } (2n)^{-1} \\ 0 & \text{con probabilidad } 1-n^{-1} \\ -1 & \text{con probabilidad } (2n)^{-1} \end{cases}$$

Sea $Y_1 = X_1$ y para $n \geq 2$

$$Y_n = \begin{cases} X_n & \text{si } Y_{n-1} = 0 \\ n Y_{n-1}|X_n| & \text{si } Y_{n-1} \neq 0 \end{cases}$$

Muestre que Y_n es un martingala con respecto a $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$

Solución

- P.D $E[Y_n] < +\infty$

Notemos que

$$E[X_n] = 1(2n)^{-1} + 0(1-n^{-1}) + (-1)(2n)^{-1} = (2n)^{-1} - (2n)^{-1} = 0$$

Con esto, notemos que

$$E[Y_n] = E[X_n \mathbb{1}_{\{Y_{n-1}=0\}}] + E[nY_{n-1}|X_n| \mathbb{1}_{\{Y_{n-1}=0\}}]$$
$$= nE[Y_{n-1}|X_n|] = nE[Y_{n-1}]E|X_n| \quad [A]$$

Así, procedamos por inducción.

- Para $n=1$, $E[Y_1] = E[X_1] = 0$.
- Para $n=2$

$$E[Y_2] = 2E[Y_{2-1}|X_2|] = 2E[Y_1|X_2|] = 2E[X_1|X_2|] = 2E[X_1]E[|X_2|]$$

luego como

$$E|X_2| = 1\cdot(2n)^{-1} + 0(1-n^{-1}) = (2n)^{-1} < +\infty.$$

De esta manera

$$E[Y_2] = 0.$$

Luego, por inducción, sabemos que $E[Y_{n-1}] < +\infty$.

Así, usando lo anterior en [A], se sigue que Y_n es integrable

- Como $\mathcal{F}_n$ es la filtración natural, entonces Y_n es adaptada a $\mathcal{F}_n$.
- P.D $E[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = Y_n$.

Notemos que

$$E[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[X_n \mathbb{1}_{\{Y_{n+1}=0\}} + (n+1)Y_n |X_n| \mathbb{1}_{\{Y_{n+1}\neq 0\}} | \mathcal{F}_n]$$

$$= E[X_{n+1}\mathbb{1}_{\{Y_{n+1}=0\}} | \mathcal{F}_n] + (n+1)E[Y_n |X_{n+1}| \mathbb{1}_{\{Y_{n+1}\neq 0\}} | \mathcal{F}_n]$$

$$= E[X_{n+1}\mathbb{1}_{\{Y_{n+1}=0\}}] + (n+1) Y_n E[|X_{n+1}| \mathbb{1}_{\{Y_{n+1}\neq 0\}} | \mathcal{F}_n]$$

$$= E[X_n] P(Y_{n+1}=0) + (n+1) Y_n E[|X_{n+1}| \mathbb{1}_{\{Y_{n+1}\neq 0\}} | \mathcal{F}_n]$$

$$= (n+1) Y_n E|X_{n+1}| P(Y_{n+1}=0)$$

$$\vdots$$

$$?$$

Problema 3. Sea $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de v.a. independientes con $E[Y_k] = \mu_k$, $Var[Y_k] = \sigma_k^2$ y $S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$ para $n \geq 1$. Tomando $\{\mathcal{F}_n : n \geq 1\}$ la filtración natural, demuestre que

$$X_n = \left(\sum_{k=1}^{n} (Y_k - \mu_k)\right)^2 - S_n^2$$

es un martingal (tome $\mu_k = 0$, $\forall k$).

Solución

- Integrable.

Notemos que

$$E|X_n| = E\left|\sum_{k=1}^{n} (Y_k)^2 - S_n^2\right|$$

$$\leq E\left|\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2\right| + E\left|\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right|$$

$$\leq E\left[\sum_{k=1}^{n} Y_k\right]^2 + \sum_{k=1}^{n} E[\sigma_k^2] = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 + E\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2 = S_n + \underbrace{E\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2}_{<+\infty\ ?} < +\infty$$

