Introducción a la Teoria de Distribuciones

Prof. Fernando Cortez

Contenido del curso

Capítulo 1: Espacio de las funciones test, C^∞, espacio de las funciones a decaimiento rápido. (funciones de Schwartz)

Capítulo 2: Funciones pico, funciones meseta y funciones regularizantes

Capítulo 3: Distribuciones, a soporte compacto, distribuciones temperadas

Capítulo 4: Transformada de fourier y soluciones fundamentales de algunas ecuaciones en derivadas parciales

Capítulo 1

↳ funciones test, propiedades básicas
↳ funciones a decaimiento rápido
↳ Convergencia de las funciones

Capítulo 2

↳ Construir a partir de una función, una sucesión de funciones regularizantes

Capítulo 3

↳ Distinguir entre una distribución y una función
↳ Entender el concepto de una derivada en el sentido de distribución
↳ Solución de una EDP en el sentido de distribución

Capítulo 4

↳ Transformada de Fourier en espacio de Schawrtz (Propiedades básicas)
↳ Transformada de Fourier de una distribución temperada

Evaluación (1er bimestre)

- Control 1 35%
- Control 2 35%
- Deberes 10%
- Trabajo en conjunto (LaTeX)

Bibliografía

[1] C. Zuly (1986) Theorie des distributiones et équations aux derivés partielles

[2] D. Mitrea

Cronograma de actividades

Control 1: Lunes 4 de diciembre 2023

Control 2: Miércoles 3 de enero 2024

Deber 1: 29 de noviembre 2023

Deber 2: 8 de enero 2024

Trabajo en conjunto: martes 9 de enero 2024

Capítulo 1:

Motivación: El objetivo de definir una teoría de distribuciones es para generalizar el concepto de «función» a partir del corchete de «dualidad».

La idea central es no observar una función f (por ejemplo $f \in C(\Omega)$) puntualmente sino a travez de una cantidad $\langle e, f \rangle$ donde f es una función super regular (función test). Esto permite dar sentido, por ejemplo, a las pulsaciones (delta de Dirac) que aparecen en la ingeniería.

Además, gracias a este concepto de distribución es posible definir de manera conveniente operaciones tales como la derivación, la transformada de Fourier, que en general no tienen sentido en el marco de funciones no tan regulares.

Por ejemplo, si $f \in L^p(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $i \in [\![1,n]\!]$

En este curso nos interesa utilizar la teoría de distribuciones en E.D.P. En particular, daremos la definición de soluciones en sentido de distribuciones de una EDP

Notaciones

- Si $x \in \mathbb{R}^n$, notaremos $|x| = \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$
- Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ lo llamaremos un multíndice
- Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ multíndice $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, $\alpha! = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i!$
- Para $x \in \mathbb{R}^n$, $x^\alpha = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}$
- Para $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ multíndices: $\alpha \leq \beta$ si y solo si $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\alpha_i \leq \beta_i$

  También $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!} = \prod_{i=1}^{n} \binom{\alpha_i}{\beta_i}$ donde $\binom{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{\alpha_i!}{\beta_i!\,(\alpha_i-\beta_i)!}$
- Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$D^\alpha(\cdot) = \partial^\alpha(\cdot) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, definimos $C(\Omega)$ o $C^0(\Omega)$ las funciones continuas de Ω en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$
- Si $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 1$ $C^k(\Omega) = \left\{ u \in C^{k-1}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega) \ \forall i \in [\![1,n]\!] \right\}$

- Por último, las siguientes fórmulas serán útiles en el transcurso de esta asignatura

  Pendiente completar las fórmulas

  - Sea $k \geq 1$, $\varphi, \psi \in C^k(\Omega)$ entonces para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multíndice tal que $|\alpha| \leq k$, se tiene que

$$\partial^\alpha(\varphi \cdot \psi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \varphi \, \partial^{\alpha-\beta} \psi$$

Sección: Funciones test

Definición 0.1 (Soporte)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y consideramos $f \in C^0(\Omega)$, definimos el soporte de f como

$$\operatorname{sopp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

Observación: Por definición del soporte de f tenemos lo siguiente:

$(\text{sopp}(f))^c$ es el mayor abierto de Ω donde la función se anula

- Si $x_0 \notin \text{sopp}(f)$ con $x_0 \in \Omega$, entonces existe una vecindad $V_{x_0} \in V(x_0) \subseteq \Omega$ tal que

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in V_{x_0}$$

- $\text{Sopp}(f) = \emptyset \iff f = 0$
- Si $\text{sopp}(\varphi\psi) \subseteq \text{sopp}(\varphi) \cap \text{sopp}(\psi)$
- Si $f \in C^k(\Omega)$ entonces para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multíndice

$$\text{sopp}(\partial^\alpha f) \subset \text{sopp}(f)$$

Definición 0.2 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. Decimos que $f: \Omega \to \mathbb{K}$ es una función test dentro de Ω si $f \in C^\infty(\Omega)$ y $\text{sopp}(f) \subseteq \Omega$ y es compacto

Consideremos los ejemplos:

- $e^{-|x|^2} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\qquad$ $\text{sopp}(e^{-|x|^2})$ no es compacto
- $\mathbb{1}_\Omega e^{-|x|} \notin C^0(\mathbb{R}^n)$ $\qquad$ $|\Omega| < +\infty$

Miércoles, 8 de noviembre de 2023

Resultado fundamental

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto, $k \geq 1$ con $k \in \mathbb{N}$ y f una función $C^k(\mathbb{R})$ y consideramos $x, y \in \Omega$ tal que $[x, y] \subseteq \Omega$, entonces

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(y) (x-y)^\alpha + \sum_{|\alpha| = k} \frac{n}{\alpha!} (x-y)^\alpha \int_0^1 (1-t)^{n-1} \partial^\alpha f(xt + (1-t)y)\, dt$$

En el caso, cuando $d = 1$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k!} (x-y)^j \varphi^{(j)}(y) + (x-y)^k \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{k-1} \varphi^{(k)}(tx + (1-t)y)\, dt$$

En el caso $d \geq 1$ $\quad k = 1$

$$f(x) = f(y) + \sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx + (1-t)y)\, dy$$

Observación: Note que $D^\infty(\Omega)$ tiene estructura vectorial en $C^\infty(\Omega)$

Definición 0.3. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $K \subseteq \Omega$ un compacto, definimos

$$D_K^\infty(\Omega) = \{ \varphi \in C^\infty(\Omega) \text{ tal que } \text{sopp}(f) \subset K \}$$

Notemos que $D_K^\infty(\Omega) \subseteq D^\infty(\Omega)$

Ejemplos de funciones test

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{-|x|^2}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

entonces $\varphi \in D^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ y $\operatorname{sopp}(\varphi) \subseteq \overline{B}(0,1)$

Tomemos en cuenta lo siguiente

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = \int_{B(0,1)} \varphi(x)\, dx > 0$$

Si $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $|y| \neq 1$, entonces φ es C^{∞} en y.

Ahora, debemos mostrar que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \lim_{|x| \to 1} \partial^{\alpha} \varphi(x) = 0$$

Sería suficiente tratar el caso en una dimensión

$X = (x_1, x_2)$ $\quad |x| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ $\quad \alpha : (k, q)$ $\quad k, q \in \mathbb{N}$

$\alpha = (1,3)$ $\quad \partial^{\alpha} \varphi_{,} = \partial_{x_1}^{1} \partial_{x_2}^{3} \varphi$ $\quad \forall k \quad \partial_{x_i}^{k} \varphi \in C \quad i = 1, 2$

En efecto, considerando el caso monodimensional

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{1-x^2}} & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Mostremos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi^{(n)} = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2n}} \varphi(\cdot)$$

Entonces, tomando $n = 1$

$$\varphi' = \frac{-2x}{(1-x^2)^2} \varphi(\cdot) \qquad \text{tomando } P_1(x) = -2x$$

Por inducción, supongamos que es cierto para algún $k \in \mathbb{N}$, i.e.,

$$\varphi^{n} = \frac{P_k(x)}{(1-x^2)^{2k}} \varphi(\cdot)$$

luego

$$\varphi^{n+1} = \varphi(\varphi^{(n)})' = \left(\frac{P_n(\cdot)}{(1-x^2)^{2n}} \varphi(\cdot) \right)' = \frac{P_{n+1}}{(1-x^2)^{2(n+1)}} \varphi(x)$$

donde $P_{n+1} = -2x P_n + P_n' (1-x^2)^2 + 4nx(1-x^2) P_n$

Faltaría mostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(n)}$ es continua en $t = 1$

$$\lim_{t \to 1^+} \varphi^{(n)}(t) = \lim_{t \to 1^-} \varphi^{(n)}(t) \quad \text{i.e.,} \quad \lim_{x \to 1^-} \varphi^{(n)}(t) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En primer lugar, tomamos $x = 1 - t$, entonces

$$\lim_{x \to 1^-} \varphi^{(n)}(x) = \lim_{t \to 0} \varphi^{(n)}(1-t)$$

Luego, como

$$\varphi^{(n)}(1-t) = \frac{P_n(1-t)\,\varphi(1-t)}{(1-(1-t)^2)^{2n}} = \frac{P_n(1-t)\,\varphi(1-t)}{(1-1+2t-t^2)^{2n}}$$

$$= \frac{P_n(1-t)\,\varphi(1-t)}{(2t-t^2)^{2n}}$$

$$= \frac{P_n(1-t)\,\varphi(1-t)}{t^{2n}(2-t)^{2n}}$$

$$= \frac{P_n(1-t)}{(2-t)^{2n}} \cdot e\, \frac{e^{-\frac{t}{t(2-t)}}}{t^{2n}}$$

Ahora, como

$$\lim_{x\to 1} e^{-\frac{|x|^2}{1-|x|^2}} = e^{\lim_{x\to 1} -\frac{|x|^2}{1-|x|^2}} = 0$$

Por otro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{t\to 0} e\,\frac{P_n(1-t)}{(2-t)^{2n}} \underbrace{\frac{e^{-\left|\frac{1}{t(2-t)}\right|}}{t^{2n}}} \qquad t^{2n} \to 0$$

$$e^{-\left|\frac{1}{t(2-t)}\right|} \to 0.$$

$|t^{2n}| = |t|^{2n} < \varepsilon$ $\quad |t| < \delta \quad$ tomando $\delta = \varepsilon^{-2n}$ ← Relación de convergencia

$\left| e^{-\left|\frac{1}{t(2-t)}\right|}\right|$ ← Expansión en series de la exponencial

Buscamos $t \to 0$

$$\left|\frac{e^{-\left|\frac{1}{t(2-t)}\right|}}{t^{2n}}\right| = \frac{1}{|t^{2n}|} \cdot \left| e^{-\frac{1}{|t(2-t)|}}\right| \qquad 1 > t^{2n} \quad \text{para } t<1$$

$$1 < \frac{1}{t^{2n}} \quad \text{para } t>1$$

$2t - t^2$

Si buscamos probar que $\lim_{t\to 0}$, por un lado, notemos que

$$e^{-\left|\frac{1}{t(2-t)}\right|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left|\frac{1}{t(2-t)}\right|^k}{k!}$$

Si consideramos los casos laterales, se tiene que si $t>0$, entonces

$$e^{-\left|\frac{1}{t(2-t)}\right|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{t(2-t)}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k(2-t)^k}{k!} + \varepsilon$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k \left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell}(2)^{\ell}(-t)^{k-\ell}\right)}{k!} + \varepsilon$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k \overbrace{\left((-t)^k + \binom{k}{1}(2)(-t)^{k-1} + \dots + \binom{k}{k}2^k\right)}^{\text{polinomio } Q}}{k!} + \varepsilon$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k\left((-1)^k t^k + (-1)^{k-1}\binom{k}{1}(2)(t)^{k-1} + \dots + 2^k\right)}{k!} + \varepsilon$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{o(t^{2k+1})}{k!} + \varepsilon$$

$Q = o(t^{2k+1})$

$$= \frac{o(t^{2m+1})}{m!} + \varepsilon$$

De esta manera, se tiene que

$$\frac{e^{-\left|\frac{1}{t(2-t)}\right|}}{t^{2n}} = \frac{\frac{o(t^{2m+1})}{m!} + \varepsilon}{t^{2n}}$$

$$= \frac{o(t^{2m+1})}{m!\, t^{2n}} + \frac{\varepsilon}{t^{2n}}$$

Lunes, 13 de noviembre de 2023.

Observación En primer lugar, note que la definición de φ permite generalizar funciones test en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

Dado Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y $a \in \Omega$, entonces existe $r_a > 0$ tal que

$$B(a, r_a) \subseteq \Omega$$

Definimos la función:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\left|\frac{r_a}{2}\right| - \|x-a\|^2}} & \text{si } x \in B(a, r_a/2) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

entonces

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \overline{B}(a, r_a/2) \subseteq B(a, r_a) \subset \Omega$$

y por lo visto anteriormente $\varphi \in C^\infty(\Omega)$

Convergencia en $D^\infty(\Omega)$

Empezaremos por dar una noción de convergencia para este tipo de funciones que en un futuro nos permitirán definir el concepto de distribución

Definición 0.4 Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones test y $f \in D^\infty(\Omega)$

Decimos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $D^\infty(\Omega)$ si

- Existe $K \subset \Omega$ compacto tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ $\operatorname{supp}(f_n) \subset K$
- $\forall\, \alpha$-multíndice $(\partial^\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $(\partial^\alpha f)$
- $\forall\, \alpha$-multíndice $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\partial^\alpha f_n - \partial^\alpha f\|_\infty = 0$, donde

$$\|\partial^\alpha f_n - \partial^\alpha f\|_\infty = \sup_{x\in K} |\partial^\alpha f_n(x) - \partial^\alpha f(x)|$$

Observación También se podría definir esta convergencia de la siguiente manera

- Existe $K \subseteq \Omega$ compacto y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ $\operatorname{supp}(f_n) \subseteq K$
- $\forall\, \alpha$-multíndice $\partial^\alpha f_n$ converge uniformemente a $\partial^\alpha f$

$\operatorname{supp}(\partial^\alpha f) \subset \operatorname{supp}(f)$

Consideremos

$$\hat{K} = \bigcup_{i=1}^{n_B - 1} \operatorname{supp}(f_i) \qquad \hat{K} \text{ es compacto en } \Omega.$$

Notemos que

$$D^{\infty}(\Omega) \hookrightarrow C^{\infty}(\Omega) \hookrightarrow C^{k}(\Omega) \qquad \text{Inclusiones}$$

1) $C^k(\bar{\Omega})$ es un espacio de Banach con la norma

$$\| f \|_{C^k(\bar{\Omega})} = \sum_{j=0}^{k} \| f^{(j)} \|_{\infty}$$

2) No existe una norma que haga completo el espacio $C^{\infty}(\Omega)$

Pero existe una métrica que hace completo al espacio $C^{\infty}(\Omega)$

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D^{\infty}(\Omega)$ y $f \in D^{\infty}(\Omega)$ entonces

si f_n converge en $D^{\infty}(\bar{\Omega}) \Rightarrow f_n$ converge en $C^k(\bar{\Omega})$

$$\| f_n - f \|_{C^k(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \| \partial^{\alpha} f_n - \partial^{\alpha} f \|_{\infty}$$

La convergencia en $D^{\infty}(\Omega)$ es más fuerte que las otras convergencias

Ahora, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $C^k(\bar{\Omega})$ esto no implica que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja en $D^{\infty}(\Omega)$

¡Grupo 1 !

Por otro lado, si consideramos $D^{\infty}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$

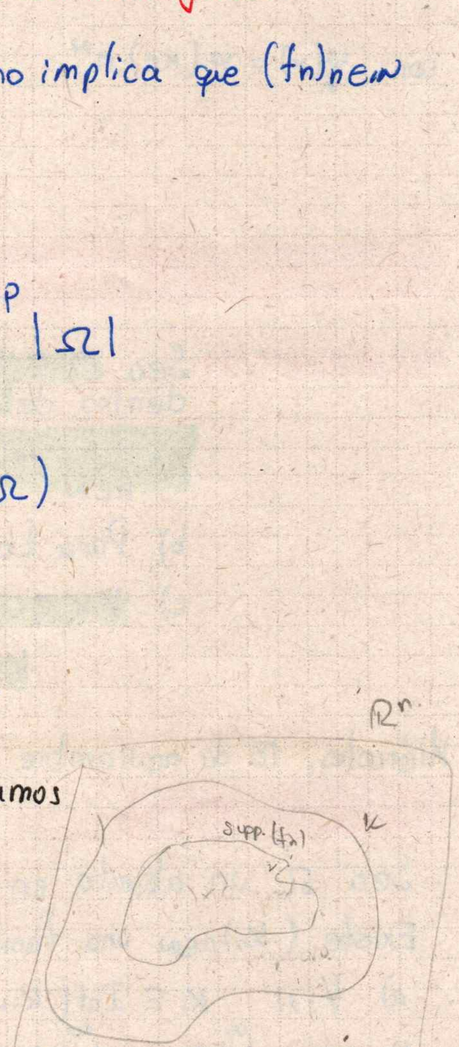
Si $f \in D^{\infty}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |f|^p = \int_{\operatorname{supp}(f)} |f|^p \leq \left(\sup_{x \in \operatorname{supp}(f)} |f(x)| \right)^p |\Omega|$$

Si $f_n \to f$ en $D^{\infty}(\Omega)$. P.D. $f_n \to f$ en $L^p(\Omega)$

En efecto, notemos que

$$\int_{\Omega} |(f_n - f)(x)|^p dx \leq \| f_n - f \|^p_{L^{\infty}(K)} |K| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$



Ejemplos: Consideramos $\varphi \in D^{\infty}(\Omega)$ y $\Omega = \mathbb{R}$, definamos

$$\varphi_n(x) = \varphi\left(x + \frac{1}{n+1}\right) - \varphi(x)$$

Muestre que φ_n converge a φ en $D^{\infty}(\Omega)$

Como $\varphi \in D^{\infty}(\mathbb{R})$, existe $M>0$ tal que

$$\operatorname{supp}(f) \subseteq [-M, M]$$

de donde, se tiene que

$$\operatorname{supp}(f_n) \subseteq [-(M+1), (M+1)]$$

Con lo que se muestra la primera parte

Ahora, mostremos que $(\varphi_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $0 \in D^{\infty}(\Omega)$

$$\forall x \in [-(M+1), (M+1)] \qquad \left| \varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x) \right| \leq \frac{\left|\varphi^{(k+1)}(\hat{x})\right|}{n+1} \leq \frac{\|\varphi^{(k+1)}\|_{\infty}}{n+1}$$

$$= \left| \varphi^{(k)}\left(x+\frac{1}{n+1}\right) - \varphi^{(k)}(x) \right| \quad \uparrow \text{Incrementos finitos}$$

Dado $\varphi \in D^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq B(0,1)$

$$\cancel{\varphi_n(x) = n^N \varphi\left(\frac{x}{n}\right)}$$

- ¿φ_n converge a φ en $L^p(\Omega)$?
- ¿φ_n converge a φ en $D^{\infty}(\Omega)$?

