Escuela Politécnica Nacional

Formulario · Matemática Actuarial- Modelo biométrico

1 Funciones biométricas

Hipótesis sobre el modelo biométrico:

- **Homogeneidad:** El comportamiento de la edad de fallecimiento de cada individuo es idéntico dentro de una población.
- **Independencia:** La edad de fallecimiento de un individuo no depende de la edad de fallecimiento de otro individuo.
- **Estacionariedad:** Las probabilidades de fallecimiento de los individuos no dependen de su fecha de nacimiento, sino solo de su edad.

1.1 Función de fallecimiento

La función de distribución de la variable aleatoria *edad de fallecimiento* se denota por $F(x)$ y se define como

$$F(x) = P[X < x], \quad \forall x \geq 0.$$

1.2 Función de supervivivencia

Definamos la función $S(x)$ como la probabilidad de sobrevivir hasta una edad x, entonces

$$S(x) = 1 - F(x).$$

Además, para $x < y$, se tiene que

$$P[x < X \leq y] = F(y) - F(x) = S(x) - S(y).$$

1.3 Vida residual

Se denomina *vida residual* a la variable aleatoria que representa el número de años que le restan por vivir a una persona que ya alcanzó la edad x,

$$T(x) = X - x, \quad X > x.$$

Se denota por $T(x)$ o T_x.

Notemos que

$$F_x(t) = \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)}$$

y

$$S_x(t) = \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)}.$$

A partir de estas expresiones se tiene que

$$F_x(t) = \frac{S_0(x) - S_0(x+t)}{S_0(x)}.$$

2 Notación actuarial

Utilizaremos las siguientes notaciones

$$\begin{aligned} {}_tq_x &= P[T_x \leq t] = F_x(t), \quad t \geq 0, \\ {}_tp_x &= P[T_x > t] = S_x(t), \quad t \geq 0; \end{aligned}$$

donde ${}_tq_x$ representa la **probabilidad de que un individuo de edad x fallezca dentro de t años.** Por otro lado, ${}_tp_x$ representa la **probabilidad de que un individuo con edad x permanezca vivo a la edad de $x + t$.**

Con esto se tiene que, para $s, t \geq 0$,

$${}_{t+s}p_x = {}_tp_x \cdot {}_sp_{x+t}.$$

En el caso particular de que $x = 0$, se tiene que $T(0) = X$, por lo cual

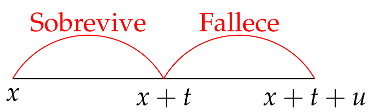
$$\begin{aligned} {}_tq_0 &= P[X \leq t] = F_0(t) \quad t \geq 0, \\ {}_tp_0 &= P[X > t] = S_0(t) \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Si $t = 1$ es habitual omitir este prefijo y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} q_x &= P[\text{Individuo de } x \text{ años fallezca dentro de 1 año}] \\ p_x &= P[\text{Individuo de } x \text{ años permanezca vivo a la edad } x+1]. \end{aligned}$$

2.1 Fallecimiento diferido

La probabilidad de **fallecimiento diferido** expresa la probabilidad de que un individuo de edad x permanezca vivo durante t años más y fallezca dentro de los próximos u años, es decir, la probabilidad de que fallezca dentro de las edades $x + t$ y $x + t + u$.



La probabiliad de fallecimiento diferido se nota por ${}_{t|u}q_x$ y se calcula como:

$$ {}_{t|u}q_x = {}_{t+u}q_x - {}_tq_x = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x. $$

Alternativamente, tenemos que

$$ {}_{t|u}q_x = {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t}. $$

Si $u = 1$, entonces

$$ {}_{t|}q_x = {}_tp_x \cdot q_{x+t} \quad \forall t > 0. $$

A partir de las relaciones anteriores se tiene que

$$ \begin{aligned} {}_tp_x &= \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_xp_0} \\ {}_tq_x &= \frac{{}_xp_0 - {}_{x+t}p_0}{{}_xp_0} \end{aligned} $$

