ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

Nombre: Matías Lara **Fecha:** Diciembre, 2023

Tema: Teorema de diferenciación de Lebesgue **Materia:** EDPE -

El presente documento corresponde a una extensión de los resultados presentados en [1] en la Sección 3.4: Diferenciación en espacios Euclidianos. En particular, el nuestro objetivo es presentar una demostración del Teorema de diferenciación de Lebesgue, el cual es un resultado que relaciona la operación de integración con la operación de diferenciación para funciones que no son continuas pero son integrables en el sentido de Lebesgue.

Se agradece al lector que reporte cualquier error o sugerencia a:

`mat.daniel.lara@alephsub0.org`

1. Preeliminares

Teorema 1

Si $f \in L^1(\lambda)$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe una función simple

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{R_j}(x))$$

donde cada R_j es el producto de intervalos, tal que

$$\int |f(x) - \phi(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Más aún, existe una función continua g que se anula fuera de un conjunto acotado tal que

$$\int |f(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Demostración. Ver Teorema 2.41 Folland. □

2. Motivación

Recordemos el teorema fundamental del cálculo:

Teorema 2: –Primer Teorema Fundamental del Cálculo–
Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, definamos la función

$$\begin{aligned} F\colon\ [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que F es continua en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$, y además se verifica que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x),$$

para todo $x \in]a,b[$.

Este teorema nos permite relacionar la operación de integración con la operación de diferenciación.

De esta manera, se plantea la siguiente pregunta: ¿Existe un teorema que relacione la operación de integración con la operación de diferenciación para funciones que no son continuas pero son integrables en el sentido de Lebesgue?

Para abordar esto, notemos que si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces para $x \in]a,b[$ se tiene que

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \quad \Longrightarrow \quad \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = F'(x).$$

Más aún, se tiene que

$$F'(x) = \lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\,dt.$$

En efecto, notemos que

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\,dt = \lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{2\delta}\left(\int_{x-\delta}^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+\delta} f(t)\,dt\right)$$

De esta manera, como

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{2\delta}\int_x^{x+\delta} f(t)\,dt = \frac{F'(x)}{2}$$

y dado que

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x} f(t)\,dt = \lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{2\delta}\left[F(x) - F(x-\delta)\right]$$

tomando el cambio de variable $z = x - \delta$ se tiene que

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{2\delta} \left[F(z+\delta) - F(z) \right] = \frac{F'(x)}{2}.$$

No obstante, como $z \to x$ cuando $\delta \to 0^+$, se tiene que

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x} f(t)\, dt = \frac{F'(x)}{2}.$$

Así, se ha probado que

$$F'(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\, dt.$$

● **Observación 1.** Notemos que lo anterior puede ser visto de la siguiente manera: Dado que el intervalo $]x-\delta, x+\delta[$ corresponde a la bola abierta de centro x y radio δ en $\mathbb{R}$, entonces

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{2\delta} \int_{B(x,\delta)} f(t)\, dt.$$

Puesto que 2δ es el diámetro de la bola $B(x,\delta)$, lo cual podemos informalmente decir que es en nuestro contexto es el tamaño del conjunto, entonces notando a esto como el módulo del conjunto, se tiene que

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{|B(x,\delta)|} \int_{B(x,\delta)} f(t)\, dt.$$

Debido a la observación anterior, consideremos la generalización del resultado a $\mathbb{R}^N$, en este caso, si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un abierto tal que $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\frac{1}{|B(x,\delta)|} \int_{B(x,\delta)} f(t)\, dt \to f(x) \quad \text{cuando } \delta \to 0^+.$$

3. Resultados preeliminares del capítulo

Lema 1. Sea $\mathcal{C}$ una colección de bolas abiertas en $\mathbb{R}^N$ tal que

$$U = \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B.$$

Si $c < \lambda(U)$, entonces existen $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{C}$ disjuntos tales que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda(B_i) > 3^{-n} c.$$

Demostración. Ver Lema 3.15 Folland. □

Definición 1

Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, entonces para $x \in \mathbb{R}^N$ y $r > 0$ definimos el promedio de f en la bola $B(x,r)$ como

$$A_r f(x) = \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(t)\, dt.$$

Lema 2. Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, entonces $A_r f(x)$ es juntamente continua en (x,r) con $x \in \mathbb{R}^N$ y $r > 0$.