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\|x\|^2}{1-\|x\|^2}} & \text{si } \|x\| \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

[1]

con $\varphi_n(x) = \varphi(xn)\, n^N$ $\qquad \varphi_n \longrightarrow \delta_0 \longleftarrow$ Esto no es una función. Delta de Dirac

¿Cuál es la convergencia?

Topologías en $C^k(\Omega)$, $C^{\infty}(\Omega)$, $D^{\infty}(\Omega)$

Proposición 0.5 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Existe una familia $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ compacta dentro de Ω con las siguientes propiedades

a) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$.

b) Para todo $n \geq 1$, $K_n \subseteq \operatorname{Int}(K_{n+1})$

c) $\forall K \subseteq \Omega$ compacto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq K_{n_0}$ con $K_{n_0} \in \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

¡Grupo 1!

Miércoles, 15 de noviembre de 2023.

Topología $C^k(\Omega)$

Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

Existe $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de compactos dentro de Ω tal que

a) $\forall i \geq 1 \quad K_i \subseteq \operatorname{Int}(K_{i+1})$

b) $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Int}(K_i)$

c) $\forall K \subseteq \Omega$ compacto, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq K_{i_0}$

Podemos definir:

$\forall i \in \mathbb{N}$

$$p_i : C^k(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$u \longmapsto p_i(u) = \begin{cases} \sum\limits_{|\alpha| \leq k} \sup\limits_{x \in K_i} |\partial^\alpha u(x)| & k \in \mathbb{N} \\ \sum\limits_{|\alpha| \leq i} \sup\limits_{x \in K_i} |\partial^\alpha u(x)| & k = +\infty \end{cases}$$

Así, $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable de semimétricas

Podemos dotar a $C^k(\Omega)$ la topología más pequeña que hace continuas $(p_i)_{i \in I}$
En particular, dado $u \in C^k(\Omega)$ una base de vecindades de dicha topología para u viene dada por los conjuntos de la forma

$$V_{i,\varepsilon}^{u} = \{ v \in C^k(\Omega) : p_i(u-v) < \varepsilon \} \qquad \text{con } i \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0.$$

A esta topología la llamaremos τ^*

Proposición 0.6 Sea $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C^k(\Omega)$ y $u \in C^k(\Omega)$, se tiene que

Prop 1.3 [1]

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} u \quad \text{en} \quad (C^k(\Omega), \tau^*)$$

si y solo si

$\forall K \subseteq \Omega$ compacto y $\forall \alpha$ multíndice tal que $|\alpha| \leq k$

$\partial^\alpha u_n$ converge uniformemente a $\partial^\alpha u$ en K

Demostración: Grupo 2

Por otro lado, $(C^k(\Omega), \tau^*)$ es metrizable con la siguiente métrica

$$\forall u, v \in C^k(\Omega) \qquad d(u,v) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(u-v)}{1 + p_i(u-v)}$$

$$(C^k(\Omega), \tau_d) \approx (C^k(\Omega), \tau^*)$$

Demostración ¡Grupo 1!

Topología del límite inductivo de una familia de topologías.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
Sobre

$$C_{K_n}^k(\Omega) = \{ u \in C^k(\Omega) : \operatorname{supp}(u) \subseteq K_n \}$$

podemos definir lo siguiente:

- Si $k < \infty$, tenemos que $E_n = C_{K_n}^k(\Omega) \approx C^k(K_n)$ es un espacio normado, con la norma definida como si $u \in E_n$ $\quad \|u\|_n = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_n} |\partial^\alpha u(x)|$

- si $k=\infty$, tenemos una familia de normas $(\tilde{p}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ definidas en En como

seminormas $\quad \tilde{p}_m(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K_n} |\partial^\alpha u(x)|$

En ambos casos notaremos la topología inducida tanto por $\|\cdot\|_n$, como por $(\tilde{p}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ como τ_n $\{(E_n, \tau_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de espacios topológicos

$$C_c^k(\Omega) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \qquad D^\infty(\Omega) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

El objetivo es dar una topología $\hat{\tau}$ en $C_c^k(\Omega)$, $D^\infty(\Omega)$ tal que la topología

$$(E_n, \hat{\tau}) \approx (E_n, \tau_n)$$

a esa topología se la conoce como la topología del límite inductivo por (τ_n) (ambos grupos)

¡Ambos Grupos!

Teorema 0.7 Existe una topología τ sobre $D^\infty(\Omega)$ $(C_c^k(\Omega))$ tal que verifica lo siguiente

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad (E_n, \tilde{\tau}) \approx (E_n, \tau_n)$

b) Para $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(D^\infty, \tilde{\tau})$. $\varphi_n \to \varphi$ en $(D^\infty, \tilde{\tau})$ si y solo si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{supp}(f_n) \subset K_{n_0} \quad \text{y} \quad \operatorname{supp}(\varphi) \subset K_{n_0}$$

- $\forall \alpha$-multíndice $\partial^\alpha \varphi_n$ converge uniformemente a $\partial^\alpha \varphi$ en K_{n_0}
- $\forall \alpha$-multíndice $|\alpha| \leq k$ $\partial^\alpha \varphi_n$ converge uniformemente a $\partial^\alpha \varphi$ en K_{n_0}

Observación

En ninguno de los dos casos $\tilde{\tau}$ es metrizable

- $C_K^m(\Omega)$ $m \in \mathbb{N}$ y $K \subseteq \Omega$ compacto, en este caso $(C_K^m(\Omega), \tilde{\tau})$ es normalizable.
- $(D_K^\infty(\Omega), \hat{\tau})$ es metrizable.

Funciones pico y mesetas.

Proposición 0.8 Sea $x_0 \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$. Entonces existe $p_\varepsilon \in D^\infty(\Omega)$ positiva de soporte incluido en $B(x_0, \varepsilon)$ y de integral igual a 1

Una función que cumple esto se denomina función pico

Demostración

Consideramos $\varphi(x)$ como antes [1], tenemos que $p_0 \geq 0$, donde

$$p_0(x) = \frac{\varphi(x)}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx}$$

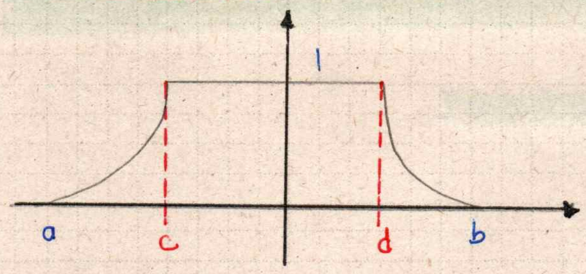
Entonces $\int \rho_0(x)\,dx = 1$.

Entonces, dado $\varepsilon > 0$

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\,\rho_0\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right)$$

Es fácil mostrar que ρ_ε verifica todas las propiedades mencionadas anteriormente

Funciones meseta.



Empezaremos por analizar el caso monodimensional. Consideramos

$$\Psi_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \Psi_0(x) = \frac{\int_{-1}^{x} \varphi(t)\,dt}{\int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt}$$

con φ la función definida en [1].

Si $x \in]-\infty, -1]$. $\Psi_0(x) = 0$

Si $x \in [1, \infty]$ $\Psi_0(x) = 1$

Y además, $\Psi \in D^\infty([-1,1])$. A partir de esta función se puede construir una función C^∞ cuyo soporte este dentro de $[a,b]$, identicamente igual a 1 en $[c,d]$ donde $a<c<d<b$ y que los valores que toma esta función varían entre 0 y 1.

$$\Theta_0 = \begin{cases} \Psi_0\left(-1 + \dfrac{2(x-a)}{c-a}\right) & \text{si } x \leq \dfrac{c+d}{2} \\ \Psi_0\left(-1 + \dfrac{2(b-x)}{b-d}\right) & \text{si } x \geq \dfrac{c+d}{2} \end{cases}$$

Θ_0 verifica las propiedades mencionadas anteriormente. Ver figura superior

Proposición 0.9. Ver teo 2.6 [1]

Sea $K \subseteq \Omega$ un compacto (Ω abierto de $\mathbb{R}^n$) y ϑ un abierto tal que $K \subseteq \vartheta$ y $\overline{\vartheta} \subseteq \Omega$ Entonces existe $\mathcal{X} \in D^\infty(\Omega)$ tal que verifica lo siguiente:

- $\mathcal{X}(x) = 1 \quad \forall x \in K$
- $\mathcal{X}(x) = 0 \quad \forall x \in \vartheta^c$
- $\forall x \in \Omega \quad 0 \leq \mathcal{X}(x) \leq 1$.

Teoremas de densidad

Densidad de $D^\infty(\Omega)$ en los espacios $L^p(\Omega)$, con $p \geq 1$ y $p \neq \infty$

Se sabe que $D^\infty(\Omega)$ es un s.e.v. de $L^p(\Omega)$, para todo $p \in [1, \infty]$. Nuestro objetivo es demostrar que

$$\overline{\mathcal{D}^{\infty}(\Omega)}^{L^p} = L^p$$

con $p \neq \infty$.

Empezaremos con la siguiente definición:

Definición 0.10. Definamos el conjunto

$$L^p_c(\Omega) = \{ f \in L^p(\Omega) \text{ tq existe } K \subset \Omega \text{ compacto tal que } \forall x \in K^c \ f(x) = 0 \}$$

Proposición 0.11. $L^p_c(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ $p \in [1, \infty[$.
Prop 3.1 [1]

Lunes, 20 de noviembre de 2023.

Demostración (prop. 0.11)

Por lo anterior, tenemos que existe $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de compactos de Ω tal que

$$\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$$

donde $K_i \subseteq Int(K_{i+1})$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y si K es un compato tal que $K \subseteq \Omega$, entonces existe $i_K \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq K_{i_K}$

Así, podemos considerar funciones mesetas $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\varphi_i = 1 \text{ en } K_i \quad \text{y} \quad \varphi_i = 0 \text{ en } (Int(K_{i+1}))^c$$

Tomando $u \in L^p(\Omega)$ vamos a mostrar que $u_i = \varphi_i u \in L^p_c(\Omega)$ converge a u en $\| \cdot \|_{L^p}$

Tenemos que $|u_i|^p \leq |u|$ y $u_i = 0$ en $(K_{i+1})^c$

Utilizando el teorema de convergencia dominada vamos a mostrar que u_i converge a u en $L^p(\Omega)$

P.D. $\forall x \in \Omega \quad \lim_{i \to \infty} |u_i(x)|^p = |u(x)|^p$.

Sea $x \in \Omega$, arbitrario pero fijo; entonces existe $K_{i_x} \subset \Omega$ compacto tal que $x \in K_{i_x}$ luego

$$|u_i(x) - u(x)| = u(x) |1 - \varphi_i(x)|$$

Entonces, para $i \geq i_x$ se sigue que $|u_i(x) - u(x)| \to 0$ cuando $i \to \infty$

Luego $\lim_{i \to \infty} |u_i(x) - u(x)|^p = 0$. De esta manera,

$$|u_i(x) - u(x)|^p = |u(x)|^p |1 - \varphi_i(x)|^p \leq |u(x)|^p$$

Por lo tanto, se sigue el resultado deseado.

Proposición 0.12. Sea Ω un abierto C^k_c es denso en $C^k(\Omega)$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, donde

$$C^k_c = \{ u \in C^k(\Omega) \text{ tal que } \exists K \subseteq \Omega \text{ compacto tal que } supp(u) \subseteq K \}$$

Demostración

Sea $u \in C^k(\Omega)$, arbitrario pero fijo. Análogamente, a lo hecho anteriormente, consideramos

$$u_i = \varphi_i u$$

Donde φ_i son las funciones meseta

Recordemos que

$$(C_c^k, \hat{\tau}_d) \qquad d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{P_n(f,g)}{1+P_n(f,g)}$$

Ver la topología $C^k(\Omega)$ del miércoles, 15 de noviembre.

Dado $u \in C^k(\Omega)$. P.D Existe $u_n \in C_c^k(\Omega)$ tal que $\lim_{n\to\infty} d(u_n, u) = 0$

$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \quad P_k(u, u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Leftrightarrow (\forall \hat{k} \subseteq \Omega$ compacto$)$ $(\forall \alpha$ multíndice$)$ $|\alpha| \leq k \quad \|\partial^\alpha u_n - \partial^\alpha u\|_{L^\infty(\hat{k})} \to 0$

$\Leftrightarrow \forall \alpha$ multíndice $\quad \|\partial^\alpha u_n - \partial^\alpha u\|_{L^\infty(\hat{k})} \to 0$

Notemos que

$$u - u_i = u(1-\varphi_i) \quad \Rightarrow \quad \partial^\alpha(u - u_i) = \partial^\alpha(u\underbrace{(1-\varphi_i)}_{\chi_i})$$

Entonces, utilizando la fórmula de Leibniz, tenemos que

$$\partial^\alpha(u \cdot \chi_i) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta u \cdot \partial^{\alpha-\beta}\chi_i \qquad \chi_i = 0 \text{ en } K_i$$

$$\chi_i = 1 \text{ en } K_{i+1}^c$$

P.D. $\forall \hat{k} \subseteq \Omega$ compacto $\forall \alpha$- multíndice $|\alpha| \leq k \quad \sup_{x\in\hat{k}} |\partial^\alpha(u - u_i)| \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$

Existe $i_k \in \mathbb{N}$ tal que $\hat{k} \subseteq K_{i_k} \subseteq \Omega$. Tomando i_k+1 tenemos que para todo $i \geq i_k+1$

$\chi_i = 1$ así que $\beta < \alpha \qquad \partial^{\alpha-\beta}\chi_i = 0$ en $(K_{i_k+1})^c$

$\chi_i = 0$ en K_i. En particular $\chi_i = 0$ en $\hat{k}$

Entonces $i \geq i_{k+1}$

$$\sup_{x\in\hat{k}} |\partial^\alpha(u - u_i)| = \sup_{x\in\hat{k}} |\partial^\alpha(u\chi_i)| = \sup_{x\in\hat{k}} \left| \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\alpha u\, \partial^{\alpha-\beta}\chi_i \right| = 0$$

Así. $\forall |\alpha| \leq k \quad \lim_{i\to\infty} \sup_{x\in\hat{k}} |\partial^\alpha u_i - \partial^\alpha u| = 0.$

Proposición 0.13. $D^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1, \infty[$

$D^\infty(\Omega)$ es denso en $C^k(\Omega) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Observaciones: Tengamos en cuenta lo siguiente:

- En el caso, cuando $k = \infty$, entonces:

$$D^\infty(\Omega) \hookrightarrow C^\infty(\Omega)$$

Por lo anterior, sobre $C^\infty(\Omega)$ puedo definir la métrica τ_d^*

Entonces $(D^\infty(\Omega), \tau_d^*)$ es métrico pero no completo.

Demostración

Bastaría aproximar las funciones $L^p_c(\Omega)$ con funciones en $D^\infty_c(\Omega)$ con la norma $\|\cdot\|_{L^p}$

$$D^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^p_c(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

Miércoles, 22 de noviembre de 2023.

Definición 0.14 Sean f y g dos funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Decimos que dos funciones son convolutivas si para todo $x \in \mathbb{R}^n$, la función

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{K} \\ t &\mapsto f(x-t)g(t) \end{aligned}$$

es integrable. Es decir, pertenece al espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Cuando f y g son convolutivas, podemos definir la función convolución de ambas, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f * g : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) &\mapsto (f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)\,dx \end{aligned}$$

Diremos que dos funciones medibles son convolutivas c.t.p. si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad (f*g)(x) \quad \text{está bien definida.}$$

Observaciones: Por el teorema de Fubini, se tiene que f y g convolutivas si y solo si f y g son convolutivas.

- Además, se tiene que $f * g = g * f$
- Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, entonces
$$f * (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 f * g_1 + \lambda_2 f * g_2$$
- La operación convolución es bilineal.
- Dados f, g y h funciones convolutivas, en general no se tiene la asociatividad, es decir,
$$f * (g * h) \neq (f * g) * h$$

Sin embargo, si f, g y h son funciones suficientemente regulares. $(C^1_c(\mathbb{R}^n), C^2_c(\mathbb{R}^n), \dots)$ entonces
$$f * (g * h) = (f * g) * h$$
En todo caso, si f, g y $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene la igualdad anterior.

Proposición 0.15. $(L^1(\mathbb{R}^n), *)$ es una álgebra de Banach sin unidad conmutativa. Además, para todo $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$$

Demostración

Consideremos la aplicación

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto F(x,y) = f(x-y)\, g(y).$$

Notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|\, dx = |g(y)|\, \|f\|_{L^1} < \infty.$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\, \|f\|_{L^1}\, dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$$

Aplicando Tonelli y Fubini, se sigue el resultado.