3 Fuerza de mortalidad

También conocida como *tasa instantánea de mortalidad* se denota por μ_x o $\mu(x)$ y representa la probabilidad de que un individuo que se supone vivo en el instante x, no sobreviva al siguiente intervalo de tiempo lo suficientemente pequeño dx

$$ \mu_x = \frac{f_0(x)}{S_0(x)} \quad \text{suponiendo } f_0(x) = F_0'(x). $$

De lo anterior,

$$ \mu_{x+t} = \frac{f_x(t)}{S_x(t)}. $$

Luego, la probabilidad de supervivencia está dada por:

$$ {}_tp_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_y\, dy\right) = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}\, ds\right) $$

Finalmente, se tiene que

$$ \begin{aligned} f(x) &= S(x) \cdot \mu_x \\ f_x(t) &= {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \\ F_x(t) &= \int_0^t {}_sp_x \cdot \mu_{x+s}\, ds \end{aligned} $$

4 Esperanza de vida residual completa

La *esperanza de vida residual completa* para un individuo de edad x, se nota por $\mathring{e}_x$ y representa el número medio de años que le quedan por vivir, por lo tanto,

$$ \mathring{e}_x = E[T_x] = E[X - x \mid X > x], $$

más aún se tiene que

$$ \mathring{e}_x = \int_0^{+\infty} {}_tp_x\, dt. $$

Si w es la edad máxima se integra hasta $w - x$.

Por otra parte, el segundo momento y la varianza están dados por

$$ \begin{aligned} E[T_x^2] &= 2\int_0^{+\infty} t \cdot {}_tp_x\, dt \\ V[T_x] &= E[T_x^2] - (\mathring{e}_x)^2. \end{aligned} $$

5 Esperanza de vida residual entera

Se denomina *vida residual entera* a la variable aleatoria K_x, la cual representa el número de años de vida completos que le restan por vivir a una persona que alcanza la edad x. Por lo tanto:

$$ K_x = \lfloor T_x \rfloor = k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. $$

La ley de probabilidad de la variable aleatoria K_x es igual a:

$$ \begin{aligned} P[K_x = k] &= P[k < T_x \le k+1] \\ &= {}_{k|}q_x \\ &= {}_kp_x \cdot q_{x+k} \\ &= {}_kp_x - {}_{k+1}p_x. \end{aligned} $$

De esta manera, el valor esperado de K_x representa la **esperanza de vida residual entera** de un individuo a la edad x, la cual se denota por e_x y se expresa por

$$ e_x = \sum_{k=1}^{+\infty} {}_kp_x. $$

De manera análoga, se tiene el segundo momento y la varianza

$$ \begin{aligned} E[K_x^2] &= 2\sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot {}_kp_x - e_x \\ V[K_x] &= E[K_x^2] - (e_x)^2. \end{aligned} $$

Finalmente, se puede aproximar el caso continuo mediante la siguiente relación:

$$ \mathring{e}_x \approx e_x + \frac{1}{2}. $$

Lo anterior es válido bajo el supuesto de distribución uniforme de fallecimientos a lo largo del año.

6 Modelos estáticos

El ajuste de este tipo de modelos se realiza con base en datos observados de un colectivo.

6.1 Modelo de Moivre

La fuerza de mortalidad es proporcional al tiempo restante hasta el final de la vida de los individuos, por lo tanto,

$$\mu_x = \frac{1}{w-x} \quad 0 \leq x < w,$$

con esto, la probabilidad de supervivencia es

$${}_tpx = 1 - \frac{t}{w-x}.$$

6.2 Modelo de Gompertz

establece que la fuerza de mortalidad crece de manera exponencial con la edad de los individuos, por lo tanto;

$$\mu_x = B \cdot c^x \quad \text{para } B > 0,\ c > 1,\ x \geq 0.$$

Así, la probabilidad de supervivencia está dada por

$${}_tpx = \exp\left(-\frac{Bc^x}{\ln(c)}(c^t - 1)\right).$$

Este modelo es utilizado preferentemente para modelar la mortalidad en las edades avanzadas, dado que se puede lograr una rápida disminución de las probabilidades de supervivencia.