Definición 2: –Funcional maximal de Hardy-Littlewood–

Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ se define el *Funcional maximal de Hardy-Littlewood* Hf por

$$Hf(x) = \sup_{r>0} A_r|f|(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\lambda(B(r,x))} \int_{B(r,x)} |f(y)|\, dy$$

● **Observación 2.** Hf es medible pues para todo $a \in \mathbb{R}$

$$(Hf)^{-1}((a,+\infty)) = \bigcup_{r>0} (A_r|f|)^{-1}((a,+\infty))$$

es abierto para todo $a \in \mathbb{R}$ por el Lema 2

Teorema 3: –Teorema del maximal–

Existe una constante $C > 0$ tal que para todo $f \in L^1$ y para todo $\alpha > 0$,

$$\lambda(\{x \,:\, Hf(x) > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \int |f(x)|\, dx.$$

Límite superior para funciones real valuadas de variable real

$$\limsup_{r\to R} \phi(r) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{0<|r-R|<\varepsilon} \phi(r) = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{0<|r-R|<\varepsilon} \phi(r).$$

Además, se puede verificar que

$$\lim_{r\to R} \phi(r) = c \iff \limsup_{r\to R} |\phi(r) - c| = 0.$$

Teorema 4

Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, entonces $\lim_{r\to 0} A_r f(x) = f(x)$ casi todo punto para $x \in \mathbb{R}^N$.

Comentario: El siguiente teorema es una «versión» del teorema fundamental del cálculo para funciones integrables en el sentido de Lebesgue para el caso en el que los conjuntos sobre los que se integra son bolas abiertas.

Idea: La idea de la desmotración se basa en mostrar que el conjunto de puntos donde no se cumple la igualdad es de medida nula.

Demostración.

`P.D. Probar que` $A_r f(x) \to f(x)$ `casi todo punto para` $x \in \mathbb{R}^N$.

`P.D. Es suficiente mostrar que` $A_r f(x) \to f(x)$ `para` $x \in \overline{B}(o, m)$ `con` $m \in \mathbb{N}$

En efecto, supongamos que para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\lim_{r\to 0} A_r f(x) = f(x),$$

para todo $x \in \overline{B}(0, m)$ excepto F_n un conjunto de medida nula. Más aún, se tiene que $y \in \overline{B}(0, m+1)$, entonces si tomamos

$$F = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} F_m,$$

entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n$, existe (por la propiedad arquimediana) un natural $\hat{s}$ tal que $x \in \overline{B}(0, \hat{s})$ y por lo tanto se tiene que la propiedad se cumple casi todo punto en dicha bola, más precisamente en $\mathbb{R}^N \setminus F$.

De esta manera, se tiene que tomando $f = f\chi_{\overline{B}(0,m+1)}$, se sigue el resultado para cada $m \in \mathbb{N}$.

`P.D. Para cada` $m \in \mathbb{N}$ $A_r f(x) \to f(x)$ `para` $x \in \mathbb{R}^N$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ cualesquiera. Además, sea $x \in \mathbb{R}^N$.

`P.D.` $\lim_{r\to 0} A_r g(x) = g(x)$

Aplicando el teorema 1 se tiene que existe una función continua integrable que se anula fuera de un conjunto acotado tal que

$$\int |f(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon. \tag{1}$$

Por la continuidad de la función g aplicando la definición $\varepsilon - \delta$ se tiene que para todo $y \in \mathbb{R}^N$ y $\delta > 0$ existe $r > 0$ tal que

$$|y - x| < r \quad \Longrightarrow \quad |g(y) - g(x)| < \delta.$$

De esta manera, se sigue que

$$\begin{aligned}
|A_r g(x) - g(x)| &= \left| \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} g(y)\, dy - g(x) \right| \\
&\leq \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |g(y) - g(x)|\, dy \\
&\leq \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \delta\, dy \\
&= \delta.
\end{aligned}$$

por lo tanto tomando $\delta = \frac{1}{k}$ y cuando $k \to +\infty$ se sigue que $A_r g(x) = g(x)$ para todo $x \in \overline{B}(0, m)$.