Proposición 0.16 Tenemos los siguientes resultados:

Ver teo 4.2.2 [2] a) $\forall p \geq 1$ si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$(f * g) \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{y además} \quad \|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$$

b) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $p, q \in]1, \infty[$

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$$

donde $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ y

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

c) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ con $p < q$, entonces para todo $r \in [p, q]$ $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ y además

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\theta} \|f\|_{L^q}^{1-\theta}$$

donde $\theta \in [0,1]$ y $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$

Demostración

literal a)

Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. P.D $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$

Puntualmente, tenemos lo siguiente

$$|(f*g)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\, g(y)|\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|\, dy \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy \right)^{1/p'}$$

De esta manera

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|\, dy \, \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{p'}} dx$$

$$\leq \|f\|_{L^p}^p \|g\|_{L^1} \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{p'}}$$

De donde, se tiene que

$$\|f*g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \|g\|_{L^1}^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$$

literal b)

Consideremos la siguiente descomposición

$$|f(x-y)g(y)| = \left(|f(x-y)|^p |g(y)|^q \right)^{\frac{1}{r}} |f(x-y)|^{1-\frac{p}{r}} |g(y)|^{1-\frac{q}{r}}$$

luego,

Lunes, 27 de noviembre de 2023.

Regularización

Consideremos una función pico p cuyo soporte esté incluido en $B(0,1)$ y cuya integral en $\mathbb{R}$ sea igual a 1.

Dado $\varepsilon > 0$, $p_\varepsilon(\cdot) = \varepsilon^{-n} p(\cdot\, \varepsilon^{-1})$. La sucesión $(p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ es llamada una aproximación de la unidad

Proposición 0.19 Si: $u \in C_c^k(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{N}$. Entonces para todo $\alpha \in \mathbb{N}^d$ multíndice $|\alpha| \leq k$, se tiene $(\partial^\alpha(p_\varepsilon * u))$ converge uniformemente a $\partial^\alpha u$ cuando $\varepsilon \to 0$

Si $u \in L_c^p(\mathbb{R}^d)$, entonces $(p_\varepsilon * u)_{\varepsilon>0}$ converge a u en $L^1(\mathbb{R}^d)$ con $p \in [1, \infty[$.

Demostración

Supongamos que $|\alpha| \leq k$. Como $\int p = 1$, se tiene que

$$\partial^\alpha(p_\varepsilon * u)(x) - \partial^\alpha u(x)$$

Proposición 0.17. Sean f y g funciones convolutivas, entonces

$$\operatorname{supp}(f*g) \subseteq \overline{\operatorname{sup}(f) + \operatorname{supp}(g)}$$

Proposición 0.18 Sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Supongamos que f es de clase C^k y sus derivadas parciales de todo orden son acotadas (como funciones)

Entonces $f * g$ es $C^k(\mathbb{R}^d)$ y además $\partial^\alpha(f*g) = (\partial^\alpha f) * g$

Observación: Si además tenemos regularidad en g, entonces
$$\partial^\alpha(f*g) = (\partial^\alpha f)*g = f*(\partial^\alpha g)$$

Continuando con la demostración (Prop 0.19)

Como $u \in C_c^k(\mathbb{R}^d)$, existe $K \subseteq \mathbb{R}^d$ compacto tal que $u=0$ K^c. Luego
$$\operatorname{supp}(\rho_\varepsilon) \subseteq B(0,\varepsilon) \Rightarrow \operatorname{supp}(\rho_\varepsilon * u) \subseteq \overline{K + B(0,\varepsilon)}$$

Además, como
$$\operatorname{supp}\left(\partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u)\right) \subseteq \operatorname{supp}(\rho_\varepsilon * u)$$

Por otra parte,
$$\begin{aligned}
\partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u)(x) - \partial^\alpha u(x) &= (\rho_\varepsilon * \partial^\alpha u)(x) - \partial^\alpha u(x) \\
&= \varepsilon^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \partial^\alpha u(y)\, dy - \partial^\alpha u(x) \\
&= \frac{\varepsilon^d}{\varepsilon^{-d}} \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)\, \partial^\alpha u(x-\varepsilon z)\, dz - \partial^\alpha u(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)\, \partial^\alpha u(x-\varepsilon z)\, dz - \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)\, u(x)\, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z) \left(\partial^\alpha u(x-\varepsilon z) - \partial^\alpha(x)\right) dz
\end{aligned}$$

Como $\partial^\alpha u$ es continua a soporte compacto, se tiene que $\partial^\alpha u$ es uniformemente continua sobre $\mathbb{R}^d$. Es decir, para todo $\delta>0$, existe $\eta(\alpha,\delta)>0$ tal que
$$\|x-x'\| < \eta \Rightarrow |\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(x')| < \delta$$

Fijando $\delta>0$ y tomando $\min\limits_{|\alpha|\le k} \eta(\alpha,\delta)$, tenemos que
$$|x-\varepsilon z - x| = \varepsilon|z| \le \varepsilon < \min_{|\alpha|\le k} \eta(\alpha,\delta)$$

ya que $|z|<1$ puesto que $z \in \operatorname{supp}(\rho) \subseteq B(0,1)$

Entonces, se tiene que
$$|\partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u)(x) - \partial^\alpha u(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} \rho(z)\, |\partial^\alpha u(x-\varepsilon z) - \partial^\alpha u(x)| \le \delta \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Así, para $\partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u)$ converge uniformemente a $\partial^\alpha u$ en !

Si $u \in L_c^p(\mathbb{R}^d)$ $(\rho_\varepsilon * u) \in L_c^p(\mathbb{R}^d)$ converge a u en $L^p(\mathbb{R}^d)$

Como $\rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ y además, $\operatorname{supp}(\rho_\varepsilon) \subseteq B(0,\varepsilon)$ tenemos $\rho_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^d)$

Como $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, entonces $(\rho_\varepsilon * u) \in L^p$ y además

$$\operatorname{supp}(\rho_\varepsilon * u) \subseteq \overline{K + B(0,\varepsilon)}$$

$$(\rho_\varepsilon * u) \in L^p_c(\mathbb{R}^d)$$

P.D $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|(\rho_\varepsilon * u) - u\|_{L^p} = 0$

$$|((\rho_\varepsilon * u) - u)(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \rho(z)\, |u(x-\varepsilon z) - u(x)|\, dz\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\rho(z)|\, |u(x-\varepsilon z) - u(x)|\, dx$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \cancel{|\rho(z)|}^{\,1}\, dz\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int |\rho(z)|\, |u(x-\varepsilon z) - u(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |((\rho_\varepsilon * u - u)(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\rho(z)|\, |u(x-\varepsilon z) - u(x)|^p\, dz\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)\, \|u(\cdot - \varepsilon z) - u(\cdot)\|^p_{L^p}\, dz \qquad [*]$$

Ahora, mostremos que para todo $z \in B(0,1)$.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u(\cdot - z\varepsilon) - u(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 0$$

En primer lugar, tengamos en cuenta que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |u(x - z\varepsilon) - u(x)| = 0 \quad \text{en c.t.p.}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} |u(x-z\varepsilon) - u(x)|^p \to 0$$

ya que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} |u(x-z\varepsilon) - u(x)|^p = 0$ en c.t.p.

$$|u(x-\varepsilon z) - u(x)|^p \leq 2^p |u(x)|^p \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

De esta manera, en [*]

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)\, \|u(\cdot - \varepsilon z) - u(\cdot)\|^p_{L^p}\, dz \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\rho(z)|\, 2^p \|u\|^p_{L^p}\, dz$$

$$= 2^p \|u\|^p_{L^p} \int_{\mathbb{R}^d} |\rho(z)|\, dz = 2^p \|u\|^p_{L^p}.$$

Demostración (Teorema 0.13)

Como sabemos que $C^k_c(\Omega)$ y $L^p_c(\Omega)$ son densos en $C^k(\Omega)$ y $L^p(\Omega)$ respectivamente. Es suficiente mostrar que $D^\infty(\Omega)$ son densas en $C^k_c(\Omega)$ y $L^p_c(\Omega)$.

Existe $K \subseteq \Omega$ compacto, tal que $u = 0$ en K^c

Miércoles, 29 de noviembre de 2023

Sea $u \in C^k_c(\Omega)$, entonces existe $K \subseteq \Omega$ compacto tal que $u = 0$ en K^c

Consideremos $\tilde{u}$ la prolongación por 0 en $\mathbb{R}^n$. Entonces $\tilde{u} \in C^k_c(\mathbb{R}^d)$

Sea $\varepsilon > 0$, consideremos

$$\tilde{u}_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \tilde{u}$$

Tomando $u_\varepsilon = \tilde{u}_\varepsilon|_\Omega$. Tenemos que

$$\operatorname{supp}(\tilde{u}_\varepsilon) \subset \underbrace{K + \overline{B(0,\varepsilon)}}_{K_\varepsilon} \quad \text{(compacto)}$$

Entonces, para ε suficientemente pequeño $K_\varepsilon \subseteq \Omega$.

En ese caso, $\tilde{u}_\varepsilon$ y u_ε coinciden y además $u_\varepsilon \in D^\infty(\Omega)$. Por otro lado, por lo visto anteriormente $\tilde{u}_\varepsilon$ converge a $\hat{u}$ en $C^k(\mathbb{R}^d)$. Además, consideramos $(K_i)_{i\in I}$ una familia de compactos dentro de Ω tales que (I numerable)

$$\Omega = \bigcup_{i\geq 1} K_i \qquad K_i \subseteq \operatorname{Int}(K_{i+1}) \qquad \forall i \in I$$

$$\forall \tilde{K} \subseteq \Omega \text{ compacto, } \exists i_0 \in I \text{ tal que } \tilde{K} \subseteq K_{i_0}$$

Entonces, se puede concluir que que

$$\forall i \in I \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} p_{K_i}(u_\varepsilon - u) = \lim_{\varepsilon \to 0} p_{K_i}(\tilde{u}_\varepsilon - u) = 0$$

Así, $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in D^\infty(\Omega)$ converge a $u \in C^k(\Omega)$.

Por lo tanto, $D^\infty(\Omega)$ es denso en $C^k_c(\Omega)$

$\operatorname{supp}(f*g) \subset \overline{\operatorname{supp}(f)+\operatorname{supp}(g)}$

- En el caso $L^p_c(\Omega)$

$u \in L^p_c(\Omega)$ $\exists K$ compacto tal que $u=0$ en K^c

$\tilde{u}$ es la prolongación por 0 en $\mathbb{R}^d$ $\tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^d)$

$u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ y $\rho_\varepsilon \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow \partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u) = \partial^\alpha \rho_\varepsilon * u$

Proposición 0.4.19. Sea $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Entonces $(f*g)$ está bien definida para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y más aún $(f*g) \in C(\mathbb{R}^N)$.

Lema 0.20. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un abierto y consideremos $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega f\bar{\varphi} = 0 \qquad \forall \varphi \in D^\infty(\Omega)$$

Entonces $f = 0$ c.t.p.

Capítulo 1. Espacio de las distribuciones.

Definición 1.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un abierto y $T: D^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ una aplicación. Decimos que T es una distribución si:

- T es lineal
- T es secuencialmente continua sobre todo $D^\infty(\Omega)$.

Si $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{D^\infty(\Omega)} f$ entonces $\langle T, f_n\rangle_{D' \times D^\infty} = T(f_n) \to T(f)$ en $\mathbb{C}$

Observación: Para demostrar que $T: D^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ es una distribución podemos mostrar que T es lineal y T es secuencialmente continua en 0 en $D^\infty(\Omega)$

Ejemplo 1)
Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, entonces existe una única distribución $T_f \in D'(\Omega)$ (espacio de distribuciones) tal que

$$\forall\, \varphi \in D^\infty(\Omega) \qquad \langle T_f, \varphi \rangle_{D'\times D} = \int_\Omega \varphi \bar{f}\, d\mu$$

Es claro que T_f es lineal,

$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to 0$. Existe K compacto tal $\|\varphi_n\|_\infty \to 0$ en K

$$|\langle T_f, \varphi_n\rangle| = \left| \int_\Omega \varphi_n \bar{f}\, d\mu \right| \leq \|\varphi_n\|_\infty \|f\|_{L^1(K)} \to 0$$

Entonces, existe $L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$.

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \quad \text{Si } f \in L^1_{loc}(\Omega) \quad P_n(f) = \int_{K_n} |f| \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} P_n(f)$$

Ejemplo 2)
Sea $a \in \Omega$, definimos

$$\delta_a : D^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$$
$$\varphi \mapsto \delta_a(\varphi) = \langle \delta_a, \varphi \rangle_{D'\times D} = \varphi(a)$$

δ_a es llamada la distribución delta de Dirac en el punto a, es lineal.

δ_a es secuencialmente continua ya que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{D^\infty(\Omega)} 0$

$$|\delta_a(\varphi_n)| = |\varphi_n(a)| \leq \|\varphi_n\|_\infty \to 0.$$

Proposición 1.2. $T \in D'(\Omega)$ lineal si y solo si para todo compacto $K \subset \Omega$, existe $m(K) \in \mathbb{N}$ y existe $C(K,m) > 0$ tal que

Ver Prop 2.4 (Mitrea)

$$\forall\, \varphi \in D^\infty(\Omega) \text{ tal que } \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K \quad |\langle T, \varphi\rangle_{D'\times D}| \leq C \max_{\substack{|\alpha|\leq m \\ x\in K}} |\partial^\alpha \varphi(x)| \quad (1.1)$$

Demostración

$\Leftarrow)$ Supongamos que T es lineal y satisface (1.1). Consideremos $(\varphi_n)_n$ tal que $\varphi_n \to 0$ en $D^\infty(\Omega)$.

Entonces, existe $K \subseteq \Omega$ compacto tal que $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$. Por (1.1), existe $C > 0$ tál que

$$|\langle T, \varphi_n\rangle| < C \max_{\substack{|\alpha|\leq m \\ x\in K}} |\partial^\alpha \varphi_n(x)|$$
$$= C \max_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha \varphi_n\|_{C^\infty(K)} \to 0$$

$\Rightarrow)$ Por contradicción. Supongamos que

Existe $K \subseteq \Omega$ compacto tal que para todo $C > 0$ existe $\varphi_C \in D^\infty(\Omega)$ con $\operatorname{supp}(\varphi_C) \subseteq K$ tal que

$$|\langle T, \varphi\rangle_{D'\times D}| > C \max_{\substack{|\alpha|\leq m \\ x\in K}} |\partial^\alpha \varphi(x)| \qquad [A]$$

En particular, para $j \in \mathbb{N}$, se tiene lo anterior para $C = 1/j$.

Así, definamos $\psi_j = \frac{1}{\langle T, \varphi_j\rangle} \varphi_j$, entonces $\psi_j \in C^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp}(\psi_j) \subseteq K$ y $\langle u, \psi_j \rangle = 1$. Usando lo anterior en $[A]$, se sigue que

$$\max_{\substack{|\alpha|\le j \\ x\in K}} |\partial^\alpha \Psi_j(x)| < \frac{1}{j} \qquad \forall j \in \mathbb{N}$$
con $j > |\alpha|$

Así, para $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ arbitrario, se sigue que $\Psi_j \to 0$ en $D^\infty(\Omega)$.

De donde, como T es distribución, entonces $\langle T, \Psi_j \rangle \to 0$ pero esto contradice el hecho de que $\langle T, \Psi_j \rangle = 1$.

Distribución de valores principiales

Consideremos la función $1/x$, esta no es localmente integrable en $\mathbb{R}$, $1/x \notin L_{loc}(\mathbb{R})$. Sin embargo, podemos considerar la distribución asociada a esta función y denominada valor princial de $1/x$ y notada $vp\, 1/x$

Entonces para $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ $(D(\mathbb{R}))$, escribimos

$$\left\langle vp\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

Mostremos que $vp\, 1/x \in D'^{(1)}(\mathbb{R})$.

Sea K un compacto en $\mathbb{R}$, por lo tanto, existe $M>0$ tal que

$$K \subseteq [-M, M]$$

Tomemos $\varepsilon \in (0, R)$ y observemos que, como $1/x$ es una función impar en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, entonces

$$\cancel{\int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} = \int_{\varepsilon\le|x|\le R} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \int_{\varepsilon\le|x|\le R}}$$

Otra idea, usando la expansión en series de Taylor con resto integral, se tiene que

$(\varphi(xt))'$

$\varphi'(xt)(xt)'$

$x\varphi'(xt)$

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\int_0^1 \varphi'(tx)\, dt \qquad = \int_0^1 x\varphi(tx)\,dt \qquad (1)$$
$$= \varphi(0) + \varphi(x) - \varphi(0)$$
$$= \varphi(x).$$

Lo anterior $^{(1)}$ también se obtiene si consideramos la fórmula de Taylor con resto integral.

De esta manera

$$\int_{\varepsilon\le|x|\le R} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \underbrace{\varphi(0)\int_{\varepsilon\le|x|\le R} \frac{dx}{x}}_{I_1} + \underbrace{\int_{\varepsilon\le|x|\le R} \Psi(x)\, dx}_{I_2}$$

Notemos que $I_1 = 0$ pues $1/x$ es una función impar. Por lo tanto

$$\left\langle vp\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon\le|x|\le R} \Psi(x)\, dx$$

Por lo tanto

$$\left|\left\langle vp\frac{1}{x}, \varphi\right\rangle\right| = \left|\int_{\varepsilon\le|x|\le R} \Psi\, dx\right| \le \int_{\varepsilon\le|x|\le R} |\Psi(x)|\,dx = \int_{\varepsilon\le|x|\le R}\int_0^1 |\varphi'(tx)|\,dt\,dx$$

De donde, se sigue que

$$\int_{\varepsilon\le|x|\le R} |\psi(x)|\, dx \le \int_{\varepsilon\le|x|\le R}\int_0^1 \sup_{y\in K} |\varphi'(y)|\, dt\, dx$$

$$\le \sup_{y\in K} |\varphi'(y)| \int_{\varepsilon\le|x|\le R} dx$$

$$\le 2R \sup_{y\in K} |\varphi'(y)|$$

Así, por teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\left\langle \mathrm{pv}.\frac{1}{x}, \varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx < \infty \qquad \forall \varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Fórmula de Taylor con resto integral

$$u(x) = \sum_{|\alpha|\le N-1} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha u(y)(x-y)^\alpha + \sum_{|\alpha|=N}\frac{N}{\alpha!}(x-y)^\alpha\int_0^1 (1-t)^{N-1}\partial^\alpha u(tx+(1-t)y)\, dt.$$

Definición - Distribución de orden finito -
Sea u una distribución en Ω. Si el entero no negativo m que interviene en la proposición 1.2 es independiente del compacto, entonces u se dice de orden finito m.