6.3 Modelo de Makeham

La fuerza de mortalidad es una función de dos componentes

- una componente fija para toda edad, y
- una componente con crecimiento exponencial dependiente de la edad del individuo.

$$\mu_x = A + B \cdot c^x \quad \text{con } A \geq -B,\ B > 0,\ c > 1,\ x \geq 0.$$

La probabilidad de supervivencia está dada por

$${}_tp_x = \exp\left(-At - \frac{Bc^x}{\ln(c)}(c^t - 1)\right)$$

6.4 Modelo de Weibull

La fuerza de mortalidad crece como potencia de la edad de los individuos en lugar de hacerlo de forma exponencial

$$\mu_x = k \cdot x^n, \quad \text{con } k > 0,\ n > 0.$$

La probabilidad de supervivencia está dada por

$${}_tp_x = \exp\left(-\frac{k}{n+1}\left((x+t)^{n+1} - x^{n+1}\right)\right)$$

7 Indicadores de mortalidad

Consideremos las siguientes variables

- D_{xt}: Número de muertos de un colectivo de edad x durante el año t.
- E^o_{xt}: Número de individuos del colectivo con exposición inicial (número de individuos al inicio del periodo) al riesgo de edad x durante el año t.
- E^c_{xt}: Número de individuos del colectivo con exposición central (número de individuos promedio durante el año) al riesgo de edad x durante el año t.

A partir de las variables anteriores se construyen los siguientes indicadores:

1. **Tasa de mortalidad inicial o probabilidad de muerte:** representa la probabilidad de muerte para un individuo de edad x antes de que cumpla la edad $x+1$:

$$q_{xt} = \frac{D_{xt}}{E^o_{xt}}.$$

2. **Tasa central de mortalidad:** es la relación de muertes ocurridas entre las edades x y $x+1$ con la población media en dichas edades:

$$m_{xt} = \frac{D_{xt}}{E^c_{xt}}.$$

Se supone además que la fuerza de mortalidad entre dos edades consecutivas es constante para cada año de edad y año calendario, es decir:

$$\mu_{x+s} = \mu, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Con lo anterior, se tiene que la fuerza de mortalidad μ_{xt} coincide con la tasa central de mortalidad m_{xt}, además que

$$E^o_{xt} \approx E^o_{xt} + \frac{1}{2}D_{xt}.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$m_{xt} = \frac{2q_{xt}}{2 - q_{xt}}$$
$$q_{xt} = \frac{2m_{xt}}{2 + q_{xt}}.$$

8 Tablas de mortalidad

Las principales funciones biométricas contempladas en la elaboración de una tabla de mortalidad son:

1. x: representa la edad de la persona en el rango, $0 \leq x \leq w$, donde w hace referencia a la edad máxima que podría alcanzar un individuo del colectivo en análisis.

2. ℓ_x: representa el número de sobrevivientes a la edad x, asumiendo que se toma una cohorte inicial de ℓ_0 recién nacidos.