- Adaptada.
  ↳ la adaptabilidad se sigue por las propiedades de medida
- P.D. $E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$

$$E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E\left[\left(\sum_{k=1}^{n+1} Y_k\right)^2 - S_{n+1}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right]$$

$$= E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k + Y_{n+1}\right)^2 - S_{n+1}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right]$$

$$= E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) Y_{n+1} + Y_{n+1}^2 - S_n^2 - \sigma_{n+1}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right]$$

$$= E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2 - S_n^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) Y_{n+1} + Y_{n+1}^2 - \sigma_{n+1}^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right]$$

$$= E[X_n | \mathcal{F}_n] + 2E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) Y_{n+1} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] + E[Y_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] - \sigma_{n+1}^2$$

$$= X_n + 2\sum_{k=1}^{n} Y_k E[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] \quad \cancel{E[Y_{n+1}^2] - \sigma_{n+1}^2}$$

$$= X_n + 2\sum_{k=1}^{n} Y_k E[Y_{n+1}] = X_n.$$

Problema 4. Sea $(\Omega, F, \mathbb{F})$ un espacio de probabilidad con filtración $\mathcal{F}_n$, $n \geq 0$, y Y_n, $n \geq 0$ una sucesión de v.a. absolutamente integrables adaptadas a la filtración $\mathcal{F}_n$, $n \geq 0$. Suponga que existen números reales u_n, v_n, $n \geq 0$, de manera que

$$E[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = u_n Y_n + v_n$$

Encuentre dos secuencias reales a_n y b_n, $n \geq 0$ de modo que la secuencia de variables aleatorias $H_n = a_n Y_n + b_n$, $n \geq 1$ sea martingal respecto a la misma filtración

Solución

- Integrable

Notemos que

$$E[H_n] = E[a_n Y_n + b_n] = a_n E[Y_n] + b_n < +\infty$$

- Trivialmente se verifica que H_n es adaptada
- Finalmente, notemos que

$$E[H_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = E[a_{n+1} Y_{n+1} + b_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$$
$$= a_{n+1} E[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] + b_{n+1}$$
$$= a_{n+1}(u_n Y_n + v_n) + b_{n+1}$$

Así, como $H_n = a_n Y_n + b_n$, entonces

$$a_n = a_{n+1} u_n \iff a_{n+1} = a_n / u_n$$
$$\Rightarrow a_n = \frac{a_0}{\prod_{i=0}^{n-1} u_i}$$

Análogamente $\quad b_n = a_{n+1} v_n + b_{n+1} \iff b_{n+1} = b_n - a_{n+1} v_n$

$$\Rightarrow b_n = b_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i v_{i-1}$$

Con esto, H_n es un Martingal

Clase. Miércoles, 1 de marzo de 2023.

Ejercicio 1. Considere un movimiento Browniano estándar. Demuestre que para todo $t \in [0, +\infty[$ se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y\, p(t, x, y)\, dy = x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y\, p(t, x, y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (x+\mu)\, p(t, x, x+\mu)\, d\mu.$$

P.D.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y\, p(t, x, y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (x+\mu)\, p(t, x, x+\mu)\, d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} (x+\mu)\, p(t, 0, \mu)\, d\mu$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(t, 0, \mu)\, d\mu + \int_{-\infty}^{+\infty} \mu\, p(t, 0, \mu)\, d\mu$$
$$= x + 0$$
$$= x.$$

Ejercicio 2 M.B un movimiento Browniano estándar $B(t)$. Sean $s, t \in [0, +\infty[$ tales que $s < t$. Demuestre que $E[B(s) B(t)] = s$.

Notemos que

$$E[B(s)B(t)] = E[B(s)B(t) + B(s)^2 - B(s)^2]$$
$$= E[B(s)(B(t)-B(s)) + B(s)^2]$$
$$= E[B(s)(B(t)-B(s)) + B(s)^2]$$
$$= E[B(s)]\,E[B(t)-B(s)] + E[B(s)^2]$$
$$= Var[B(s)] = \sigma^2 \cdot s = s.$$

$Var[B(s)] = E[B(s)^2] - E[B(s)]^2$

Ejercicio 3. Considere una carrera entre 2 competidores: A y B.

Sea $Y(t)$ la cantidad de segundos en los que A va ganando la carrera, cuando $100t$ por ciento de la misma ha sido completada.

Supongamos que $\{Y(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ se puede modelar como un movimiento Browniano con parámetro σ^2

Si A está liderando por σ segundos a la mitad de la carrera, ¿Cuál es la probabilidad de que A gane

$$P(Y(1) > 0 \mid Y(1/2) = \sigma) = P(Y(1) - Y(1/2) > -\sigma \mid Y(1/2) = \sigma)$$
$$= P(\underbrace{Y(1) - Y(1/2)}_{\hat{z} \sim N(0, \sigma^2/2)} > -\sigma)$$
$$= P\Big(\underbrace{\frac{\hat{z} - 0}{\sqrt{\sigma^2/2}}}_{z \sim N(0,1)} > -\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2/2}}\Big)$$

Jueves, 2 de marzo de 2023.

