UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA •
MANUAL DE DEMOSTRACIONES

25 de julio de 2023 Mat. Jonathan Ortiz

Este es un resumen de las principales formas de demostrar algunos tipos de proposiciones.

1. DEFINICIONES

Como es conocido, tener claridad en las definiciones es fundamental para lograr una correcta demostración. A continuación, se presentan algunas definiciones importantes de Teoría de Conjuntos:

1. *Proposición:* Enunciado afirmativo que puede ser verdadero o falso, pero no ambos a la vez.
2. *Conjunto:* Colección de objetos. Esta definición es intuitiva pero es suficiente para el alcance de este documento.
3. *Axioma:* Proposición que se acepta como verdadera en la teoría de estudio.
4. *Razonamiento:* Procedimiento en el cual se determina, lógicamente, si una proposición dada es verdadera o falsa.
5. *Demostración:* Conjunto de razonamientos que asegura que una proposición es verdadera.
6. *Teorema:* Proposición que, una vez demostrada, se utiliza para demostrar otras proposiciones.
7. *Lema:* Proposición que se utiliza en la demostración de un teorema.
8. *Corolario:* Proposición que es verdadera por la aplicación directa de un teorema.
9. *Postulado:* Este término no es utilizado en Matemática, pero en las otras ciencias comúnmente se refiere a una afirmación que se deduce por algún experimento o por otro procedimiento empírico.
10. *Variable:* No hay una definición satisfactoria para este documento. Intuitivamente, es un símbolo que representa un elemento de algún conjunto.

1.1 Simbología

1. $\neg$: Negación.
2. $\wedge$: Conjunción.
3. $\vee$: Disyunción.
4. $\Longrightarrow$: Implicación.
5. $\Longleftrightarrow$: Doble implicación.
6. $\forall$: Para todo.
7. $\exists$: Existe.
8. $\exists!$: Existe un único.
9. $\equiv$: Equivalente.
10. $\varnothing$: Vacío.
11. $\cap$: Intersección.
12. $\cup$: Unión.
13. $\subseteq$: Subconjunto.
14. $=$: Igualdad.
15. $\in$: Pertenencia.
16. $H)$: Hipótesis.
17. $PD)$: Por demostrar.

2. Planteamiento de algunas demostraciones

En el resto del documento, se considera A y B conjuntos; p, q y r proposiciones; y sean $P(\cdot)$ una proposición dependiente de una variable, y $Q(\cdot,\cdot)$ una proposición dependiente de dos variables.

2.1 Equivalencias

Antes de presentar los esquemas de demostraciones es importante tener en cuenta algunas de las equivalencias lógicas e igualdades de conjuntos que son de uso frecuente. Los símbolos $\mathbb{V}$ y $\mathbb{F}$ representan una proposición que es verdadera y una proposición que es falsa, respectivamente.

2.1.1. Con una proposición

1. $\neg(\neg p) \equiv p$.
2. $p \wedge p \equiv p$.
3. $p \vee p \equiv p$.
4. $p \Longrightarrow p \equiv \mathbb{V}$.
5. $p \Longleftrightarrow p \equiv \mathbb{V}$.
6. $p \vee \neg p \equiv \mathbb{V}$.
7. $p \wedge \neg p \equiv \mathbb{F}$.
8. $p \wedge \mathbb{V} \equiv p$.
9. $p \vee \mathbb{V} \equiv \mathbb{V}$.
10. $p \wedge \mathbb{F} \equiv \mathbb{F}$.
11. $p \vee \mathbb{F} \equiv p$.

2.1.2. Equivalencias Básicas

1. $p \wedge q \equiv q \wedge p$.
2. $p \vee q \equiv q \vee p$.
3. $p \Longrightarrow q \equiv \neg p \vee q$.
4. $p \Longleftrightarrow q \equiv [(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)]$.
5. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$.
6. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$.
7. $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$.
8. $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

2.1.3. Negaciones

1. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$.
2. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.
3. $\neg(p \Longrightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$.
4. $\neg(p \Longleftrightarrow q) \equiv \neg p \Longleftrightarrow q$.

2.1.4. Con cuantificadores

1. $(\forall x \in A)(P(x)) \equiv (\forall y \in A)(P(y))$.
2. $(\exists x \in A)(P(x)) \equiv (\exists y \in A)(P(y))$.
3. $(\forall x \in A)(\forall y \in B)(Q(x,y)) \equiv (\forall y \in B)(\forall x \in A)(Q(x,y))$.
4. $(\exists x \in A)(\exists y \in B)(Q(x,y)) \equiv (\exists y \in B)(\exists x \in A)(Q(x,y))$.
5. $\neg(\forall x \in A)(P(x)) \equiv (\exists x \in A)(\neg P(x))$.
6. $\neg(\exists x \in A)(P(x)) \equiv (\forall x \in A)(\neg P(x))$.

2.2 Esquemas generales

Hay dos tipos de esquemas:[1]

1. Se quiere demostrar una proposición; y se plantea demostrar dos proposiciones más simples.

$PD)\ p \wedge q.$
$PD_1)\ p.$
$PD_2)\ q.$

$PD)\ A = B.$
$PD_1)\ A \subseteq B.$
$PD_2)\ B \subseteq A.$

$PD)\ p \iff q.$
$PD_1)\ p \implies q.$
$PD_2)\ q \implies p.$

$PD)\ (p \vee q) \implies r.$
$PD_1)\ p \implies r.$
$PD_2)\ q \implies r.$

2. Se quiere demostrar una proposición; y se plantea una hipótesis, $H)$, (proposición verdadera) y se plantea demostrar otra proposición más simple. El segundo esquema corresponde a este tipo.