Si u es una distribución de orden finito, entonces el orden de u es el entero más pequeño $m\in\mathbb{N}_0$ tal que satisface la condición de la [Proposición 1.2] para todo K compacto en Ω.

Más aún, continuando el ejemplo anterior, se puede mostrar que v.p. $1/x$ no es de orden 0.

Tomemos el compacto $K=[0,1]$, y para cada $j\in\mathbb{N}$, tomemos φ_j en $C_c^\infty((0,1))$ tal que

$$0\le\varphi_j\le 1 \quad \text{y} \quad \varphi_j = 1 \text{ en } \left[\frac{1}{j+2}, 1-\frac{1}{j+2}\right]$$

Entonces, por la definición de la distribución

$$\left|\left\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi_j\right\rangle\right| = \int_0^1 \frac{\varphi_j(x)}{x}\, dx \ge \int_{\frac{1}{j+2}}^{1-\frac{1}{j+2}} \frac{1}{x}\, dx = \ln(j+1) \xrightarrow[j\to\infty]{} \infty$$

lo que implica que no existe constante $C>0$ tal que

$$\left|\left\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi_j\right\rangle\right| < C \sup_{x\in K}|\cancel{\varphi_j(x)}\,1| < C$$

y de esta manera v.p. $1/x$ no es de orden cero.

Lunes, 4 de diciembre de 2023.

Esta caracterización para mostrar que una aplicación es una distribución será utilizada con frecuencia en lo siguiente y además nos permite introducir una nueva definición

Definición 1.3. (Orden de una distribución)

Diremos que $T\in D'(\Omega)$ es una distribución de orden finito a lo más de $m\in\mathbb{N}$, sobre Ω cuando existe $m\in\mathbb{N}$ tal que para todo compacto $K\subseteq\Omega$ existe $C_K>0$ tal que para todo $f\in D^\infty(\Omega)$ con $\mathrm{supp}(f)\subseteq K$

se tiene que

$$|\langle T, f\rangle_{D\times D'}| \leq C_K \max_{\substack{|\alpha|\leq m \\ x\in K}} |\partial^\alpha f(x)|$$

Diremos que $T\in D'(\Omega)$ es de orden $m\in\mathbb{N}$ si m es el natural más pequeño que verifica lo anterior.

Observación: Con respecto a la definición anterior y a la proposición 1.2, tengamos en cuenta que la constante de la (Prop. 1.2) depende de K y $m\in\mathbb{N}$, mientras que en la definición 1.3 la constante C depende únicamente del compacto $K\subseteq\Omega$. Es decir, existen distribuciones de orden infinito.

Ejemplo

Si $f\in L^1_{loc}(\Omega)$, entonces la distribución T_f es de orden 0.

En efecto, como $L^1_{loc}(\Omega)\hookrightarrow D'(\Omega)$, se tiene que

$o(T_f)=0$

$\uparrow$ orden de T_f

$$T_f(\varphi)=\int_\Omega f\varphi\, d\lambda \qquad \forall \varphi\in C_c^\infty(\Omega)$$

Dado $K\subseteq\Omega$ y $f\in D^\infty(\Omega)$, $sopp(f)\subseteq K$ tomamos $C_K=\int_K |f|\,d\lambda$

$$|\langle T_f,\varphi\rangle| = \left|\int_\Omega f\varphi\, d\lambda\right| = \int_K |f\varphi|d\lambda \leq \sup_{x\in K}|\varphi(x)|\int_K |f| = \|\varphi\|_{L^\infty(K)} C_K$$

Ejemplo

Dado $a\in\Omega$, entonces $o(\delta_a)=0$.

En efecto, para $a\in\Omega$ y $\alpha\in\mathbb{N}^n$

$$\langle \partial^\alpha\delta_a,\varphi\rangle = \partial^\alpha\varphi(a)$$

donde

$$\begin{aligned}\partial^\alpha\delta_a \quad D^\infty(\Omega) &\longmapsto \mathbb{R}\\ \varphi &\longmapsto \partial^\alpha\varphi(a)\end{aligned}$$

P.D $\partial^\alpha\delta_a\in D'(\Omega)$

Notemos que $\partial^\alpha\delta_a$ es lineal, en efecto

$$\partial^\alpha\delta_a(\lambda\varphi+\Psi) = \partial^\alpha(\lambda\varphi+\Psi)(a) = \lambda\partial^\alpha\varphi(a)+\partial^\alpha\Psi(a)$$

Ahora, mostremos que para K un compacto en Ω

$$|\langle\partial^\alpha\delta_a,\varphi\rangle| = |\partial^\alpha\varphi(a)| \leq \|\partial^\alpha\varphi\|_{L^\infty}$$

lo que implica que $\partial^\alpha\delta_a$ es una distribución y más aún $o(\partial^\alpha\delta_a)=|\alpha|$

Supongamos por el absurdo que $o(\partial^\alpha\delta_a)=k<|\alpha|$. Así, tenemos que $\forall K\subseteq\Omega$ compacto existe $C_K>0$ tal que

$$\forall\varphi\in D^\infty(\Omega) \text{ con } sopp(f)\subseteq K \quad |\langle\partial^\alpha\delta_a,\varphi\rangle| \leq C_K \max_{\substack{|\beta|\leq k\\ x\in K}}|\partial^\beta\varphi(x)|$$

Dado $\varepsilon>0$, consideremos $K_\varepsilon=\overline{B}(a,\varepsilon)$ compacto en Ω. Fijemos $\Psi_0\in D^\infty(\overline{B}(0,\varepsilon))$

$\Psi_0(x)=1$ en $\overline{B}(0,\varepsilon/2)$ y consideremos $\Psi(x)=\frac{x^\alpha}{\alpha!}\Psi_0(x)$.

De donde se sigue que

$$\partial^\alpha(\Psi(x)) = \partial^\alpha\left(\frac{x^\alpha}{\alpha!}\Psi_0(x)\right) = \frac{1}{\alpha!}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^\alpha(x^\alpha)\,\partial^{\alpha-\beta}\Psi_0(x)$$

$\partial^\alpha \Psi(0) = \Psi_0(0) = 1$ Tomando $\varphi = \Psi(\lambda(x-a))$ con $\lambda \geq 1$, tenemos que

$$\mathrm{supp}(f) \subseteq B\left(a, \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \subseteq B(a,\varepsilon) \subseteq K_\varepsilon$$

Entonces

$$\partial^\alpha f(a) = \lambda^{|\alpha|}\,\partial^\alpha \Psi(0) = \lambda^{|\alpha|}$$

Para $|\beta| \leq k$, tenemos que

$$|\partial^\beta \varphi(x)| = \lambda^{|\beta|}\,|\partial^\beta \Psi(\lambda(x-a))| \leq \lambda^k \|\partial^\beta \Psi\|_\infty$$

así

$$\forall \lambda \geq 1 \qquad |\lambda|^{|\alpha|-k} \leq C_{K_\varepsilon} \max_{|\beta|\leq k} \|\partial^\beta \Psi\|_\infty$$

Como $|\alpha| - k > 0$ tenemos una contradicción

Observación. Sean $T, S \in D'(\Omega)$ tales que $o(T) = n$ y $o(S) = m$

$o(T+S) = \min(n,m)$ si $\min(n,m) = m$

$$|\beta| \leq m \qquad |\langle T+S,\varphi\rangle| \leq |\langle T,\varphi\rangle| + |\langle S,\varphi\rangle|$$
$$\leq C_k \max_{|\gamma|\leq n}\|\partial^\gamma \varphi\|_{L^\infty} + C_k \max_{|\beta|\leq m}\|\partial^\beta\varphi\|$$
$$\leq \widetilde{C}_k \max_{|\gamma|\leq m}\|\partial^\gamma\varphi\|_{L^\infty}$$

Con esto, se sigue que $o(T+S) \leq \max(n,m)$.

Ejemplo: Consideremos $\Omega = \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ y $\varphi \in D^\infty(\mathbb{R})$, entonces $\sum_{k=1}^{N} \varphi^{(k)}(a)$ es una distribución. Ahora, consideremos $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi^{(k)}(a)$

Mostremos que $\sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(a)$ es una distribución (para orden finito)

$$\langle T,\varphi\rangle = \sum_{k=1}^{N}\varphi^{(k)}(a) \Rightarrow |\langle T,\varphi\rangle| \leq \sum_{k=1}^{N}|\varphi^{(k)}(a)| \leq \sum_{k=1}$$

Definición 1.4 Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D'(\Omega)$ y $T \in D'(\Omega)$.

Decimos que T_n converge a T en $D'(\Omega)$ y lo notaremos $T_n \xrightarrow{D'} T$ si

$$\forall \varphi \in D^\infty(\Omega) \qquad \langle T_n,\varphi\rangle_{D'\times D^\infty} \to \langle T,\varphi\rangle_{D'\times D^\infty} \text{ en } \mathbb{K}$$

Ejemplo: $\Omega = \mathbb{R}$ $\quad T_n = n\left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}\right)$ y $T = -2\delta_0'$ $\quad \langle T,\varphi\rangle = -2\varphi'(0)$

P.D. $T_n \xrightarrow{D'(\Omega)} T$

En primer lugar, tengamos en cuenta lo siguiente

Si $\varphi \in D^\infty(\mathbb{R})$, entonces

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\int_0^1 \varphi'(xu)\,du = \varphi(0) + x\,\Psi(x)$$

donde $\Psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu)\,du$, entonces

$$\begin{aligned}\langle T_n, \varphi\rangle &= n\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= n\left(\cancel{\varphi(0)} + \frac{1}{n}\Psi\left(\frac{1}{n}\right) - \cancel{\varphi(0)} - \left(-\frac{1}{n}\right)\Psi\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \Psi\left(\frac{1}{n}\right) - \Psi\left(-\frac{1}{n}\right)\\ &= \int_0^1\end{aligned}$$

Lunes, 11 de diciembre de 2023

Prueba. (Problema 8)

Sean $f_1, f_2, f_3 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, definimos

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}\\ (x_1,x_2,x_3) &\mapsto f(x_1,x_2,x_3) = f_1(x_2,x_3)\, f_2(x_1,x_3)\, f_3(x_1,x_2)\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(x_1,x_2,x_3)|\,dx_1 &= \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2,x_3)|\,|f_2(x_1,x_3)|\,|f_3(x_1,x_2)|\,dx_1\\ &\leq |f_1(x_2,x_3)|\left(\int_{\mathbb{R}}|f_2(x_1,x_3)|^2dx_1\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}}|f_3(x_1,x_2)|^2dx_1\right)^{1/2}\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x_1,x_2,x_3)|\,dx_1\,dx_2 &\leq \int_{\mathbb{R}}|f_1(x_2,x_3)|\left(\int_{\mathbb{R}}|f_2(x_1,x_3)|^2dx_1\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}}|f_3(x_1,x_2)|^2dx_1\right)^{1/2}dx_2\\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}}|f_1(x_2,x_3)|^2dx_2\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|f_3(x_1,x_2)|^2dx_1\,dx_2\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}}|f_2(x_1,x_3)|^2dx_1\right)^{1/2}\\ &= \|f_3\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|f_3(x_1,x_2)^2|\,dx_1\,dx_2\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}}|f_2(x_1,x_3)|^2dx_1\right)^{1/2}\end{aligned}$$

(Problema 4)

Sean $(\Omega_i)_{i\in I}$ abiertos tales que para todo $i \in I$ $T_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$

$$\forall i,k \in I \qquad T_i\big|_{\Omega_i\cap\Omega_k} = T_k\big|_{\Omega_i\cap\Omega_k}$$

Para $K \subseteq \Omega$ compacto, existe $J \subseteq I$ finito tal que

$$K \subseteq \bigcup_{j\in J}\Omega_j$$

Se tiene que para todo $j \in J$, existe $f_j \in C_c^\infty(\Omega_j)$ tal que $0 \leq \varphi_j \leq 1$ y

$\sum_{j\in J} f_j = 1$ sobre una vecindad abierta de K, notemos que

$$\mathrm{supp}(f) \subseteq K \qquad \langle T, \varphi\rangle = \sum_{j\in J} \langle T_j, \varphi f_j\rangle$$

Tengamos en cuenta que la multiplicación de una distribución con una función C^∞ es una distribución

$$T\in D'(\Omega) \quad \forall \in C^\infty(\Omega) \qquad \langle Tg, \varphi\rangle = \langle T, g\varphi\rangle.$$

Así, para todo $j\in J$. $\langle T_j, \varphi_j(\cdot)\rangle$ es una distribución

Entonces $\sum'_{j\in J} \langle T_i, \varphi, f_i\rangle$ está definida, entonces si logramos mostrar que no depende del recubrimiento finito

Así, consideramos otro recubrimiento finito $(\Omega_j)_{j\in J}$ de K y además otros $(\Psi_j)_{j\in J'}$ tales que $0\leq \Psi_j \leq 1$ y $\sum_{j\in J'} \Psi_j = 1$ y Ψ_j

$$\Psi_j \in C_c^\infty(\Omega_j)$$

Mostremos que

$$\langle T_\Psi, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi\in C^\infty \text{ tal que } \mathrm{supp}(\varphi)\subseteq K$$

En efecto,

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum'_{j\in J} \langle T_j, f_j\cdot\varphi\rangle = \sum'_{j\in J} \Big\langle T_j, \sum'_{k\in J'} f_j \Psi_k \varphi\Big\rangle$$

$$= \sum'_{j\in J}\sum'_{k\in J'} \langle T_j, f_j \Psi_k \varphi\rangle$$

$$= \sum'_{k\in J'}\sum'_{j\in J} \langle T_k, f_j \Psi_k \varphi\rangle$$

$$= \sum'_{k\in J'} \Big\langle T_k, \sum'_{j\in J} \langle f_j, \varphi\rangle\Big\rangle$$

$$= \sum'_{k\in J'} \langle T_k, \Psi_k \varphi\rangle = \langle T_\Psi, \varphi\rangle$$

Sea $\varphi\in D^\infty(\Omega)$, mostremos que

$$\langle T_i, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$$

De donde,

$$\langle T_i, \varphi\rangle = \sum'_{j\in J} \langle T_i, f_j\varphi\rangle = \sum'_{j\in J} \langle T_j, f_j\varphi\rangle$$

Ahora, analicemos la unicidad, supongamos que existe $\hat{T}$ otra distribución, distinta a T tal que satisface lo requerido, es decir, $\hat{T}\in D'_K(\Omega)$.

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum'_{j\in J} \langle T_j, \varphi_j\varphi\rangle = \sum'_{j\in J} \langle \tilde{T}, \varphi_j\varphi\rangle = \Big\langle \tilde{T}, \sum_{j\in J} \varphi_j\varphi\Big\rangle = \langle \tilde{T}, \varphi\rangle$$

Miércoles, 13 de diciembre de 2023

Proposición 1.5. La convergencia en $L^p_{loc}(\Omega)$ con $p \in [1, \infty]$ implica la convergencia en $D'(\Omega)$.

Demostración

Consideramos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p_{loc}(\Omega)$ y $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ tal que $f_n \to f$ en $L^p_{loc}(\Omega)$. Entonces, consideramos q el conjugado de p y $K \subseteq \Omega$ compacto. Además, consideremos $\varphi \in D^\infty(\Omega)$ tal que $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$. Entonces, tenemos lo siguiente

$$|\langle T_{f_n} - T_f, \varphi \rangle| = \left| \int_K (f_n - f)(x)\varphi(x)\, dx \right|$$
$$\leq \|f_n - f\|_{L^p(K)} \|\varphi\|_{L^q(K)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Observación: Tengamos en cuenta que la convergencia en casi todo punto no implica la convergencia en $D'(\Omega)$.

En efecto, consideramos $f_n(x) = \sqrt{n}\, e^{-nx^2}$, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1_{loc}(\Omega)$ y además converge casi todo punto a la función 0.

Si $x \neq 0$ $\quad |f_n(x)| = |\sqrt{n}\, e^{-nx^2}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Pero $(T_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ~~no~~ converge a la distribución 0.

Si $\varphi \in D^\infty(\Omega)$

$$\langle f_n, \varphi \rangle = \sqrt{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2} \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \varphi\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) dy$$

Utilizando el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{n\to+\infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \varphi(0) \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \langle \varphi, \delta_0 \sqrt{\pi} \rangle$$

Teorema 1.6. Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D'(\Omega)$ tal que verifique que

$$\forall \varphi \in D^\infty(\mathbb{R}) \qquad \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi \rangle \text{ existe en } \mathbb{K}$$

Entonces existe $T \in D'(\Omega)$ tal que $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{D'(\Omega)} T$.

Demostración | Ejercicio

Corolario 1.7 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D'(\Omega)$, $T \in D'(\Omega)$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D^\infty(\mathbb{R})$ $\varphi \in D^\infty(\Omega)$ tal que

$$T_n \xrightarrow[n\to\infty]{D'(\Omega)} T \quad \text{y} \quad \varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{D^\infty(\Omega)} \varphi$$

Entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

Sección: Operaciones sobre las distribuciones.