Distribución condicional $B_s \mid B_t$ $s<t$

Considere un HB $B(t)$ y suponga que requerimos la distribución condicional de $B(s)$ dado que $B(t) = b$, donde $s<t$.

La función de densidad condicional es

$$f_{B_s|B_t}(x \mid b) = \frac{f_{B_s}(x)\, f_{B_t - B_s}(b-x)}{f_{B_t}(b)} = k \exp\left\{-\frac{(x - \frac{bs}{t})^2}{\frac{2s(t-s)}{t}}\right\}$$

Es decir, $B(s) \mid B(t)$ tiene distribución normal con

$$E[B(s) \mid B(t) = b] = \frac{sb}{t} \qquad Var[B(s) \mid B(t) = b] = \frac{s}{t}(t-s)$$

Ejercicio 1. Considerando el ejercicio de la clase pasada. Si el competidor A gana la carrera con un margen de σ segundos ¿Cuál es la probabilidad de que A haya estado al frente a la mitad de la carrera?

$$P(Y(1/2) > 0 \mid Y(1) = \sigma) \qquad W = Y(1/2) \mid Y(1) \sim N(\sigma/2, 1/4)$$

$$P(W > 0) = P\left(\frac{W - \sigma/2}{1/2} > \frac{-\sigma/2}{1/2}\right)$$

Teorema 5.5 El H.B. $B(t)$ satisface la propiedad fuerte de Markov: Para un tiempo de paro finito τ

$$P(B(\tau + t) \leq y \mid \mathcal{F}_\tau) = P(B(\tau + t) \leq y \mid B(\tau))$$

Si definimos

$$\hat{B}(t) = B(\tau + t) - B(\tau)$$

entonces

$\hat{B}(t)$ es un M.B. que comienza en cero independiente de $\mathcal{F}_\tau$

Lema 5.6. Si $H(t)$ es un martingal continuo por la derecha con filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$ y τ y σ son tiempos de paro acotados tales que $P(\tau < \sigma) = 1$. Entonces

$$E[H(\sigma) \mid \mathcal{F}_\tau] = H(\tau)$$

Teorema 5.7 Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\tau_x = \inf\{t > 0 : B(t) = x\}$ con $\inf \emptyset = \infty$, entonces

$$P_a(\tau_b < +\infty) = 1 \qquad \forall a,b$$

Demostración

a) Notemos que

$$P_a(\tau_b < +\infty) = P(\inf\{t>0 : B(t) = b\} < +\infty \mid B(0) = a)$$

$$= P(\inf\{t>0 : B(t) - B(0) = b - a\} < +\infty \mid B(0) = a)$$

$$= P_0(\tau_{b-a} < +\infty)$$

b) $P_0(\tau_{b-a} < +\infty) = P(\inf\{t>0 : B(t) = b - a\} < +\infty \mid B(0) = a)$

$$= P(\inf\{t>0 : -B(t) = -b + a\} < +\infty \mid -B(0) = a)$$

$$= P_0(\tau_{a-b} < +\infty)$$

c) Entonces, sin pérdida de generalidad asumiremos $a = 0$ y $b \in \mathbb{R}$, es decir, P.D. $P_0(\tau_b < +\infty) = 1$.

Para $\mu > 0$, sea

$$Z(t) = \exp\{\mu B(t) - \mu^2/2\, t\}$$

$Z(t)$ es martingal. Además $Z(t \wedge \tau_b)$ es martingal.

$$\therefore E[Z_0] = E[Z(t \wedge \tau_b)] = 1.$$

Luego

$$E[\exp\{\mu B(t \wedge \tau_b) - \mu^2/2\,(t \wedge \tau_b)\}] = 1 \qquad [1]$$

Para $t \leq \tau_b$, tenemos que

$$0 \leq \exp\left\{\mu B(t \wedge \tau_b) - \frac{\mu^2}{2}(t \wedge \tau_b)\right\} \leq \exp\left\{\mu B(t \wedge \tau_b)\right\} \leq \exp\{\mu b\} \qquad [2]$$

→ Ahora estudiemos el evento $\{\tau_b = +\infty\}$, notemos que

$$\exp\{\mu B(t \wedge \tau_b) - \frac{\mu^2}{2}(t \wedge \tau_b)\} \leq \exp\{\mu b\} \cdot \exp\{-\frac{\mu^2}{2} t\} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0. \qquad [3]$$

por otro lado, en el evento $\{\tau_b < +\infty\}$

$$\exp\{\mu B(t \wedge \tau_b) - \mu^2/2\,(t \wedge \tau_b)\} \leq \exp\{\mu b - \mu^2/2\,(t \wedge \tau_b)\} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \exp\{\mu b - \mu^2/2\, \tau_b\} \qquad [4]$$