$PD)\ p \implies q.$	
$H)\ p.$	$PD)\ q.$

$PD)\ A \subseteq B.$	
$H)$ Sea $x \in A.$	$PD)\ x \in B.$

$PD)\ p \vee q.$	
$H)\ \neg p.$	$PD)\ q.$

$PD)\ (\forall x \in A)(P(x)).$	
$H)$ Sea $x \in A.$	$PD)\ P(x).$

2.3 Esquemas con hipótesis

- Si $p \equiv q$, entonces demostrar $PD)\ p$ es equivalente a demostrar

$$PD)\ q.$$

- Si $p \implies q$, entonces para demostrar $PD)\ q$, es suficiente demostrar

$$PD)\ p.$$

- Si $p \vee q$, entonces para demostrar $PD)\ r$, se debe considerar dos casos: cuando p es verdadera, y cuando q es verdadera; en ambos casos se debe demostrar $PD)\ r$.

2.4 Existencia

Para demostrar que existe algún elemento que satisface cierta proposición; se debe buscar (casi) todas las condiciones que cumple dicho elemento, y luego proponer algún candidato, para finalmente probar que dicho candidato efectivamente cumple todo lo pedido.

$$PD)(\exists x \in A)(P(x)).$$

[1] El símbolo $H)$ se lee "hipótesis" y $PD)$ se lee "por demostrar".

2.4.1. Unicidad

Para demostrar que existe un único elemento que satisface cierta proposición, se puede utilizar la siguiente equivalencia:

$$(\exists! x \in A)(P(x)) \quad \equiv \quad [(\exists x \in A)(P(x))] \wedge (\forall y, z \in A)[(P(y) \wedge P(z)) \Longrightarrow y = z].$$

Es decir, primero se demuestra la existencia, y después que si dos elementos satisfacen la proposición P, entonces dichos elementos deben ser el mismo. El esquema de esta demostración, es el siguiente:

$PD)\ (\exists! x \in A)(P(x))$.	
$PD_1)\ (\exists x \in A)(P(x))$.	
Sean $y, z \in A$ tales que $P(y)$ y $P(z)$.	$PD_2)\ y = z$.

2.5 Reducción al Absurdo

Para demostrar algunas proposiciones, en determinadas ocasiones es preciso analizar lo que ocurriría si dicha proposición es falsa. Esto da origen a uno de los métodos más fuertes de demostración, el método de REDUCCIÓN AL ABSURDO:

$$PD)\ p.$$

Por reducción al absurdo, supongamos $\neg p$, y vamos a obtener una contradicción...

Este método es preciso para demostrar que un conjunto es vacío:

$$PD) A = \varnothing.$$

Por reducción al absurdo, supongamos existe $x \in A$, y vamos a obtener una contradicción...

2.6 Inducción Matemática

Este método se utiliza para demostrar proposiciones sobre el conjunto de los números naturales[2] $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$:

$$PD)(\forall n \in \mathbb{N})(P(n)).$$

1. $PD)\ P(0)$.
2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos $H)\ P(n)$.

$$PD)\ P(n+1).$$

La Inducción Matemática se basa en la siguiente equivalencia:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(P(n)) \equiv P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \Longrightarrow P(n+1)).$$

[2] También se puede utilizar sobre cualquier conjunto biyectivo a los naturales.

2.6.1. Inducción Matemática Fuerte

Para demostrar algunas proposiciones, no es suficiente utilizar el esquema anterior, sino que se necesita utilizar la siguiente equivalencia:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(P(n)) \equiv P(0) \land (\forall n \in \mathbb{N})([P(0) \land \cdots \land P(n)] \implies P(n+1)).$$

Con esta equivalencia, el esquema de demostración del método de Inducción Matemática fuerte es el siguiente:

$$PD)(\forall n \in \mathbb{N})(P(n)).$$

1. $PD)\ P(0)$.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos $(\forall k \leq n)(P(k))$.

$$PD)\ P(n+1).$$

---

3. Razonamiento Frecuentes

Finalmente, se presentan varios razonamientos que se pueden utilizar en cualquier demostración. La proposición debajo de la linea horizontal es una proposición que, necesariamente, es verdadera a partir de que las proposiciones encima de la linea horizontal son verdaderas:

$$\begin{array}{c} p \land q \\ \hline p \end{array}$$

$$\begin{array}{c} p \\ \hline p \lor q \end{array}$$

$$\begin{array}{c} p \\ p \implies q \\ \hline q \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg q \\ p \implies q \\ \hline \neg p \end{array}$$

$$\begin{array}{c} p \lor q \\ \neg p \\ \hline q \end{array}$$

$$\begin{array}{c} p \\ p \iff q \\ \hline q \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A \neq \varnothing \\ \hline \text{Existe } x \in A \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x \in A \\ A \subseteq B \\ \hline x \in B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x \notin B \\ A \subseteq B \\ \hline x \notin A \end{array}$$

$$\begin{array}{c} P(x) \\ x = y \\ \hline P(y) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} P(x) \\ x \in A \\ \hline (\exists u \in A)(P(u)) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x \text{ un elemento} \\ A = \varnothing \\ \hline x \notin A \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x \in A \\ A \cap B = \varnothing \\ \hline x \notin B \end{array}$$