ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

MATEMÁTICA ACTUARIAL · SEGUROS DE VIDA & RENTAS ACTUARIALES

Notación

Símbolo	Descripción
v	Factor de descuento financiero
$A^1_{x:\overline{n}\rvert}$	Prima pura de un seguro de vida temporal
A_x	Prima pura de un seguro de vida entera
$A_{x:\overset{1}{\overline{n}\rvert}}$	Prima pura de un seguro de supervivencia
$A_{x:\overline{n}\rvert}$	Prima pura de un seguro de vida mixto
$_{m\rvert}A_x$	Prima pura de un seguro de vida diferido
$A_x^{(m)}$	Prima pura para un seguro de vida fraccionado
$(IA)_x$	Prima pura para un seguro con variación aritmética creciente
$(DA)_x$	Prima pura para un seguro con variación aritmética decreciente
i^*	tasa de interés* (se usa para rentas variables geométricas)
$(VA)^1_{x:\overline{n}\rvert}$	Prima pura para un seguro con variación geométrica
$a_{x:\overline{n}\rvert}$ o $_na_x$	Prima pura para una renta actuarial pospagable temporal
a_x	Prima pura para una renta actuarial pospagable vitalicia
$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}$ o $_n\ddot{a}_x$	Prima pura para una renta actuarial prepagable temporal
$\ddot{a}_x$	Prima pura para una renta actuarial prepagable vitalicia
$_{n\rvert}a_x$	Prima pura de una renta pospagable actuarial anual constante diferida
$_{n\rvert}\ddot{a}_x$	Prima pura de una renta prepagable actuarial anual constante diferida
$(Ia)_{x:\overline{n}\rvert}$	Prima pura de una renta pospagable con variación aritmética creciente
$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}\rvert}$	Prima pura de una renta prepagable con variación aritmética creciente
$(Da)_{x:\overline{n}\rvert}$	Prima pura de una renta pospagable con variación aritmética decreciente
$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}\rvert}$	Prima pura de una renta prepagable con variación aritmética decreciente
$^{\alpha}(Va)_{x:\overline{n}\rvert}$	Prima pura de una renta pospagable con variación geométrica
$^{\alpha}(V\ddot{a})_{x:\overline{n}\rvert}$	Prima pura de una renta prepagable con variación geométrica
$_na_x^{(m)}$	Prima pura de una renta actuarial fraccionada pospagable temporal
$_n\ddot{a}_x^{(m)}$	Prima pura de una renta actuarial fraccionada prepagable temporal

Recuerde que en el caso de los productos continuos se agrega una barra sobre la letra.
Por ejemplo, $\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert}$ es la prima pura de un seguro de vida temporal para el **caso continuo**.

Para el uso de las funciones en R se requiere el paquete `lifecontingencies`

1 Seguros de vida

$$\boxed{v = \frac{1}{1+i}}$$

1.1 Seguros de vida en caso de fallecimiento

1.1.1 Seguro de vida temporal

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert} = \int_0^n e^{-\delta t}\, {}_tp_x \mu_{x+t}\, dt$$

$$A^1_{x:\overline{n}\rvert} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_{k\rvert 1}q_x$$

La función en R para este seguro es `Axn`

1.1.2 Seguro de vida entera

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t}\, dt$$

$$A_x = \sum_{k=0}^{w-(x+1)} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

La función en R para este seguro es la misma que la utilizada para un seguro de vida temporal ajustando la duración del mismo.

1.2 Seguros de vida en caso de supervivencia

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n {}_n p_x$$

La función en R para este seguro es `Exn`

1.3 Seguros de vida mixtos

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

La función en R para este seguro es `AExn`

Bajo el supuesto de uniformidad de las muertes a lo largo de cada año, la relación entre la prima de un seguro de vida discreto y un seguro de vida que pague la indemnización al final de periodos $\frac{1}{m}$ del año, que está dada por la expresión

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{j^{(m)}} A_x$$

1.4 Seguros de vida diferidos

$${}_{m|}\bar{A}_x = \int_m^{+\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t}\, dt$$

$${}_{m|}A_x = \sum_{k=m}^{w-(x+1)} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

$${}_{m|}A_x = {}_m E_x A_{x+m}$$

Factor de descuento actuarial:

$${}_n E_x = A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

La función en R para este seguro es `Axn` con la variable `m` para el diferimiento.