3. d_x: representa el número de personas que fallecen entre las edades x y $x+1$.

$$d_x = \ell_x - \ell_{x+1}.$$

Si las defunciones ocurren en un periodo de n años, la notación empleada es

$${}_t d_x = \ell_x - \ell_{x+t}.$$

4. q_x: representa la probabilidad que una persona de x años de edad muera antes de cumplir $x+1$ años

$$q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x} = \frac{d_x}{\ell_x}.$$

Además,

$${}_t q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x} = \frac{{}_t d_x}{\ell_x}.$$

5. p_x: representa la probabilidad que una persona de x años de edad sobreviva hasta la edad $x+1$

$$p_x = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}.$$

Además,

$${}_t p_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}.$$

6. e_x: esperanza de vida residual a la edad x

$$e_x = \frac{T_x}{\ell_x},$$

esta representa el *número promedio de años que le restan por vivir a un individuo que ha cumplido x años*. Donde

- T_x: representa el número total de años de vida vividos por una generación entre las edades x y w

$$T_x = \sum_{i=x}^{w-1} L_i$$

con

$$L_x = \ell_x + \frac{1}{2}d_x = \ell_{x+1} + \frac{1}{2}d_x$$

que corresponde al número medio de personas vivas entre x y $x+1$ años.

7. E_x: representa el número total de sujetos expuestos al riesgo a la edad x, *se determina considerando la suma de los habitantes que a final de año tienen la edad x*, P_x, y la mitad de los fallecidos con edad x, d_x, ya que se supone que las muertes se distribuyen uniformemente a través del tiempo

$$E_x = P_x + \frac{1}{2}d_x.$$

Generalmente, la cohorte inicial se considera de 100000 o de 1000000 de individuos.

9 Cálculo de probabilidades para edades fraccionadas

En esta sección se aborda el cálculo de probabilidades para edades fraccionadas, es decir, para aquellas edades intermedias entre x y $x+1$. Para ello se incorporan las variables auxiliares t y s con la hipótesis de que

$$0 \leq t \leq s \leq 1.$$

9.1 Hipótesis de distribución uniforme de la mortalidad

Se supone que las defunciones d_x se distribuyen uniformemente a lo largo del año, es decir que

$$t \cdot d_x = \ell_x - \ell_{x+t},$$

tomando en cuenta que $d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$ y, por lo tanto,

$$\ell_{x+t} = (1-t) \cdot \ell_x + t \cdot \ell_{x+1}$$

este último resultado también puede ser obtenido realizando una interpolación lineal entre ℓ_x y ℓ_{x+1}.

Para los cálculos de probabilidades tenemos que

$${}_t p_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} = \frac{\ell_x - t \cdot d_x}{\ell_x} = 1 - t \cdot q_x$$

además
$$ {}_{t}q_x = t \cdot q_x. $$
Por otro lado, se tiene que
$$ {}_{1-t}p_{x+t} = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_{x+t}} = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x - t \cdot d_x} = \frac{p_x}{1 - t \cdot q_x}. $$
Finalmente
$$ {}_{s}q_{x+t} = 1 - \frac{{}_{s+t}p_x}{{}_{t}p_x} = \frac{s \cdot q_x}{1 - t \cdot q_x}. $$

Recuerde qué $0 \leq t \leq s \leq 1$ y $0 \leq s + t \leq 1$.

9.2 Hipótesis de Balducci

Bajo esta hipótesis se supone que
$$ \frac{1}{\ell_{x+t}} = \frac{1-t}{\ell_x} + \frac{t}{\ell_{x+1}} $$

Alternativamente, se supone que
$$ \ell_{x+t} = \frac{\ell_x \cdot \ell_{x+1}}{\ell_{x+1} + t \cdot d_x} = \frac{\ell_{x+1}}{p_x + t \cdot q_x}. $$
Con esto, se tienen las siguientes probabilidades
$$ \begin{aligned} {}_{t}p_x &= \frac{p_x}{p_x + t \cdot q_x} = \frac{p_x}{1-(1-t)q_x} \\ {}_{t}q_x &= \frac{t \cdot q_x}{1-(1-t)q_x} \\ {}_{s}q_{x+t} &= \frac{s \cdot q_x}{1-(1-s-t)q_x} \end{aligned} $$

Recuerde que $0 \leq s + t \leq 1$.

LaTeX 2023-A Se agradece al lector que reporte cualquier error o sugerencia a: mat.daniel.lara@alephsub0.org