Notemos que $D'(\Omega)$ es un espacio vectorial topológico y además las operaciones vectoriales son continuas.

Si $a \in C^\infty(\Omega)$ y $T \in D'(\Omega)$, entonces $aT \in D'(\Omega)$

$$\langle aT, \varphi \rangle = \langle T, a\varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in D^\infty(\Omega)$$

Demostración

Sabemos que $|\langle aT, \varphi\rangle| = |\langle T, a\varphi\rangle| \leq C_{K,m} \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha (a\varphi)\|_{L^\infty(K)}$

Como $\partial^\alpha (a\varphi) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\alpha a \, \partial^{\alpha-\beta}\varphi$, entonces

$$\|\partial^\alpha(a\varphi)\| \leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^\alpha a\|_{L^\infty(K)} \|\partial^{\alpha-\beta}\varphi\|_{L^\infty(K)} \leq C_{\alpha,a,K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty}$$

Definición 1.8. Sean S y T dos distribuciones, decimos que S es igual a T en el sentido de distribución si

$$\forall \varphi \in D^\infty(\Omega) \qquad \langle T, \varphi\rangle = \langle S, \varphi\rangle$$

Observación: Si sabemos que $T_f \in D'(\Omega)$ y $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $S_g \in D'(\Omega)$ y $g \in L^1_{loc}(\Omega)$

Se puede tener que $T_f = S_g$ en el sentido de las distribuciones pero no necesariamente $f = g$ en $L^1_{loc}(\Omega)$.

La recíproca sí se tiene.

Proposición 1.9. Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y δ_0 la delta de Dirac

$$\text{Si } x \in C^\infty(\Omega) \qquad xT = 0 \iff T = c\,\delta_0$$

Supongamos que $T = c\delta_0$, entonces

$$\langle xT, \varphi\rangle = \langle T, x\varphi\rangle = \langle c\delta_0, x\varphi\rangle = c\langle \delta_0, x\varphi\rangle = 0.$$

Recíprocamente, primero tenemos que

$$\langle xT, \varphi\rangle = \langle T, x\varphi\rangle \qquad \Psi(x) = x\,\varphi(x) \qquad \Psi(0) = 0 \qquad \Psi \in D^\infty(\Omega)$$

$$\Psi(x) = x\int_0^1 \varphi'(tx)\,dt \quad \Rightarrow \quad \Psi(x) = \varphi(x) - \varphi(0)\chi(x) \qquad \chi(x) = 1 \text{ cuando } |x|\leq 1$$

$$0 = \langle T, x\Psi\rangle = \langle T, x\varphi(x)\rangle - \langle T, \varphi(0)\chi(x)\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle T, x\varphi(x)\rangle = -\langle T, x\varphi(0)\chi(\cdot)\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle xT, \varphi\rangle = c\langle \delta_0, \varphi\rangle \qquad \text{con } c = -\langle T, x\chi\rangle$$

$$= \langle c\delta_0, \varphi\rangle$$

Sección: Derivada en el sentido de distribución

Dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y $T \in D'(\Omega)$, definimos la distribución llamada la derivada α-ésima de T como

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle$$

$\partial^\alpha T$ es la distribución derivada α-ésima de T

En efecto, si $\varphi_n \to 0$ en $D^\infty(\Omega)$, entonces

$|\langle \partial^\alpha T, \varphi_n\rangle| = (-1)^{|\alpha|}|\langle T, \partial^\alpha \varphi_n\rangle| \to 0$ pues $T \in D'(\Omega)$ y $\partial^\alpha \varphi_n \to 0$ en $D^\infty(\Omega)$.

$$u\,dv = uv - \int v\,du$$

Proposición 1.10. Dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$, entonces

$$\begin{aligned} \partial^\alpha : D'(\Omega) &\longrightarrow D'(\Omega) \\ T &\longmapsto \partial^\alpha T \end{aligned}$$

es lineal y secuencialmente continua.

Es claro que ∂^α es lineal.

Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $D'(\Omega)$, tal que $T_n \to 0$ en $D'(\Omega)$

P.D $\forall \varphi \in D^\infty(\Omega)$ $\quad \langle T_n, \varphi \rangle \to 0$

Notemos que para $\varphi \in D^\infty(\Omega)$

$$|\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle| = |\langle T_n, \partial^\alpha \varphi \rangle| \to 0 \qquad \text{pues } \partial^\alpha \varphi \in D^\infty(\Omega)$$

Ejemplo $\Omega = \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = |x|$ $\qquad f \in L^1_{loc}(\Omega)$

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx \qquad\qquad \langle T_f, \varphi \rangle = -\langle (T_f)', \varphi \rangle$$

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f\varphi'\,dx = -\left(\int_{-\infty}^0 f\varphi'\,dx + \int_0^\infty f\varphi'\,dx \right)$$

$$= -\left(\int_{-\infty}^0 -x\varphi'\,dx + \int_0^\infty x\varphi'\,dx \right)$$

$$= -\left(\cancel{-x\varphi\Big|_{-\infty}^0} - \int_{-\infty}^0 -\varphi\,dx \right) - \left(\cancel{x\varphi\Big|_0^\infty} - \int \varphi\,dx \right)$$

$$= -\left(-\int_{-\infty}^0 -\varphi\,dx - \int_0^\infty \varphi\,dx \right)$$

$$= \int_{-\infty}^0 -\varphi\,dx + \int_0^\infty \varphi\,dx = \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sgn}(x)\varphi(x)\,dx$$

Lunes, 18 de diciembre de 2023.

Observación Si $a \in C^\infty(\Omega)$ y $T \in D'(\Omega)$, entonces

$$\partial_{x_i}(aT) = \underbrace{(\partial_{x_i} a)}_{\in C^\infty} T + \underbrace{a\,\partial_{x_i} T}_{\in D'(\Omega)} \qquad \text{en el sentido de las distribuciones}$$

Si $f \in C^1(\Omega) \Rightarrow (T_f)' = T_{f'} = f'$ en el sentido de las distribuciones

En efecto, si $\varphi \in D^\infty$

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = (-1)\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_\Omega f\varphi' = -f\varphi\Big|_{\partial\Omega} + \int_\Omega f'\varphi\,dx = \langle T_{f'}, \varphi \rangle$$

En el caso general, $f \in C^k(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \le k$

$$\partial^\alpha(T_f) = T_{\partial^\alpha f} \qquad \text{en el sentido de las distribuciones.}$$

Definición 1.11. (Espacios de Sobolev)
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{k,p}$ de la siguiente forma (en Ω)

$$W^{k,p}(\Omega) := \{ u \in L^p(\Omega) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \le k \quad T_{\partial^\alpha u} \in L^p(\Omega) \}$$

derivada α-ésima distribucional de u

Observaciones: a) Si $p \in]1,+\infty[$, entonces $W^{k,p}(\Omega)$ es separable y reflexivo

b) Si $p=1$, entonces $W^{k,1}(\Omega)$ es separable pero no reflexivo

c) Si $p=+\infty$, entonces $W^{k,\infty}(\Omega)$ no es separable ni reflexivo

d) Para todo $p \in [1,+\infty]$ $(W^{k,p}, \|\cdot\|_{k,p})$ es un espacio de Banach con

$$\|\cdot\|_{k,p} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|T\partial^\alpha u\|_p$$

e) Para $p \in [1,+\infty[$,

$$\left(W^{k,p}(\Omega)\right)' = W^{-k,p'}(\Omega) \quad \text{con } p' \text{ el conjugado de } p.$$

Ejemplos

$\Omega = \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{H}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}$ función Heaviside. $\quad \mathcal{H} \notin W^{1,p}(\Omega)$

$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \int_\Omega f\varphi \, dx \quad \delta_0 \in L^p(\Omega)$

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo

$\{ u \in L^1_{loc}(\Omega) : u \in L^p \text{ Existe } g \in L^p \text{ tal que } \forall \varphi \in D^\infty(I) \ \langle T_{u'}, \varphi\rangle = -\langle T_u, \varphi'\rangle \}$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$W^{k,p}(\Omega) = \{ u \in L^1_{loc}(\Omega) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ con } |\alpha| \leq k \ \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \ \ T\partial^\alpha_u = Tg_\alpha \}$

$W^{1,p}(\Omega) = \{ u \in L^1_{loc}(\Omega) \text{ tal que } \forall i \in \{1,\dots,n\} \ \exists g_i \in L^p \text{ tal que } T\partial_{x_i} u = Tg_i \}$

Proposición 1.12. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ una función que verifica lo siguiente

- f es C^1 por pedazos en $[a,b]$
- En todo punto en donde no es continua admite un límite por la derecha y otro por la izquierda. Es decir, que existen subíndices $a_1,\dots,a_n$ en $[a,b]$ crecientes $[a,a_1[,]a_1,a_2[, \dots,]a_n,b]$ tal que f sea de clase C^1 sobre todo subintervalo $]a_i, a_{i+1}[$ con $a_0 = a$ y $b = a_{n+1}$

Entonces $f \in \Gamma'([a,b])$ y además

$$(T_f)' = T_{\{f'\}} + \sum_{i=0}^{n+1} \left(f(a_i^+) - f(a_i^-)\right) \delta_{a_i}$$

con $f(a^-) = f(b^+) = 0$, y $\{f'\} = f'$ en $[a,b] \setminus \{a_i\}_{i=1}^n$

Probar con un punto de discontinuidad

$$\langle (Tf)', \varphi\rangle = \int_\Omega f'\varphi\, dx = \int_{A_1} f'\varphi\, dx + \dots + \int_{A_n} f'\varphi\, dx$$

$$= f\varphi\Big|_{A_1} - \int_{A_1} f\varphi'\, dx + \dots + f\varphi\Big|_{A_n} - \int_{A_n} f\varphi'\, dx$$

$$= f(a_1)\varphi(a_1) - f(a)\varphi(a) - \int_{A_1} f\varphi'\, dx + \dots + \left(f(b)\varphi(b) - f(a_n)\varphi(a_n)\right)$$

$$= \left(f(a_1)\varphi(a_1) - f(a)\overset{0}{\cancel{\varphi(a)}} + f(b)\overset{0}{\cancel{\varphi(b)}} - f(a_n)\varphi(a_n)\right) + \int_{[a,b]} f\varphi'\, dx$$

Supongamos que $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{a\})$ que no necesariamente está definida en a pero que admita límite por la izquierda y derecha

Observaciones

- Note que sobre el espacio de distribuciones hemos generalizado algunas operaciones como:

  Si $a \in C^\infty(\Omega)$ $\quad aT \in D'(\Omega)$ $\quad$ con $T \in D'(\Omega)$

  - Si $|\alpha| \leq k$ $\quad \partial^\alpha T \in D'(\Omega)$

Pero, en general, no se puede realizar la multiplicación de dos distribuciones cualesquiera. $ST \in D'(\Omega)$ $\quad ST$ no es distribución

Ejercicio.

Sin embargo, podemos definir la convolución de dos distribuciones a condición de que una de las dos tenga «soporte compacto»

$$(D^\infty(\Omega))' = D'(\Omega) \qquad\qquad (C^\infty(\Omega))' = \mathcal{E}(\Omega)$$

distribuciones a soporte compacto

Miércoles, 3 de enero de 2024

Convolución de distribuciones

Definición 1.13. Sea $T \in D'(\Omega)$. Consideremos $W \subseteq \Omega$ el conjunto más grande tal que $T = 0$.

Ver Pág 34 [2]

Decimos que $T, S \in D'(\Omega)$ son iguales sobre $W \subseteq \Omega$ abierto si

$$\forall \varphi \in D^\infty(\Omega) \text{ tal que } \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq W \quad \langle T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle$$

Entonces llamaremos el soporte de la distribución T al cerrado definido como W^c

Observación

- $W \subseteq R$ abierto más grande tal que $T = 0$ se puede caracterizar como

$$W = \bigcup \{ \mathcal{U} \subseteq \Omega \text{ abiertos} : T = 0 \text{ en } \mathcal{U} \}$$

- $\operatorname{Supp}(T)$ es cerrado

Ejemplo: Si $a \in \Omega$, entonces $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$ en efecto $W = \Omega \setminus \{a\}$ es el abierto más grande tal que $\delta_a = 0$.

Si $\varphi \in D^\infty(\Omega)$ $\quad \operatorname{supp}(\varphi) \subset W$, entonces

$$\varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle = 0.$$

Definición 1.14 Definamos $\mathcal{E}'(\Omega) \subset D'(\Omega)$ el subespacio vectorial de las distribuciones a soporte compacto

$$\mathcal{E}'(\Omega) = \{ T \in D'(\Omega) : \operatorname{supp}(T) \text{ es acotado} \}$$

Basta que sean acotados pues trabajamos en espacios de dimensión finita.

Se verá en lo posterior que $\mathcal{E}'(\Omega) \approx (C^\infty(\Omega))'$ [Ver Teo 2.59 [2]]

$$D^\infty(\Omega) \subseteq S(\Omega) \subseteq C^\infty(\Omega) \qquad \mathcal{E}'(\Omega) \subseteq S'(\Omega) \subseteq D'(\Omega).$$

- **Distribución traslación**

  - $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y $a \in \mathbb{R}^n$ $\qquad f_a(x) = f(x-a)$

Podemos definir la siguiente distribución:

La traslación en el punto a de f

$$\langle T_{f_a}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f_a(x)\, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-a)\varphi(x)\, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\varphi(z+a)\, dz$$
$$= \langle T_f, \varphi_{-a} \rangle$$

Donde $\varphi_{-a}(x) = \varphi(x-a)$

Entonces esto nos permite generalizar la distribución traslación de $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ de la siguiente forma

$$\langle T_a, \varphi \rangle = \langle T, \varphi_{-a} \rangle$$

- **Reflexión**

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \qquad \tilde{f}(x) = f(-x)$ la reflexión de f

$$\langle T_{\tilde{f}}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(-x)\varphi(x)\, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\varphi(-z)\, dz$$
$$= \langle T_f, \tilde{\varphi} \rangle$$

Si $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ la reflexión $\tilde{T} \in D'(\mathbb{R}^n)$ va a estar definida como

$$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\varphi} \rangle$$

Ahora tengamos en cuenta el siguiente resultado de funciones.

Proposición 1.15. Sea $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in D^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces u y φ son convolutivas y además $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$u * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\varphi(y)\, dy = \langle T_u,$$

y además

$$\partial^\alpha(u*\varphi) = u * \partial^\alpha \varphi \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$$

Observación - Si u es suficientemente regular entonces

$$\partial^\alpha(u*\varphi) = (\partial^\alpha u) * \varphi = u * (\partial^\alpha \varphi)$$

- Note que $u*\varphi$ no es a soporte compacto ya que

$$\operatorname{supp}(u*\varphi) \subseteq \overline{\operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(\varphi)}$$

Ahora, supongamos que $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, podemos definir la convolución de T_u, T_v

$$T_u * T_v = T_{u*v}$$

$$\langle T_{u*v}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} (u*v)(x)\varphi(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\, v(y)\, dy \right) \varphi(x)\, dx \qquad z = x-y \quad dz = dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(z)\, v(y)\, \varphi(z+y)\, dy\, dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u(z) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z+y)\, v(y)\, dy\, dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u(z)\, \langle T_v, \varphi(z+\cdot) \rangle\, dz$$

$$= \langle T_u, \underbrace{\langle T_v, \varphi(z+\cdot) \rangle}\rangle \qquad \text{« Idea »}$$

No es necesariamente a soporte compacto
Pero sí es regular

Proposición 1.16. Sea $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ y $f \in D^\infty(\mathbb{R}^n)$. Definimos

$$T * \varphi(x) = \langle T, \varphi(x-\cdot) \rangle_{D' \times D^\infty}$$

Entonces $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y además

$$\partial^\alpha (T * \varphi) = T * \partial^\alpha \varphi = \partial^\alpha T * \varphi$$

y además, si $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, entonces

$$\partial^\alpha (T * \varphi) = \partial^{\alpha_1} (T * \varphi) \quad \partial^{\alpha_2} (T * \varphi)$$

Entonces en este caso también podemos definir la convolución de estas funciones

$$T \in D'(\mathbb{R}) \quad \varphi \in D^\infty(\mathbb{R}^n) \quad T * \varphi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

y por lo tanto, puedo definir la convolución de estas dos distribuciones

$$\langle T * \varphi, \Psi \rangle = \langle \overline{T}_{\underbrace{T*\varphi}_{\in L^1_{loc}}}, \Psi \rangle$$

En general, podemos definir

Con las ideas anteriores, vamos a mostrar que si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ y $T \in D'(\mathbb{R}^n)$, entonces $S * T \in D'(\mathbb{R}^n)$ de la siguiente manera

$$\varphi \in D^\infty(\mathbb{R}^n) \qquad \langle S * T, \varphi \rangle = \langle S, \underbrace{\langle T, \varphi(x+\cdot) \rangle_{D' \times D}}_{C^\infty} \rangle_{\mathcal{E}' \times C^\infty}$$

$$= \langle T, \underbrace{\langle S, \varphi(x+\cdot) \rangle_{\mathcal{E}' \times \mathcal{E}}}_{D^\infty(\mathbb{R}^n)} \rangle_{D' \times D}$$

$$= \langle T * S, \varphi \rangle$$

Para ello empezaremos por el siguiente teorema.

Teorema 1.17. Existe una aplicación lineal biyectiva φ de $\mathcal{E}'(\Omega)$ en $(C^\infty(\Omega))'$

Proposición 1.18. Sea $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ y $K_0 = \text{supp}(T)$ compacto, entonces existe una única $\tilde{T} \in (C^\infty(\Omega))'$ tal que

i) $\langle T, \varphi \rangle = \langle \tilde{T}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D^{\infty}(\Omega)$

ii) $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = 0$ si $\varphi \in C^{\infty}(\Omega)$ tal que $\text{supp}(f) \cap K_0 = \emptyset$

iii) Existe $k \in \mathbb{N}$ y $K \subseteq \Omega$ compacto (Vecindad de K_0) y $C_{(k,K)} > 0$ tal que

$$\underset{(C^\infty)' \times C^\infty}{|\langle \tilde{T}, \varphi \rangle|} \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha f(x)| \quad \forall \varphi \in C^\infty$$

$$\varphi : \underset{\mathcal{E}'(\Omega)}{T} \mapsto \underset{C^\infty(\Omega)}{\tilde{T}}$$

Lunes, 8 de enero de 2023.