P.D. $\lim_{r\to 0} A_r f(x) = f(x)$

Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0} |A_r f(x) - f(x)| \\
&= \limsup_{r\to 0} |A_r f(x) - f(x) + A_r g(x) - g(x) - A_r g(x) + g(x)| \\
&\leq \limsup_{r\to 0} \left(|A_r f(x) - g(x)| + |A_r g(x) - g(x)|\right) + |(f - g)(x)| \\
&= H(f - g)(x) + |(f - g)(x)|.
\end{aligned}$$

Así, si para $\alpha > 0$ cualesquiera definimos los conjuntos

$$E_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \,:\, \limsup_{r\to 0} |A_r f(x) - f(x)| > \alpha \right\}$$

y

$$F_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \,:\, |(f - g)(x)| > \alpha \right\},$$

entonces por la desigualdad anterior, se tiene que

$$E_\alpha \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^N \,:\, H(f - g)(x) > \frac{\alpha}{2} \right\} \cup F_{\alpha/2}. \tag{2}$$

Así, por definición del conjunto $F_{\alpha/2}$ puesto que tomamos el valor absoluto de las funciones, se tiene que usando (1)

$$\varepsilon > \int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - g(x)|\, dx \geq \int_{F_{\alpha/2}} |f(x) - g(x)|\, dx \geq \int_{F_{\alpha/2}} \frac{\alpha}{2}\, dx = \frac{\alpha}{2} \lambda(F_{\alpha/2}),$$

de donde

$$\lambda(F_{\alpha/2}) < \frac{2\varepsilon}{\alpha}.$$

Usando el teorema 3 se tiene que existe $C > 0$ tal que para todo $\alpha > 0$, en particular el usando anteriormente en esta demostración, se tiene que

$$\lambda\left(\left\{x \in \mathbb{R}^N \,:\, H(f-g)(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \leq \frac{2C}{\alpha}\int |f(x)-g(x)|\,dx < \frac{2C\varepsilon}{\alpha}.$$

Usando esto en la desigualdad (2) y dado que los conjuntos tienen medida finita se tiene que

$$\lambda(E_\alpha) \leq \frac{2\varepsilon}{\alpha} + \frac{2C\varepsilon}{\alpha}$$

por lo tanto, como ε es arbitrario, se tiene que tomando $\varepsilon = \frac{1}{k}$ y cuando $k \to +\infty$ se tiene que $\lambda(E_\alpha) = 0$ para todo $\alpha > 0$. □

● **Observación 3.** El resultado anterior se puede reescribir de la siguiente manera: Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))}\int_{B(x,r)} [f(y)-f(x)]\,dy = 0 \tag{3}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ casi todo punto.

● **Observación 4.** La expresión (3) es válida si ahora consideramos el valor absoluto del integrando, es decir,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|\,dy = 0.$$

Este resultado lo vamos a probar en el siguiente teorema.

Definición 3: –Conjunto de Lebesgue–

Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, entonces el conjunto de Lebesgue de f es

$$L_f = \left\{x \in \mathbb{R}^N \,:\, \lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|\,dy = 0\right\}.$$

Comentario: EL siguiente teorema es un resultado auxiliar que se usará para probar el teorema de diferenciación de Lebesgue.

Teorema 5

Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, entonces $\lambda\left((L_f)^c\right) = 0$.

Demostración. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, cualesquiera, queremos probar que

$$\lambda\left((L_f)^c\right) = 0 = \lambda\left(\left\{x \in \mathbb{R}^N : \lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy > 0\right\}\right) = 0.$$

Para cada $c \in \mathbb{R}$, definamos $g_c(x) = |f(x) - c|$, entonces puesto que g es una traslación y composición con una función continua, se sigue que $g_c \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$; así, usando el teorema 4 se tiene que

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} g_c(y)\, dy = g_c(x),$$

es decir, tenemos que

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - c|\, dy = |f(x) - c|,$$

para $x \in \mathbb{R}^N$ casi todo punto, i.e. para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus E_c$ con $\lambda(E_c) = 0$.

Ahora, si consideramos D un subconjunto denso[1] de $\mathbb{R}$ entonces, si ahora tomamos $c \in D$, se tiene que definiendo

$$E = \bigcup_{c\in D} E_c,$$

entonces $\lambda(E) = 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus E$ se tiene que

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - c|\, dy = |f(x) - c|, \tag{4}$$

para todo $c \in D$.

Por otro lado, si tomamos $x \notin E$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $c \in D$ tal que $|f(x) - c| < \varepsilon$, y más aún

$$|f(x) - f(y)| \le |f(y) - c| + \varepsilon.$$

De esta manera, se tiene que usando (4)

$$\begin{aligned}
\limsup_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy \\
&\le \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - c| + \varepsilon\, dy \\
&= |f(x) - c| + \varepsilon \\
&< 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

[1]Note que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son separables, por lo tanto admiten un subconjunto denso numerable.