1.5 Seguros de vida fraccionados

$$A_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{[w-(x+1)]m} v^{\frac{k+1}{m}} {}_{\frac{k}{m}} p_x \, {}_{\frac{1}{m}} q_{x+\frac{k}{m}}$$

Bajo la hipótesis de uniformidad de las muertes para cada periodo, $1/m$ la relación entre wla prima pura de un seguro fraccionado y un seguro de vida entero

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{j^{(m)}} A_x$$

Para la tarificación de seguros con coberturas variables se usa una combinación apropiada de las funciones anteriores o también es posible realizar el descuento de cada flujo.

1.6 Seguros con coberturas variables

1.6.1 Coberturas con variación aritmética creciente

$$(I\bar{A})_x = \int_0^{+\infty} \lfloor t+1 \rfloor e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t}\, dt$$

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{+\infty} {}_{k|}A_x$$

1.6.2 Coberturas con variación aritmética decreciente

$$(D\bar{A})_x = \int_0^{+\infty} \lfloor n-t \rfloor e^{-\delta t} {}_t p_x \mu_{x+t}\, dt$$

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

$$(DA)_x = \sum_{k=0}^{n-1} A^1_{x:\overline{n-k}|}$$

1.6.3 Coberturas con variación geométrica

$$(V\overline{A})^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^{+\infty} e^{-(\delta-\beta)t} {}_t p_x \mu_{x+t}\, dt$$

$$(V\overline{A})^1_{x:\overline{n}|} = (\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})_{i^*}$$

$$(VA)^1_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{1+\alpha} (A^1_{x:\overline{n}|})_{i^*}$$

$$\beta = \ln(1+\alpha)$$

$$i^* = \frac{1+i}{1+\alpha}$$

2 Rentas Actuariales

2.1 rentas actuariales anuales, constantes e inmediatas

2.1.1 Rentas actuariales pospagables temporales

1. **Primera forma:** se emplea si únicamente se desea obtener la prima pura.

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}{}_{k+1}p_x = \sum_{k=1}^{n} v^k{}_k p_x$$

El inconveniente que presenta es que el modelo probabilístico no supone una distribución de probabilidad

$$\sum_k {}_k p_x > 1$$

2. **Segunda forma:** no se emplea en la práctica

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|} - i \cdot A^1_{x:\overline{n}|}}{i}$$

3. **Tercera forma:** es la más empleada, ya que satisface las condiciones para una distribución de probabilidad

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n-1} a_{\overline{k}|i} \cdot {}_{k|1}q_x + a_{\overline{n}|i} \cdot {}_n p_x.$$

La función en R para este seguro es axn recordar que se debe especificar si es prepagable o pospagable.

En efecto, el modelo anterior satisface que

$$\sum_{k=1}^{n-1} {}_{k|1}q_x + {}_n p_x = 1$$

2.1.2 Rentas actuariales pospagables vitalicias

$$a_x = \sum_{k=0}^{w-(x+1)} v^{k+1}{}_{k+1}p_x = \sum_{k=1}^{w-x} v^k{}_k p_x.$$

$$a_x = \lim_{n\to+\infty} a_{x:\overline{n}|} = \frac{1-(1+i)A_x}{i}$$

2.1.3 Rentas actuariales prepagables temporales

1. **Primera forma:** se emplea si únicamente se desea obtener la prima pura.