Ejercicio 1. Sea $(f_j)_{j \geq 0}$ una sucesión de funciones $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ con las siguientes propiedades:

a) $\forall j \in \mathbb{R}^+ \quad \text{supp}(f_j) \subseteq B(0, \varepsilon_j)$ con $\varepsilon_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$

b) $f_j \geq 0$

c) $\int_{\mathbb{R}^n} f_j = 1$

Demuestre que $T_{f_j} \longrightarrow \delta_0$ en $D'(\mathbb{R}^n)$.

Demostración

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces como f_j es una sucesión de funciones $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$|\langle T_{f_j}, \varphi \rangle - \langle \delta, \varphi \rangle|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) \varphi(x)\, dx - \varphi(0) \right|$$

$$= \left| \int_{B(0,\varepsilon_j)} f_j(x) \varphi(x) - \varphi(0) f_j(x)\, dx \right|$$

$$\leq \int_{B(0,\varepsilon)} f_j(x) |\varphi(x) - \varphi(0)|\, dx$$

Entonces, como φ es regular para todo α-multíndice tal que $|\alpha| = 1$ tenemos que $\partial^\alpha \varphi$ es acotada en $\bar{B}(0,1)$ y utilizando el teorema de los incrementos finitos, tenemos que para ε_j suficientemente pequeño tal que

$$B(0, \varepsilon_j) \subseteq B(0,1)$$

tenemos que

$$\int_{B(0,\varepsilon_j)} f_j(x) |\varphi(x) - \varphi(0)|\, dx \leq \int_{B(0,\varepsilon_j)} f_j(x) \cdot M \|x\|\, dx$$

con $M = \sup_{\tilde{x} \in B(0,1)} |\partial^\alpha \varphi(x)|$. Así,

$$\int_{B(0,\varepsilon_j)} f_j(x) \cdot M \|x\|\, dx \leq \varepsilon_j M \int_{B(0,\varepsilon_j)} f_j(x)\, dx \leq \varepsilon_j M \longrightarrow 0 \text{ cuando } j \to +\infty.$$

por hipótesis.

Esto demuestra la convergencia de las sucesiones regularizantes.

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un compacto cualquiera, entonces

$$|\langle T, \varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi((x,-x))\, dx\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi((x,-x))|\, dx$$

$$\leq \int \mathbb{1}_K(x,-x)\, |\varphi((x,-x))| dx$$

$$\leq \int \mathbb{1}_K(x,-x) \max_{\hat{x}\in K} |\varphi(\hat{x})| \quad = C \max_{\hat{x}\in K} |\varphi(\hat{x})|.$$

literal b)

Mostremos que $supp(T) = \{(x,-x)\in\mathbb{R}^2 : x\in\mathbb{R}\} = A$ Si $\varphi \in D^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $supp(\varphi)\cap A = \emptyset$ entonces $\langle T,\varphi\rangle = 0$, con esto se ha probado que

$$supp(T) \subseteq A$$

Sea $(x_0,-x_0)\in A$, mostremos que $(x_0,-x_0)\in supp(T)$, debemos mostrar que para todo $\varepsilon>0$ existe $f_\varepsilon \in D^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$supp(f_\varepsilon) \subseteq B((x_0,-x_0),\varepsilon)$$

Ver caracterización Pág 25 [1].

Podemos tomar $\varphi_\varepsilon \in D^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$Supp(\varphi_\varepsilon) \subseteq B((x_0,-x_0),\varepsilon)$$

y $\varphi_\varepsilon(x) = 1$ en $B(\overbrace{(x_0,-x_0)}^{M_0},\varepsilon)$. Consideremos

$$V = \{x\in\mathbb{R} : (x,-x)\in B((x_0,-x_0),\varepsilon/2)\}$$

$$|\langle T,\varphi_\varepsilon\rangle| = \int_{B(M_0,\varepsilon)} \varphi_\varepsilon((x,-x)) \geq \int_V \varphi_\varepsilon((x,-x))\, dx = M(V) > 0$$

Si suponemos que $\tilde{T}|_f = T$ con $f\in C(\mathbb{R}^2)$, entonces, si $supp(f) = \emptyset \Rightarrow f = 0 \Rightarrow \Leftarrow$

Si ahora, existe $(x_0,y_0)\in supp\,\tilde{T}_f$, por la continuidad de f existe un abierto V_{x_0} donde $supp(f_f) \supset V_{x_0}$, lo cual contradice lo anterior (El soporte es una recta la cual tiene interior no vacío)

literal d)

$$\langle \partial_x T - \partial_y T, \varphi\rangle = -\langle T, \partial_x\varphi\rangle + \langle T, \partial_y\varphi\rangle$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)((x,-x))\, dx$$

si definimos $\Psi(x) = \varphi(x,-x)$, entonces $\Psi'(x) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)(x,-x)$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)((x,-x))\, dx = -\int_{\mathbb{R}} \Psi'(x)\, dx = \Psi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

ya que $Supp(\Psi)$ es compacto.

Ejercicio 2. Demuestre que $(L^1(\mathbb{R}^n), *)$ es un álgebra de Banach sin unidad.

Demostración.

Sobre $L^1(\mathbb{R}^n)$, con la operación $*$, notemos que si $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $c \in \mathbb{K}$, entonces

a) $u * v \in L^1(\mathbb{R}^n)$

b) $(u * v) = (v * u)$

c) $(cu * v) = c(u * v)$

d) $\|u * v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$

e) $(u * v) * w = u * (v * w)$

d)

Ahora, mostremos que $(L^1(\mathbb{R}^n), *)$, entonces por absurdo, supongamos que existe $i \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que para $u_n = n \cdot \mathbb{1}_{B(0,1/n)}$

$$(u_n * i)(0) = u_n(0)$$

Entonces

$$(u_n * i)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} u_n(0-y)\, i(y)\, dy$$

$$= \int_{B(0,1/n)} n\, i(y)\, dy$$

$$= n \int_{B(0,1/n)} i(y)\, dy = u_n(0) = n$$

Además, por construcción $u_n(0) = n$.

$$\Rightarrow \int_{B(0,1/n)} i(y)\, dy = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pero por otro lado, por «convergencia dominada»

$$\int_{B(0,1/n)} i(y)\, dy \to 0$$

Ejercicio 3. Sea $\varphi \in D^\infty(\mathbb{R}^2)$, definimos

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi((x,-x))\, dx \qquad \langle T_f, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

a) Muestre que $T \in D'(\mathbb{R}^2)$ y encuentre su orden $\int f \cdot \varphi = \int \varphi$

b) Determine el $supp(T)$ $\int f \cdot \varphi - \varphi$

c) Muestre que no existe $f \in C(\mathbb{R}^2)$ tal que $T = \tilde{T}|_f$ Inyección canónica de L^1_{loc} en $D'(\mathbb{R}^2)$

d) Resuelva $\dfrac{\partial T}{\partial x} - \dfrac{\partial T}{\partial y} = 0$, en el sentido de las distribuciones.

literal a).

Notemos que T es lineal, en efecto, sean $\varphi_1, \varphi_2 \in D'(\mathbb{R}^2)$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\langle T, c\varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}} (c\varphi_1 + \varphi_2)((x,-x))\, dx = c\int_{\mathbb{R}} \varphi_1((x,-x))\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_2((x,-x))\, dx$$

$$= c\langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle$$

por la evaluación de funciones

Lunes, 15 de enero de 2024

Demostración (Proposición 1.18)

En primer lugar, demostremos la unicidad.

Supongamos que existen $\tilde{T}_1$ y $\tilde{T}_2 : C^\infty(\Omega)$ en $\mathbb{C}$ que verifican los enunciados anteriores.

Consideremos $\chi \in D^\infty(\Omega)$ tal que $\chi = 1$ sobre K (Es una vecindad compacta de K_0). Sea $\varphi \in C^\infty(\Omega)$.

Para $i = 1, 2$, tenemos que

$$\langle \tilde{T}_i, \chi\varphi \rangle + \langle \tilde{T}_i, (1-\chi)\varphi \rangle = \langle \tilde{T}_i, \varphi \rangle \text{ ; Como } \operatorname{supp}[(1-\chi)\varphi] \cap K_0 = \varnothing,$$

ya que $\chi = 1$ en K_0, tenemos que

$$\langle \tilde{T}_i, \varphi \rangle = \langle \tilde{T}_i, \chi\varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle$$

Así,

$$\langle \tilde{T}_1, \varphi \rangle = \langle \tilde{T}_2, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Ahora, mostremos la existencia.

i) Nuevamente, consideremos χ como antes.

$$\tilde{T} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$$
$$\varphi \mapsto \langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle$$

Mostremos que $\tilde{T}$ verifica el enunciado anterior.

Sea $\varphi \in D^\infty(\Omega)$, tenemos que

$$\operatorname{supp}\big((1-\chi)\varphi\big) \cap K_0 = \varnothing \Rightarrow \langle T, (1-\chi)\varphi \rangle = 0$$

Luego

$$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle \tilde{T}, (1-\chi)\varphi + \chi\varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \text{ya que } \chi = 1 \text{ en } K_0.$$

ii) Sea $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\operatorname{supp}(\varphi) \cap K_0 = \varnothing$. P.D. $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = 0$.

Como $\operatorname{supp}(\varphi) \cap K_0 = \varnothing \Rightarrow \underset{\text{compacto}}{K_0} \subset \underset{\text{abierto}}{(\operatorname{supp}(f))^c}$. Por un axioma de separación, existe U_{K_0}

$$\overline{U_{K_0}} \text{ es compacto, } K_0 \subseteq U_{K_0} \text{ y } \overline{U_{K_0}} \subseteq (\operatorname{supp}(\varphi))^c$$

Ahora consideramos, $\chi_1 \in D^\infty((\operatorname{supp}(\varphi))^c)$ tal que $\chi_1 = 1$ en $\overline{U_{K_0}}$. Como $\operatorname{supp}(\chi_1) \subseteq (\operatorname{supp}(\varphi))^c$, tenemos que $\chi_1\varphi = 0$

Entonces, $\langle T, \chi_1\varphi \rangle = 0$ y además $\langle T, (\chi - \chi_1)\varphi \rangle = 0$ ya que

$$\operatorname{supp}\big((\chi-\chi_1)\varphi\big) \cap K_0 = \varnothing$$

Luego:

$$\langle T, (\chi - \chi_1)\varphi \rangle + \langle T, \chi\varphi \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle T, \chi\varphi \rangle = \langle \tilde{T}, \varphi \rangle = 0.$$

iii) Evidente, ya que T es una distribución.

Note que por la unicidad de $\tilde{T}$ es irrelevante la función χ mientras verifique lo deseado.

$$\varphi : \mathcal{E}'(\Omega) \longrightarrow (C^\infty(\Omega))'$$
$$T \longmapsto \tilde{T}$$

es inyectiva y lineal. Mostremos que φ es sobreyectiva.

Observación. Note que por la unicidad de $\tilde{T}_1$ es irrelevante la función χ mientras verifique lo deseado

Sección: Producto Tensorial de Distribuciones

En primer lugar, consideremos $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ y $u_1 \in C^0(\Omega_1)$, $u_2 \in C^0(\Omega_2)$
Entonces podemos definir la función producto tensorial

$$u_1 \otimes u_2 : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{C}$$
$$(x_1, x_2) \mapsto u_1 \otimes u_2\,((x_1,x_2)) = u_1(x_1)\, u_2(x_2).$$

Entonces es fácil mostrar que $u_1 \otimes u_2 \in C^0(\Omega_1 \times \Omega_2)$.
Con esto, podemos definir $T_{u_1 \otimes u_2} \in D'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ como.
Si $\varphi \in D^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$

$$\langle T_{u_1 \otimes u_2}, \varphi \rangle = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} u_1 \otimes u_2\,((x_1,x_2))\, \varphi((x_1,x_2))\, dx_1\, dx_2$$

$$= \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} u_1(x_1)\, u_2(x_2)\, \varphi((x_1,x_2))\, dx_1 dx_2$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\Omega_1} u_1(x_1) \int_{\Omega_2} u_2(x_2)\, \varphi((x_1,x_2))\, dx_2\, dx_1$$

$$= \langle T_{u_1}, \underbrace{\langle T_{u_2}, \varphi(x_1, \cdot)\rangle}_{\in D^\infty(\Omega_1)} \rangle$$

En particular, si $\varphi \in D^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ es de la forma:

$$\varphi((x_1 x_2)) = \varphi_1(x)\, \varphi_2(x)$$

donde $\varphi_1 \in D^\infty(\Omega_1)$ y $\varphi_2 \in D^\infty(\Omega_2)$, tenemos que

$$\langle T_{u_1 \otimes u_2}, \varphi \rangle = \langle T_{u_1 \otimes u_2}, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle T_{u_1}, \varphi_1 \rangle \langle T_{u_2}, \varphi_2 \rangle$$

Con esto podemos mostrar el siguiente teorema.

Teorema 1.19. Consideremos $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ abiertos, $T_1 \in D'(\Omega_1)$, $T_2 \in D'(\Omega_2)$

Ver Proposición 2.78 [2]

Entonces existe una única $T \in D'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ que verifica que

i) $\forall \varphi \in D^\infty(\Omega_1)$ $\forall \varphi \in D^\infty(\Omega_2)$

$$\langle T, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle T_1, \varphi_1 \rangle \langle T_2, \varphi_2 \rangle$$

ii) $\forall \varphi \in D^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_1, \langle T_2, \varphi(x_1, \cdot)\rangle\rangle$$
$$= \langle T_2, \langle T_1, \varphi(\cdot, x_2)\rangle\rangle$$

Observación: La operación $(T_1, T_2) \to T = T_1 \otimes T_2 \in D'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ es continua e inyectiva pero no sobreyectiva.
Si $T_1 \in \mathcal{E}'(\Omega_1)$ y $T_2 \in \mathcal{E}'(\Omega_2)$, entonces:

$\exists!\ T \in \mathcal{E}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ que verifica lo enunciado en el teorema anterior.

Miércoles, 17 de enero de 2023.

Demostración Teorema 1.19

Consideremos $K_j \subseteq \Omega_j$ compacto. Entonces existe $k_j \in \mathbb{N}$ y $C_j > 0$ tal que

$$\forall \varphi_j \in D^\infty(K_j) \quad |\langle T_j, \varphi_j \rangle| \leq C_j \sum_{|\alpha| \leq k_j} \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha \varphi_j| \qquad [*]$$

Ahora consideramos $\varphi \in D(K_1 \times K_2)$, entonces $x_1 \mapsto \langle T_2, \varphi(x_1, \cdot) \rangle_{D'(\Omega_2) \times D(\Omega_2)}$ pertenece a $D(K_1)$.

En efecto, esta función es nula para $x_1 \notin K_1$ y además es $C_c^\infty(K_1)$. Consideremos $\alpha_j \in \mathbb{N}^n$ con $j = 1, 2$. La función $\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \varphi$ es continua en $\Omega_1 \times \Omega_2$ y por tanto

$$\operatorname{supp}(\partial_{x_1}^{\alpha_1} \varphi) \subseteq K_2 \qquad \forall x_1 \in K_1$$

Entonces, por un teorema anterior

$$\partial_{x_1}^{\alpha_1}\left(\langle T_2, \varphi(x_1, \cdot) \rangle_{D'(\Omega_2) \times D(\Omega_2)} \right) = \langle T_2, \partial_{x_1}^{\alpha_1} \varphi(x_1, \cdot) \rangle_{D'(\Omega_2) \times D(\Omega_2)}$$

Por tanto, como $T_2 \in D'(\Omega_2)$ tenemos que usando $[*]$

$$\sup_{x \in K_1} |\partial_{x_1}^{\alpha_1}(\langle T_2, \varphi(x_1, \cdot) \rangle)| = \sup_{x \in K_1} |\langle T_2, \partial_{x_1}^{\alpha} \varphi(x_1, \cdot) \rangle| \leq C_2 \sum_{|\alpha_2| \leq k_2} \sup_{(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2} |\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \varphi|$$

Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned}
|\langle T, \varphi \rangle| &= |\langle T_1, \langle T_2, \varphi(x_1, \cdot) \rangle \rangle| \\
&\leq C_1 \sum_{|\alpha_1| \leq k_1} \sup_{x \in K_1} |\langle T_2, \partial_{x_1}^{\alpha_1} \varphi(x_1, \cdot) \rangle| \\
&\leq C_1 C_2 \sum_{\substack{|\alpha_1| \leq k_1 \\ |\alpha_2| \leq k_2}} \sup_{(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2} |\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \varphi|
\end{aligned}$$

Con lo cual, $\langle T, \varphi \rangle = \langle T_1, \langle T_2, \varphi(x_1, \cdot) \rangle \rangle \in D'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ y además T verifica lo requerido.

Unicidad

Para la unicidad, mostraremos el siguiente resultado.