Puesto que ε es arbitrario, se tiene que tomando $\varepsilon = \frac{1}{k}$ y cuando $k \to +\infty$ se concluye que

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0,$$

para todo $x \notin E$. Por lo tanto, gracias a que L_f es medible (ver Observación 2)

$$E^c \subseteq L_f \quad \Longrightarrow \quad \lambda(L_f^c) \leq \lambda(E) = 0,$$

es decir, se ha probado que $\lambda(L_f^c) = 0$, como se quería. □

● **Observación 5.** De manera general, se puede considerar una familia de conjuntos más general que las bolas abiertas, es decir, una familia de conjuntos $\{E_r\}_{r>0}$ de conjuntos Borel medibles en $\mathbb{R}^N$ que se «encojen adecuadamente» a $x \in \mathbb{R}^N$ cuando $r \to 0$, este tipo de conjuntos deben satisfacer que:

- $E_r \subseteq B(x,r)$ para todo $r > 0$.
- Existe $\alpha > 0$ independiente de r tal que $\lambda(E_r) \geq \alpha\lambda(B(x,r))$.

● **Observación 6.** Los conjuntos E_r no necesariamente contienen a x. En efecto, si U es cualquier subconjunto Borel medible de $B(0,1)$ tal que $\lambda(U) > 0$, entonces si definimos

$$E_r = \{x + ry \,:\, y \in U\},$$

entonces la familia $\{E_r\}$ colapsa adecuadamente a x cuando $r \to 0$.

Teorema 6: –Teorema de diferenciación de Lebesgue–

Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Para todo x en el conjunto de Lebesgue de f, en particular para casi todo punto, se tiene que

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(E_r)} \int_{E_r} f(y)\, dy = f(x)$$

y

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(E_r)} \int_{E_r} |f(y) - f(x)|\, dy = 0,$$

para toda familia de conjuntos $\{E_r\}_{r>0}$ que encojen adecuadamente a x cuando $r \to 0$.

Demostración. Mostremos cada una de las igualdades por separado. Sean $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, cualquiera y $\{E_r\}_{r>0}$ una familia que colapsa adecuadamente a x cuando $r \to 0$. Por hipótesis, existe $\alpha > 0$ tal que $\lambda(E_r) \geq \alpha\lambda(B(x,r))$ para todo $r > 0$.

1. Entonces, puesto que $E_r \subseteq B(x,r)$ y los integrandos son positivos, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda(E_r)} \int_{E_r} |f(y) - f(x)|\, dy &\leq \frac{1}{\lambda(E_r)} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy \\ &\leq \frac{1}{\alpha\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy \end{aligned}$$

   Así, por el Teorema 5 se tiene que

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0.$$

2. Para la segunda igualdad, notemos que

$$\frac{1}{\lambda(E_r)} \int_{E_r} f(y)\, dy = f(x) \quad \iff \quad \frac{1}{\lambda(E_r)} \int_{E_r} f(y) - f(x)\, dy = 0.$$

   De esta manera, como

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\lambda(E_r)} \int_{E_r} f(y) - f(x)\, dy \right| &= \frac{1}{\lambda(E_r)} \left| \int_{E_r} f(y) - f(x)\, dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\lambda(E_r)} \int_{E_r} |f(y) - f(x)|\ dy. \end{aligned}$$

   Por el literal anterior, tenemos que

$$\frac{1}{\lambda(E_r)} \int_{E_r} |f(y) - f(x)|\ dy = 0,$$

   con lo que se sigue lo requerido.

Es claro que el resultado es cierto para todo punto en el conjunto de Lebesgue de f, pero por el Teorema 5, se tiene que el resultado se cumple casi todo punto en $\mathbb{R}^N$. □

> Note que en la mayoría de desarrollos realizados no siempre conocemos la existencia de los límites con antelación. Es por esto que se recurre al uso del límite superior; de esta manera, como estos límites se toman del módulo de los valores estos se encuentran acotados inferiormente por cero y cuando se muestra que el límite superior es cero se puede concluir que el límite existe y es cero.

Referencias

[1] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2nd. New York, NY: John Wiley & Sons, 1999. ISBN: 9780471317166.