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k{}_k p_x$$

El inconveniente que presenta es que el modelo probabilístico no supone una distribución de probabilidad

$$\sum_k {}_k p_x > 1$$

2. **Segunda forma:** no se emplea en la práctica

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}$$

$$\boxed{d = \frac{i}{1+i}}$$

3. **Tercera forma:** es la más empleada, ya que satisface las condiciones para una distribución de probabilidad

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n-2} \ddot{a}_{\overline{k+1}|i} \cdot {}_{k|1}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|i} \cdot {}_{n-1}p_x.$$

En efecto, el modelo anterior satisface que

$$\sum_{k=1}^{n-1} {}_{k|1}q_x + {}_n p_x = 1$$

2.1.4 Rentas actuariales prepagables vitalicias

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{w-(x+1)} v^k{}_k p_x$$

$$\ddot{a}_x = \frac{1-A_x}{d}$$

2.2 Rentas actuariales anuales, constantes y diferidas

$${}_{m|n}a_x = {}_mE_x \cdot a_{x+m:\overline{n}|}$$

Note que ${}_mE_x$ es el factor de descuento actuarial de m periodos.

Para el caso de una renta vitalicia diferida se tiene que:

$${}_{m|}a_x = {}_mE_x \cdot a_{x+m}$$

Por otro lado, si consideramos el caso de una renta **prepagable**:

$${}_{m|n}\ddot{a}_x = {}_mE_x \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}$$

$${}_{m|}\ddot{a}_x = {}_mE_x \cdot \ddot{a}_{x+m}$$

2.3 Rentas actuariales de cuantía variable

2.3.1 Cuantías con variación aritmética creciente

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)v^{k+1}{}_{k+1}p_x = \sum_{k=1}^{n} kv^k{}_k p_x$$

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)v^k{}_k p_x$$

2.3.2 Cuantías con variación aritmética decreciente

$$(Da)_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)v^{k+1}{}_{k+1}p_x = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)v^k{}_k p_x$$

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^k {}_kp_x$$

2.3.3 Cuantías con variación geométrica

$${}^{\alpha}(Va)_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1}(1+\alpha)^k v^{k+1} {}_{k+1}p_x = \sum_{k=1}^{n}(1+\alpha)^{k-1} v^k {}_kp_x$$

$${}^{\alpha}(V\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1}(1+\alpha)^k v^k {}_kp_x = \sum_{k=0}^{n-1}(v^*)^k {}_kp_x = a^*_{x:\overline{n|}}$$

donde la tasa de interés para esta renta está dada por

$$v^* = \frac{1+\alpha}{1+i} = \frac{1}{1+i^*} \implies i^* = \frac{1}{v^*} - 1$$

2.3.4 Rentas actuariales fraccionadas

$${}_na_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{1}{m}v^{k+\frac{s}{m}} \cdot {}_{k+\frac{s}{m}}p_x$$

Hipótesis de Woolhouse

Linealidad de ℓ_x

$$\ell_{x+t} = (1-t)\cdot \ell_x + t\cdot \ell_{x+1} \quad \forall t \in [0,1]$$

Linealidad sobre el factor de descuento financiero

$$v^{x+t}\ell_{x+t} = (1-t)v^x \cdot \ell_x + t\cdot v^{x+1}\ell_{x+1} \quad \forall t \in [0,1]$$

$$\begin{aligned} {}_na_x^{(m)} &= {}_n\ddot{a}_x - \frac{m+1}{2m}\left[{}_n\ddot{a}_x - {}_na_x\right] \\ &= {}_n\ddot{a}_x - \frac{m+1}{2m}\left[1 - {}_nE_x\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_n\ddot{a}_x^{(m)} &= {}_n\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\left[{}_n\ddot{a}_x - {}_na_x\right] \\ &= {}_n\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\left[1 - {}_nE_x\right] \end{aligned}$$

Para el cálculo de la prima es necesario multiplicar por la cantidad de peridos m. Es decir, see tiene que el valor real de la prima está dado por

$${}_na_x^{(m)} = \left({}_n\ddot{a}_x - \frac{m+1}{2m}\left[1 - {}_nE_x\right]\right)\cdot m$$

LaTeX 2023-A Se agradece al lector que reporte cualquier error o sugerencia a:
mat.daniel.lara@alephsub0.org