Proposición 1.20. Ver Prop 2.73 [2] Sean $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ y $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$, entonces $D(\Omega_1) \otimes D(\Omega_2)$ es igual a $\{\varphi \in D^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2) : \varphi((x_1, x_2)) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)$ donde $\varphi_1 \in D(\Omega_1)$ y $\varphi_2 \in D(\Omega_2)\}$ es denso en $D(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Sea $\varphi \in D^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ y consideramos $K = K_1 \times K_2$ tales que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$.
Mostremos que existe $\varphi_j((x_1, x_2)) = \varphi_j^1(x_2)$ tal que

$$\varphi_j^1 \in D(K_1) \quad \text{y} \quad \varphi_j^2 \in D(K_2)$$

y más aún

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n_1 \times n_2} \quad \partial^\alpha \varphi_j \text{ converge uniformemente a } \partial^\alpha \varphi \text{ en } K$$

Por otro lado, utilizando el teorema de Weierstrass existe $(p_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{P}[\mathbb{R}^{n_1 n_2}]$ tal que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n_1 \times n_2} \ (\partial^{\alpha_j} p_j) \text{ converge uniformemente a } \partial^\alpha \varphi \text{ en } K$$

Ver Proposición 2.73 [2].

Tenemos que

$$P_j((x_1,x_2)) = \sum_{|\alpha_1+\alpha_2|\leq n_j} a^j_{\alpha_1,\alpha_2}\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \in \text{span}\left(C^\infty(\Omega_1)\otimes C^\infty(\Omega_2)\right)$$

Consideramos $\theta_1 \in D(\Omega_1)$ y $\theta_2 \in D(\Omega_2)$ tales que

$$\theta_1(\cdot) = 1 \quad \text{en} \quad K_1$$
$$\theta_2(\cdot) = 1 \quad \text{en} \quad K_2$$

Luego

$$\tilde{P}_j((x_1,x_2)) = \sum_{|\alpha_1+\alpha_2|\leq n_j} a^j_{\alpha_1,\alpha_2}\, x_1^{\alpha_1}\theta_1(x_1)\, x_2^{\alpha_2}\theta_2(x_2) \in D^\infty(\Omega_1)\otimes D^\infty(\Omega_2)$$

$\tilde{p}_j = \theta_1\theta_2 p_j$. Por lo anterior, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n_1\times n_2}$ $\partial^\alpha \tilde{p}_j$ converge uniformemente en K a $\partial^\alpha \varphi$

Unicidad

Supongamos que $T, \tilde{T} \in D'(\Omega_1\times\Omega_2)$ tal que

$$\left.\begin{aligned} &\langle T, \varphi\rangle = \langle T_1, \langle T_2, \varphi(x_1,\cdot)\rangle\rangle \\ &\text{y} \\ &\langle \tilde{T}, \varphi\rangle = \langle T_1, \langle T_2, \varphi(x_1,\cdot)\rangle\rangle \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\forall \varphi \in D(\Omega_1\times\Omega_2) \\ &\text{con } \varphi = \varphi_1(x)\varphi_2(x) \end{aligned}$$

luego

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T_1, \varphi_1\rangle\langle T_2, \varphi_2\rangle \quad \text{y} \quad \langle \hat{T}, \varphi\rangle = \langle T_1, \varphi_1\rangle\langle T_2, \varphi_2\rangle \qquad [**]$$

P.D. $T = \tilde{T}$ en span $(D(\Omega_1)\otimes D(\Omega_2))$

Para ello, únicamente utilizamos [**]. Así, si $T = \tilde{T}$ sobre span $(D(\Omega_1)\otimes D(\Omega_2))$ y como este espacio es denso en $D(\Omega_1\times D_2)$ se tiene que $T = \tilde{T}$.

Ver demostración Teorema 1.1 Pág 64 [1]

Note que $\langle \tilde{T}, \varphi\rangle = \langle T_2, \langle T_1, \varphi(\cdot, x_2)\rangle\rangle$ verifica todas las hipótesis anteriores y por unicidad $\langle T, \varphi\rangle = \langle \tilde{T}, \varphi\rangle$.

Ejemplos Sean $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ y $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$, $a_1 \in \Omega_1$, $a_2 \in \Omega_2$. $T_1 = \delta_{a_1}$ y $T_2 = \delta_{a_2}$

$$T_1 \otimes T_2 = ?$$

$$\begin{aligned} \langle T_1\otimes T_2, \varphi\rangle &= \langle T_1, \langle T_2, \varphi(x_1,\cdot)\rangle\rangle \\ &= \langle \delta_{a_1}, \langle \delta_{a_2}, \varphi(x_1,\cdot)\rangle\rangle \\ &= \langle \delta_{a_1}, \varphi(\cdot, a_2)\rangle \\ &= \varphi(a_1, a_2) \\ &= \langle \delta_{(a_1,a_2)}, \varphi\rangle \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Si $T_1 \in D'(\Omega_x)$ y $T_2 \in D'(\Omega_y)$

- $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(T_1 \otimes T_2) = \dfrac{\partial}{\partial x_j} T_1 \otimes T_2$

- $\dfrac{\partial}{\partial y_i}(T_1 \otimes T_2) = T_1 \otimes \dfrac{\partial}{\partial y_i} T_2$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}(T_1 \otimes T_2), \varphi \right\rangle = -\left\langle T_1 \otimes T_2, \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi \right\rangle$$

$$= -\left\langle T_2, \left\langle T_1, \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(\cdot, x_2) \right\rangle\right\rangle$$

$$= -\left\langle T_2, \left\langle T_1, \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(\cdot, x_2) \right\rangle\right\rangle$$

$$= \left\langle T_2, \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} T_1, \varphi(\cdot, x_2) \right\rangle\right\rangle$$

$$= \left\langle T_2 \otimes \frac{\partial}{\partial x_j} T_1, \varphi \right\rangle$$

Viernes, 19 de enero de 2024

Ejemplo. Consideremos $H(t)$ la función de Heaviside sobre $\mathbb{R}$

Si $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\Big(H(x_1) \otimes \cdots \otimes H(x_n)\Big)$$

$$= \delta_{x_1=0} \otimes \delta_{x_2=0} \otimes \cdots \otimes \delta_{x_n=0}$$

$$= \delta(0, \dots, 0)$$

Por otro lado, consideremos $T \in D'(\Omega_x)$ y $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$, entonces tomando $\chi \in D^\infty(\Omega_y)$ tal que $\chi = 1$ en una vecindad del soporte de S. Entonces, se tiene que

$$\forall \varphi \in D^\infty(\Omega_x \times \Omega_y) \qquad \langle T \otimes S, \varphi\rangle = \langle T \otimes S, \chi\varphi\rangle$$

En efecto, tenemos que

$$\langle T \otimes S, \varphi\rangle = \langle T, \langle S, \varphi(x, \cdot)\rangle\rangle$$

$$= \langle T, \langle S, \chi(\cdot)\, \varphi(x, \cdot)\rangle\rangle$$

$$= \langle T \otimes S, \chi\varphi\rangle$$

Entonces, la igualdad anterior nos muestra que en este caso podemos prolongar $T \otimes S$ para $\varphi \in C^\infty(\Omega_x \times \Omega_y)$ tal que $\chi(\cdot)\, \varphi(\cdot, \cdot) \in D^\infty(\Omega_x \times \Omega_y)$

Convolución en $D'(\Omega_x)$ y $\mathcal{E}'(\Omega_y)$

Es claro que si consideramos por ejemplo u, v funciones continuas, entonces para un «x» fijo en la función

$$\varphi(y) = u(y)\, v(x-y)$$

es continua pero no necesariamente integrable sobre $\mathbb{R}^n$. Por el contrario, si alguna de las dos funciones es a soporte compacto (por ejemplo) entonces

$\forall x$ fija $\quad \varphi(y)$ es integrable y tiene sentido

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\, v(y)\, dy$$

Entonces si consideramos $\varphi \in D^\infty(\mathbb{R}^n)$

$(x,y) \longmapsto u(y)v(x-y)\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ y además

$$\langle u * v, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} u(y)v(x-y)\varphi(x)\, dy\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} u(y)v(z)\varphi(y+z)\, dy\, dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} v(z)\left(\int_{\mathbb{R}^n} u(y)\varphi(y+z)\, dy\right) dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} v(z)\, \langle u, \varphi(\cdot+z)\rangle_1\, dz$$

$$= \langle v_z \otimes u_y, \varphi(y+z)\rangle_z$$

$$= \langle u_y \otimes v_z, \varphi(y+z)\rangle$$

Teorema 1.21 Consideramos $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ (o a la inversa) la forma lineal, notada como $T*S$, definida sobre $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$ por

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T_y \otimes S_z, \varphi(y+z)\rangle$$

es una distribución. Llamada la convolución de las distribuciones T y S.

Demostración

Consideramos $\varphi \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\chi(\cdot) \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\chi = 1$ sobre una vecindad del soporte de S, entonces la función

$$(y,z) \mapsto \chi(y)\varphi(y+z) \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

Entonces

$$\langle T*S, \varphi\rangle = \langle T_y \otimes T_z, \chi(y)\varphi(y+z)\rangle$$

$$= \langle T_y, \langle S_z, \chi(y)\varphi(y+z)\rangle\rangle$$

P.D. Existe $m \in \mathbb{N}$ y $C_{m,K} > 0$ tal que $|\langle T*S, \varphi\rangle| \leq C_{m,K} \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$

Tomando $A = \langle T_y, \langle S_z, \varphi(y+z)\rangle\rangle$, como $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ existen $C_0 > 0$, $\ell \in \mathbb{N}$ y $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que

$\forall \Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y todo $y \in \mathbb{R}^n$ fijo

$$\langle S, \varphi(y+\cdot)\rangle \leq C_0 \sum_{|\alpha|\leq \ell} \sup_{z\in K} |\partial^\alpha \Psi(y+z)| \qquad [A]$$

Por otra parte, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y como la función $y \mapsto \langle S, \varphi(y+\cdot)\rangle \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces, dado $\tilde{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto, tenemos que existe $k \in \mathbb{N}$ y $C_{\tilde{K},k} > 0$ tal que

$$|\langle T_y \langle S_z, \varphi(y+\cdot)\rangle\rangle| \leq C_1 \sum_{|\beta|\leq k} \sup_{y\in\tilde{K}} |\partial_y^\beta \langle S, \varphi(y+\cdot)\rangle|$$

$$\leq C_1 \sum_{|\beta|\leq k} \sup_{y\in\tilde{K}} |\langle S, \partial_y^\beta \varphi(y+\cdot)\rangle|$$

Con lo que, se tiene que

$$|\langle T_y, \langle S_z, \varphi(y+z)\rangle\rangle| \leq C_1 C_0 \sum_{\substack{|\alpha|\leq \ell \\ |\beta|\leq k}} \sup_{\substack{z\in K \\ y\in \tilde{K}}} |\partial^{\alpha+\beta}\varphi(y+z)|$$

$$\leq C_1 C_0 \sum_{|\alpha|\leq \ell+k} \sup_{x\in \tilde{K}} |\partial^{\alpha}\varphi(x)|$$

Por lo tanto, $S*T$ es una distribución

El caso $T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ y $S\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ es análogo.

Propiedades de la convolución

Proposición 1.22. Sea $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y $S\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

Proposición 1.2 [1].

a) $T*S = S*T$

b) $T*\delta_0 = \delta_0 * T = T$

c) $\partial^\alpha(T*S) = \partial^\alpha T * S = T*\partial^\alpha S$

Lunes, 22 de enero de 2024

Observación. Si $\alpha\in\mathbb{N}^n$ y $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, entonces

- $\partial^\alpha(T*S) = \partial^{\alpha_1}T * \partial^{\alpha_2}T$

Si $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y $S, \mathcal{U}\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$T*(S*\mathcal{U}) = (T*S)*\mathcal{U}.$$

Esta propiedad asociativa se puede generalizar para la convolución de n-distribuciones tal que a lo sumo una de ellas no sea a soporte compacto.

$$\langle T*(S*\mathcal{U}), \varphi\rangle = \langle T_x\otimes(S*\mathcal{U})_y, \varphi(x+y)\rangle$$
$$= \langle T_x, \langle (S*\mathcal{U})_{x_1}, \varphi(x+\cdot)\rangle\rangle$$

En el caso cuando al menos dos distribuciones no tengan el soporte compacto se puede tener en algunos casos (no en todos) la convolución de estas distribuciones pero lo que no se tiene es la asociatividad.

Ejemplo: Si $T=1$, $S=\delta_0'$ y $\mathcal{U}=H$ (la distribución de Heaviside)

En este caso, solo una de las tres distribuciones es a soporte compacto (S). Entonces

$$T*S*H = 0. \quad \text{En efecto} \quad (1*\delta_0')*H = (\cancel{1}^{\,0}*\delta_0)*H = 0$$

y por otro lado,

$$T*(S*H) = 1*(\delta_0'*H) = 1*(\delta_0*H') = 1*(\delta_0*\delta_0) = 1*\delta_0 = 1.$$

Proposición 1.23.

- Sean $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ y $S\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tales que $S_n\to S$ en $\mathcal{E}'(\Omega)$ cuando $n\to+\infty$, entonces

$$S_n * T \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S*T \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

- Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y $S\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $T_n\to T$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, entonces

$$T_n * S \to T*S$$

en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Consideremos $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, entonces definimos

$$*_T : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$
$$S \longmapsto S * T$$

es continua. Y

$S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$*_S : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$
$$T \longmapsto T * S$$

es continua.

Demostración

$$\langle S_n * T, \varphi \rangle = \langle S_{x n} \otimes T_y, \varphi(x+y) \rangle$$
$$= \langle S_n, \underline{\langle T_y, \varphi(x+\cdot) \rangle} \rangle$$

Copiar demostración

Teorema 1.24 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, entonces $D^\infty(\Omega)$ es denso en $D'(\Omega)$ y $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Dado $T \in D'(\Omega)$ $(S \in \mathcal{E}'(\Omega))$ existe $(\varphi_j \in D^\infty(\Omega))$ tal que $T_{\varphi_j} \xrightarrow[n\to+\infty]{D'(\Omega)} T$

existe $(\xi_j \in \mathcal{E}(\Omega))$ tal que $\mathcal{T}_{\xi_j} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$

Lunes, 24 de enero de 2024

Demostración 1.24 Para demostrar este resultado utilizaremos los siguientes enunciados auxiliares.

1) Si $(\mathcal{S}_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{S}_j \xrightarrow{\mathcal{E}'} \mathcal{S}$ con $\mathcal{S} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ y $T \in D'(\mathbb{R}^n)$

$$T * \mathcal{S}_j \xrightarrow{D'} T * \mathcal{S}$$

2) Si $(T_j)_{j\in\mathbb{N}} \in D'(\mathbb{R}^n)$ tal que $T_j \xrightarrow{D'} T$ con $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ y $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

$$T_n * S \xrightarrow{\mathcal{E}'} T * S$$

3) Si $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ y $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\operatorname{supp}(T*S) \subseteq \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(T)$$

4) Si $T \in D'(\mathbb{R}^n)$, $S, \mathcal{U} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

Ver Prop 1.4 - Cap 6 [1]. $$T*(S*\mathcal{U}) = (T*S)*\mathcal{U}.$$

Así, de todos los enunciados auxiliares únicamente faltaría probar iii)

Demostración iii)

Consideremos $\chi \in D^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\operatorname{supp}(\chi) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\} \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \chi = 1.$$

entonces, consideremos

$$\chi_\varepsilon(\cdot) = \varepsilon^{-n}\chi\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$$

entonces, sabemos que $\chi_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)} \delta_0$. Despues por el literal anterior, sabemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \langle (T*S)*\chi_\varepsilon, \varphi\rangle = \langle T*S, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in D^\infty(\mathbb{R}^n) \qquad [*]$$

Mostremos que

$$(\operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(S))^c \subseteq \operatorname{supp}(T*S)^c$$

Si $x_0 \notin \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(S)$, entonces existe $V_{x_0} \in \mathcal{V}(x_0)$ y existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\forall\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \qquad V_{x_0} \cap (\operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(S) + B(0,\varepsilon)) = \emptyset$$

Por otro lado, si consideramos $\varphi \in D^\infty(V_{x_0})$, entonces como

$(T * S) * \chi_\varepsilon = T * \underbrace{(S * \chi_\varepsilon)}_{\in D^\infty(\mathbb{R}^n)}$, se sigue que

$$\operatorname{supp}(T * (S * \chi_\varepsilon)) \subseteq \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(S * \chi_\varepsilon)$$

luego

$$\operatorname{supp}(T * (S * \chi_\varepsilon)) \subseteq \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(S) + B(0, \varepsilon)$$

así, por lo hecho previamente, si $x_0 \notin \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(S)$ se tiene que

$$\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 \qquad \operatorname{supp}(\varphi) \cap \operatorname{supp}(T * (S * \chi_\varepsilon)) = \emptyset.$$

Con lo cual, por lo anterior

$$\langle (T * S) * \chi_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle T * (S * \chi_\varepsilon), \varphi \rangle = 0$$

y así usando [*] cuando $\varepsilon \to 0$

$$\langle (T * S), \varphi \rangle = 0.$$

Así, $x_0 \notin \operatorname{supp}(T * S)$.

Continuando con la demostración del Teorema 1.24 (Ver Teorema 1.2 Cap-6 [1])

Consideramos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ compactos de Ω tales que

- $K_i \subseteq \operatorname{Int}(K_{i+1}) \quad \forall i \in \mathbb{N}$
- $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i = \Omega$
- $\forall K \subseteq \Omega$ compacto, existe $i_K \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq K_i$

Así, podemos construir $\chi_i \in D^\infty(\operatorname{Int}(K_{i+1}))$ tal que $\chi_i = 1$ sobre K_i. Por otro lado, podemos considerar $\theta \in D^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\operatorname{supp}(\theta) \subseteq B(0,1), \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \theta \, dx = 1 \qquad 0 \leq \theta \leq 1.$$

tomando $\theta_i(x) = i^n \theta(ix)$, entonces para un i suficientemente grande tenemos que

$$\operatorname{supp}(\chi_i) + \operatorname{supp}(\theta_i) \subseteq \Omega$$

Por otra parte, tenemos que $\chi_i T \in \mathcal{E}'(\Omega) \subseteq \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. Tomando

$$T_j = (\chi_j T) * \theta_j \in D^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Para j suficientemente grande, tenemos que $T_j \in D^\infty(\Omega) \subset D^\infty(\mathbb{R}^N)$

P.D. $T_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} T$ en $D'(\Omega)$

Sea $\varphi \in D^\infty(\Omega)$; mostremos que $\langle T_j, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ cuando $j \to +\infty$.