Aplicando el límite en [1] y usando los resultados [3] y [4]. Además de convergencia dominada en [2] tenemos que

$$E\left[\mathbb{1}_{\{\tau_b < +\infty\}} \exp\{\mu b - \frac{\mu^2}{b} \tau_b\}\right] = 1 \qquad [5]$$

De nuevo, por convergencia dominada, haciendo $\mu \to 0$, tenemos que

$$E[\, 1(\tau_b < +\infty)\,] = P_0(\tau_b < +\infty) = 1.$$

De [5] observe que

$$E[\exp\{-\mu^2/2\ \tau_b\}] = e^{-\mu b}$$

Si reemplazamos $\mu^2/2 = \alpha$, entonces

$$E[e^{-\alpha \tau_b}] = e^{-b\sqrt{2\alpha}} \qquad \leftarrow \text{Transformada de Laplace de } \tau_b. \qquad [6]$$

y luego

$$f_{\tau_b}(t) = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi}}\, t^{-3/2} \exp\left\{-\frac{b^2}{2t}\right\} \qquad t \geq 0 \qquad (b \neq 0)$$

Si diferenciamos [6] con respecto a α obtenemos que

$$E[\tau_b e^{-\alpha\tau_b}] = \frac{b}{\sqrt{2\alpha}}\, e^{-b\sqrt{2\alpha}}$$

y haciendo $\alpha \to 0$, entonces $E[\tau_b] = +\infty$, para todo $b \neq 0$.

Teorema 5.8 $\{\tau_x : x > 0\}$ tiene incrementos independientes del pasado. Es decir que para todo a, b con $0 < a < b$, $\tau_b - \tau_a$ es independiente de $B(t)$, $t \leq \tau_a$ y la distribución de los incrementos $\tau_b - \tau_a$ es la misma que la distribución que la de τ_{b-a}.

Demostración

$$\begin{aligned}
\tau_b - \tau_a &= \inf\{t \geq 0 : B(t) = b\} - \tau_a \\
&= \inf\{t \geq \tau_a : B(t) = b\} - \tau_a \\
&= \inf\{t \geq \tau_a : B(t - \tau_a + \tau_a) - B(\tau_a) = b - B(\tau_a)\} - \tau_a \\
&= \inf\{t \geq \tau_a : \hat{B}(t) = b - a\} = \tau_{b-a}
\end{aligned}$$

Lunes, 6 de marzo de 2023

Sea $B(t)$ un M.B. y defina

$$M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} B(s) \qquad \text{y} \qquad m(t) = \min_{0 \leq s \leq t} B(s)$$

Teorema 5.9. Para todo $x \geq 0$, $P(M(t) \geq x) = 2P(B(t) \geq x)$

Demostración: Notemos que

$$\begin{aligned}
P(M(t) \geq x) &= P(\tau_x \leq t) \\
&= \int_0^t \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\, u^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2u}\right\} du \\
&= \int_x^{\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{\pi t}} \exp\left\{\frac{-y^2}{2t}\right\} dy
\end{aligned}$$

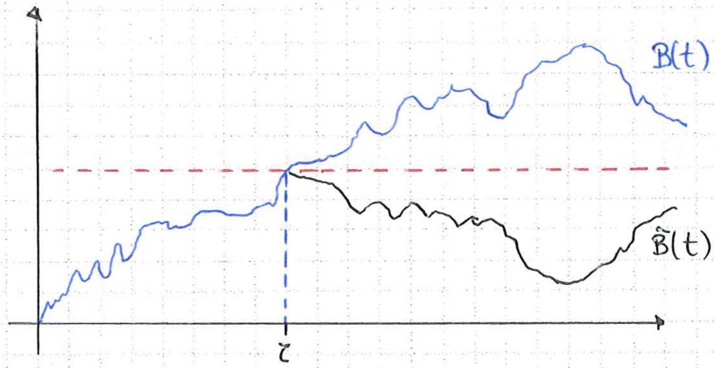
$$-\min_{0 \leq s \leq t} B(s) = \max_{0 \leq s \leq t} (-B(s))$$

Teorema 5.10. - Principio de reflexión

Sea τ un tiempo de paro y defina

$$\tilde{B}(t) = B(t) \quad \forall t \leq \tau \qquad \text{y} \qquad \tilde{B}(t) = 2B(\tau) - B(t) \quad \text{para } t \geq \tau$$

Entonces $\tilde{B}(t)$ es un M.B.



$\tilde{B}(t) - B(\tau) = (B(t) - B(\tau))$

Teorema 5.11. La distribución conjunta de $B(t)$ y $H(t)$ tiene densidad dada por

$$f_{B,H}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{2y-x}{t^{3/2}}\, \exp\left\{ -\frac{(2y-x)^2}{2t} \right\} \qquad \begin{matrix} y \geq 0 \\ x \leq y \end{matrix}$$

Demostración

Sea $y>0$ y $y>x$. Sea $\tilde{B}(t)$ el reflejo de $B(t)$ en τ_y

$$\begin{aligned} P(B(t) \leq x,\ H(t) \geq y) &= P(B(t) \leq x,\ \tau_y \leq t) \\ &= P(\tau_y \leq t,\ 2B(\tau_y) - \tilde{B}(t) \leq x) \\ &= P(\tau_y \leq t,\ \tilde{B}(t) \geq 2y - x) \\ &= P(\tau_y \leq t,\ B(t) \geq 2y - x) \\ &= P(B(t) \geq 2y - x) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

τ_y es el mismo para $B(t)$ que para $\tilde{B}(t)$

$y > x$ continuidad de las trayectorias

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{x} \int_{y}^{+\infty} f_{B,H}(u,v)\, du\, dv = 1 - \Phi\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right)}$$

Diderenciar para obtener el resultado.

Sección 5.2: Variacciones del MB.

1) MB con drift.

Decimos que $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ es un MB con drift μ y parámetro (de varianza) σ^2 si

a) $X_0 = 0$
b) $\{X_t : t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes y estacionarios
c) $X_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$

$X(t)$ puede escribirse como

$$X(t) = \sigma B(t) + \mu t \qquad B(t) \text{ M.B. estándar}$$

2) Movimiento Geométrico Browniano

Si $\{X(t): t \geq 0\}$ es un M.B con drift μ y parámetro σ^2 Entonces el proceso

$$Y(t) = \exp\{X(t)\}_{t \geq 0}$$

es llamado Movimiento Geométrico Browniano.

Ejercicio Si $B(t)$ es un M.B. estándar y $Y(t) = \exp\{B(t)\}$, ¿ $E[Y(t)]$?

$$E[Y(t)] = E[e^{B(t)}] = M_B(1) = \exp\left\{\frac{t}{2}\right\}$$

$$E[Y^2(t)] = \exp\{2t\}$$

Por lo tanto,

$$Var(Y(t)) = \exp\{2t\} - \exp\{t\}$$

Ejercicio. Si $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ es un H.B con drift μ y parámetro de varianza σ^2 y

$$X(t) = \exp\{Y(t)\}$$

$E[X(t) \mid X(w), 0\leq w\leq s] = ?$ con $s\leq t$.

$$\begin{aligned}
E[X(t) \mid X(w), 0\leq w\, s] &= E[e^{\{Y(t)\}} \mid X(w)] \\
&= E[e^{Y(t)+Y(s)-Y(s)} \mid X(w)] \\
&= E[e^{Y(t)-Y(s)} e^{Y(s)} \mid X(w)] \\
&= E[e^{Y(s)} \mid X(w)]\ E[e^{Y(t)-Y(s)} \mid X(w)] \\
&= e^{Y(s)}\ E[e^{Y(t)-Y(s)} \mid X(w)]
\end{aligned}$$

Ahora, como

$$Y(t)-Y(s) \sim N(\mu(t-s), (t-s)\sigma^2)$$

Por la función generadora de momentos de la normal

$$\begin{aligned}
E[e^{Y(t)-Y(s)}] &= e^{\mu(t-s)} \cdot e^{\frac{\sigma^2(t-s)}{2}} \\
&= e^{\mu(t-s)+\frac{\sigma^2(t-s)}{2}}
\end{aligned}$$

con esto

$$E[X(t) \mid X(w)] = e^{Y(s)}\, e^{\mu(t-s)+\frac{\sigma^2(t-s)}{2}}$$

Ejercicio. ¿Cuál es la distribución de $B(t)+B(s)$ $s\leq t$ con $B(t)$ un H.B

Notemos que

$$B(t)+B(s) = \underbrace{B(t)+B(s)}_{N(0,\,t-s)} \underbrace{-\,2B(s)}_{N(0,\,4s)}$$

$$N(0, (t-s)+4s)$$

Martes, 7 de marzo de 2023

Problema 1. Sea $B(t)$ un movimiento browniano estándar y defina $S(t) = \exp(at + bB(t))$

a) Muestre que $S(t)$ es un proceso de Markov.

b) ¿Bajo que condiciones $S(t)$ es un martingal?

c) Si $s<t$. ¿Cuál es la $P(S(t)\leq y \mid S(s) = x)$