En efecto, como

$$\langle T_j, \varphi \rangle = \langle (\chi_j T) * \theta_j, \varphi \rangle = \langle \chi_j T, \langle \theta_j, \varphi(x + \cdot) \rangle \rangle$$

luego, como

$$\langle \theta_j, \varphi(x+\cdot) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \theta(z) \varphi(x+z) \, dz = (\check{\theta}_j * \varphi)(x) \qquad \text{con } \check{\theta}_j(x) = \theta_j(-x).$$

Por lo anterior
$$\langle T_j, \varphi\rangle = \langle T, \chi_j(\check{\theta}_i * \varphi)\rangle$$
así, bastaría mostrar que
$$\chi_j(\check{\theta}_i * \varphi) \xrightarrow[j\to+\infty]{} \varphi \quad \text{en } D^\infty(\Omega).$$
En efecto, como
$$\operatorname{supp}(\check{\theta}_i * \varphi) \subseteq \operatorname{supp}(\varphi) + \overline{B}(0, 1/j) = K_j$$
para j_0 suficiente grande, se tiene que
$$K = K_{j_0} \subseteq \Omega$$
nuevamente para $\hat{j}_0$ suficientemente grande tal que $\hat{j}_0 \geq j_0$ y $\chi_j = 1$ en K_{j_0} entonces se sigue que, para $j \geq \hat{j}_0$, notando $K = K_{j_0}$, se sigue que
$$\operatorname{supp}(\chi_j(\check{\theta}_j * \varphi)) \subseteq \operatorname{supp}(\check{\theta}_j * \varphi) \subseteq K$$
Así, mostremos que
$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \qquad (\partial^\alpha(\check{\theta}_j * \varphi))_{j\geq \hat{j}_0} \text{ converge uniformemente a } \partial^\alpha\varphi \text{ en } K$$
En efecto, notemos que
$$\begin{aligned}
\partial^\alpha(\check{\theta}_j * \varphi)(x) - \partial^\alpha\varphi(x) &= \check{\theta}_j * \partial^\alpha\varphi(x) - \partial^\alpha\varphi(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \check{\theta}_j(x-y)\,\partial^\alpha\varphi(x)\,dx - \partial^\alpha\varphi(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \theta_j(-z)\,\partial^\alpha\varphi(x-z)\,dz - \int_{\mathbb{R}^n}\theta_j(-z)\,dz\,\partial^\alpha\varphi(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \theta_j(-z)\left(\partial^\alpha\varphi(x-z) - \partial^\alpha\varphi(x)\right)dz\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} j^n\theta(-jz)\left(\partial^\alpha\varphi(x-z) - \partial^\alpha\varphi(x)\right)dz
\end{aligned}$$
Tomando el cambio $\omega = -jz$, se tiene que de lo anterior
$$\int_{\mathbb{R}^n} j^n\theta(-jz)(\partial^\alpha\varphi(x-z) - \partial^\alpha\varphi(x))\,dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \theta(\omega)\left(\partial^\alpha\varphi\left(x + \frac{\omega}{j}\right) - \partial^\alpha\varphi(x)\right)d\omega$$
$$\leq \frac{\|\nabla\partial^\alpha f\|_\infty}{j}\int |y|\,dy \leq \frac{C}{j}\|\partial^{\alpha+1}f\| \longrightarrow 0$$

Capítulo 2: Espacio de las funciones a decaimiento rápido (Espacio de Schwarz).

Definición 2.1. Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, decimos que f es a decaimiento rápido o que pertenece al espacio de Schwarz si verifica que:

1) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ multi-índices $\quad \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < +\infty$.

Observaciones:

1) Al espacio de las funciones a decaimiento rápido se lo conoce como el espacio de Schwarz y se lo nota como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio vectorial de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

3) A la cantidad $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|$ se lo conoce como la semi-norma de Schwarz y se lo notará $\rho_{\alpha,\beta}$.

4) Sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se puede dar la topología más pequeña que haga continuas las semi-normas $(\rho_{\alpha,\beta})_{\alpha\in\mathbb{N}^n, \beta\in\mathbb{N}^n}$ y dicha topología es metrizable

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_{\alpha_n,\beta_n}(f-g)}{1+\rho_{\alpha_n,\beta_n}(f-g)}$$

En esta parte del curso, utilizaremos las siguientes desigualdades

1) Sea $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ y $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$ $\quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}$

Existe $C_{n,\alpha}>0$ una constante que depende únicamente de α y n (la dimensión) tal que

$$|x^\alpha| \le C_{n,\alpha}|x|^{|\alpha|} \quad \forall x\in\mathbb{R}^n. \quad \text{(Ver Grafoaos)}$$

La desigualdad contraria no se tiene, pero se tiene lo siguiente

Dado $k\in\mathbb{N}$ $\exists C_{n,k}>0$ tal que

$$|x|^k \le C_{n,k}\sum_{|\beta|=k}|x^\beta|$$

Ejemplos:

1) Sea $f(x)=e^{-|x|} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ya que no es diferenciable continuamente

P.D. $\forall \alpha\in\mathbb{N}^n$, $\forall\beta\in\mathbb{N}^n$ $\quad \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha\partial^\beta e^{-|x|}|<+\infty$.

En primer lugar, notemos que $\partial^\beta(e^{-|x|}) = P(x)e^{-|x|}$ donde $P(x)$ es un polinomio de x así

$$|x^\alpha\partial^\beta(e^{-|x|})| = |x^\alpha P(x)e^{-|x|}| \qquad \lim_{|x|\to+\infty} x^\alpha P(x)e^{-|x|}=0.$$

2) Sea $\beta=(0,\dots,0)$ y $|\alpha|>3$, entonces

$$\left|\frac{1}{1+|x|^2}x^\alpha\right| = \left|\frac{x^\alpha}{1+|x|^2}\right| = \frac{|x^\alpha|}{1+|x|^2} \longrightarrow +\infty \quad \text{cuando } |y|\to+\infty.$$

Miércoles, 31 de enero de 2024.

Las funciones en el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tienen interesantes propiedades tanto en regularidad ($C^\infty(\mathbb{R}^n)$) como en integrabilidad (por el decaimiento rápido). Sobre el espacio de Fréchet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tenemos la siguiente convergencia.

Definición 2.2. Sea $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Decimos que φ_k converge a φ si

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n \quad p_{\alpha,\beta}(\varphi_k - \varphi) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Esta convergencia la notaremos como $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \varphi$

Observaciones:

a) $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \varphi$ si y solo si para la métrica inducida d, se tiene que $d(\varphi_k, \varphi) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Sabemos que $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En efecto, si $\varphi \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$ existe $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto tal que $\operatorname{supp}(\partial^\beta\varphi) \subset K$. Así

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| = \sup_{x\in K} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|.$$

con lo que se sigue el resultado.

c) Si $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que convergen en $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

En efecto, consideremos $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que converja en $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces existe $\varphi \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\Rightarrow$ Existe K compacto tal que $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$ y $\forall \beta \in \mathbb{N}^n$ $\partial^\beta \varphi_n$ converge uniformemente a $\partial^\beta\varphi$.

P.D. $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n \quad p_{\alpha,\beta}(\varphi_n - \varphi) \to 0$. cuando $n \to +\infty$.

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi_n - \varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta (\varphi_n - \varphi)(x)| = \sup_{x\in K} |x^\alpha| \sup_{x\in K} |\partial^\beta(\varphi_n - \varphi)(x)| \le M \sup_{x\in K} |\partial^\beta(\varphi_n - \varphi)(x)| \to 0$$

d) Más aún, notemos que $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ($e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $e^{-|x|^2} \notin \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$)

e) La recíproca de c) es falsa. En efecto, si consideramos $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} \exp\left(-\frac{1}{1 - |t|^2/n^2}\right) & \text{si } |t| \le n \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

El siguiente lema nos permite caracterizar el decaimiento rápido de otra forma.

Lema 2.3. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si y solo si se tienen las siguientes condiciones

a) $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

b) $\forall N \in \mathbb{N}\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n\ \exists C_{N,\alpha,\varphi} > 0$ tal que

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \le C_{N,\alpha,\varphi}(1 + |x|)^{-N}.$$

Demostración

$\Rightarrow$ Supongamos $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ y consideramos $N \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$, entonces

$$
\begin{aligned}
|\partial^\alpha \varphi(x)| = |\partial^\alpha \varphi(x)| \frac{(1+|x|)^N}{(1+|x|)^N} &\leq C_{N,m} \frac{|\partial^\alpha \varphi(x)|\,(1+|x|^N)}{(1+|x|)^N} \\
&= \frac{C_N}{(1+|x|)^N}\left(p_{0,\alpha}(\varphi) + \partial^\alpha \varphi(x)\,|x|^N\right) \\
&\leq \frac{C_N}{(1+|x|)^N}\left(p_{0,\alpha}(\varphi) + |\partial^\alpha \varphi(x)| \sum_{\substack{|\beta|=N \\ \beta\in\mathbb{N}^n}}' |x^\beta|\right) \\
&\leq \frac{C_N}{(1+|x|)^N}\left(p_{0,\alpha}(\varphi) + \sum_{\substack{|\beta|=N \\ \beta\in\mathbb{N}^n}} p_{\beta,\alpha}(\varphi)\right) \\
&= \frac{\tilde{C}_{N,\alpha,\varphi}}{(1+|x|)^N}
\end{aligned}
$$

$\Leftarrow$ Supongamos que φ verifica a) y b). P.D. $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Mostremos b), en efecto, sea $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ P.D $p_{\alpha,\beta}(\varphi) < +\infty$.

Notemos que, para $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| &\leq C_\alpha |x|^{|\alpha|} |\partial^\beta \varphi(x)| \\
&\leq C_\alpha C_{N,\alpha,\varphi} (1+|x|)^{-N} |x|^{|\alpha|} \\
&\leq C_{\alpha,\beta,N,\varphi} \frac{|x|^{|\alpha|}}{(1+|x|)^N} \leq C_{\alpha,\beta,N,\varphi} \quad \text{con } N \geq |\alpha|
\end{aligned}
$$

tomando el supremo, se sigue lo requerido.

Proposición 2.4 a) Para todo $p \in [1,+\infty]$ $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$

b) Para todo $p \in [1,+\infty[$ $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(C^k(\mathbb{R}^n))$

Demostración

Sea $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^p \leq (C_{N,\varphi})^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|)^{Np}} &\leq (C_{N,\varphi})^p \left(\int_{B(0,1)} \frac{1}{(1+|x|)^{N\cdot p}} + \int_{B(0,1)^c} \frac{1}{(1+|x|)^{N\cdot p}} \right) \\
&\leq (C_{N,\varphi})^p \left(C + \int_{B(0,1)^c} \frac{1}{|x|^{Np}} \right)
\end{aligned}
$$

Así, cuando $-Np < -n$, es decir $N > n/p$, se sigue la integrobilidad y por lo tanto, el resultado.

Lunes, 5 de febrero de 2024

Sección: Transformada de Fourier en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

La transformada de Fourier es una herramienta importante dentro del análisis armónico y las EDP. La razón por la cual empezamos nuestro estudio de la TF en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es por las propiedades de decaimiento rápido de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ para que la TF esté bien definida y las propiedades de regularidad de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ nos permitirán trabajar las derivadas de una forma algebraica a partir de la TF.

Definición 2.5 (Transformada de Fourier)

Definimos la transformada de Fourier de f, notada por $\hat{f}$ como
$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\cdot \xi} f(x)\, dx \qquad \text{con} \quad x\cdot\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$$

Observación: La transformada de f está bien definida para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

- La TF es lineal y en lo siguiente mostraremos que es secuencialmente continua de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 2.6. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\|\hat{f}\|_{L^\infty_\xi(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$

Observación:
- Por lo anterior, podemos concluir que para que la TF esté definida en todo $\xi\in\mathbb{R}^n$ hace falta únicamente que $f\in L^1(\mathbb{R})$
- La transformada de fourier también se nota $\mathcal{F}f$.
- La función
$$\begin{aligned} \mathcal{F}: L^1 &\longrightarrow L^\infty \\ \varphi &\longmapsto \mathcal{F}\varphi = \hat{\varphi} \end{aligned}$$
es lineal y continua.

Ejemplo:

Sea $h(x) = e^{-\pi|x|^2}$, entonces $h = \hat{h}$

En primer lugar, notemos que $\forall j \in \{1,\dots,n\}$ y $x_j \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x_j+it)^2}\, dx_j \end{aligned}$$
es una función constante. En efecto,
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(t) &= \int_{\mathbb{R}} -2\pi i(x_j+it)\, e^{-\pi(x_j+it)^2}\, dx_j \\ &= i\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx_j}\left(e^{-\pi(x_j+it)^2}\right) dx_j \end{aligned}$$
entonces, para todo $t\in\mathbb{R}$ $\varphi(t) = \varphi(0) = 1$. Por lo tanto,
$$\begin{aligned} \hat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\sum_{j=1}^n x_j^2 - 2\pi i\sum_{j=1}^n x_j\xi_j}\, dx \\ &= \prod_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_j^2 - 2\pi i x_j\xi_j}\, dx_j \end{aligned}$$
Ahora, utilizando el hecho de que $-(\sqrt{\pi}x_j + \sqrt{\pi}i\xi_j)^2 - \pi\xi_j^2 = -\pi x_j^2 - 2\pi i x_j\xi_j$, junto con lo anterior, nos da que
$$\hat{h}(\xi) = \prod_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x_j+i\xi_j)^2 - \pi\xi_j^2}\, dx_j = \prod_{j=1}^{n}\varphi(\xi_j)\, e^{-\pi\xi_j^2} = e^{-\pi|\xi|^2}$$
Este ejemplo será útil en el futuro.

Proposición 2.7. Sean $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $y\in\mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$.

1) $\widehat{\tilde{\varphi}}(\xi) = \tilde{\hat{\varphi}}(\xi)$ con $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$
2) $\widehat{\bar{\varphi}}(\xi) = \overline{\tilde{\hat{\varphi}}}(\xi)$ con $\bar{\varphi}$ la función conjugada de φ

3) $\widehat{\tau_y(\varphi)}(\xi) = e^{-2\pi i y\xi}\hat{\varphi}(\xi)$ con $\tau_y\varphi = \varphi(\cdot - y)$

4) $\left(\widehat{e^{2\pi i(\cdot)y}\varphi}\right) = \tau_y(\hat{\varphi})(\xi)$

5) $\hat{\varphi}_\lambda(\xi) = \lambda^{-n}\hat{\varphi}_{\frac{1}{\lambda}}(\xi)$.

Demostración

1) $\hat{\tilde{\varphi}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\xi}\varphi(-x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\xi}\varphi(x)\,dx = \hat{\varphi}(-\xi) = \tilde{\hat{\varphi}}(\xi)$

2) $\hat{\bar{\varphi}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\xi}\bar{\varphi}(x)\,dx = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\xi}\varphi(x)\,dx} = \bar{\tilde{\hat{\varphi}}}(\xi)$

3) $\widehat{\tau_y(\varphi)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\xi}\varphi(x-y)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x+y)\xi}\varphi(x)\,dx$

$= e^{-2\pi i y\xi}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\xi}\varphi(x)\,dx = e^{-2\pi i y\xi}\hat{\varphi}(\xi)$

4) $\left(\widehat{e^{2\pi i x y}\varphi(x)}\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x y}\varphi(x)\,e^{-2\pi i x\xi}\,dx$

$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x(\xi - y)}\varphi(x)\,dx$

$= \hat{\varphi}(\xi - y) = \tau_y\hat{\varphi}(\xi)$

5) $\hat{\varphi}_\lambda(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\xi}\varphi(\lambda x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \frac{x}{\lambda}\xi}\varphi(x)\lambda^{-n}\,dx = \lambda^{-n}\hat{\varphi}_{\frac{1}{\lambda}}(\xi)$

Proposición 2.8. (Identidad de Parseval)

Sean $\varphi, \Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\varphi}\Psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}}\varphi\hat{\Psi}(x)\,dx.$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\varphi}(\xi)\Psi(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\xi x}\varphi(x)\,dx\;\Psi(\xi)\,d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\xi x}\varphi(x)\Psi(\xi)\,dx\,d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\xi x}\varphi(x)\Psi(\xi)\,d\xi\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\xi x}\Psi(\xi)\,d\xi\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\hat{\Psi}(x)\,dx$$

Observación: Notemos que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\partial^\alpha\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y por lo tanto, podemos definir la transformada de Fourier de $\partial^\alpha\varphi$.

Proposición 2.9. a) $\widehat{\partial_x^\alpha\varphi}(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha\hat{\varphi}(\xi)$

b) $\left((-2\pi i(\cdot)\xi)^\alpha\varphi\right)^\wedge(\xi) = \partial_\xi^\alpha\hat{\varphi}(\xi)$

Demostración

a) $\widehat{\partial_x^\alpha \varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\xi} \partial_x^\alpha \varphi(x)\, dx$

$= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, \partial_x^\alpha \left(e^{-2\pi i (x\xi)}\right) dx$

$= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \left(-2\pi i \xi\right)^\alpha e^{-2\pi i x\xi}\, dx$

$= (2\pi i \xi)^\alpha \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, e^{-2\pi i x\xi} dx$

$= (2\pi i x \xi)^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$

b) $\partial_\xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = \partial_\xi^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, e^{-2\pi i x\xi}\, dx \right)$

$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, \partial_\xi^\alpha e^{-2\pi i x\xi}\, dx$

$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \left(-2\pi i x\right)^\alpha \partial_\xi^\alpha e^{-2\pi i x\xi}\, dx$

$= \left(\left(-2\pi i (\cdot)\right)^\alpha \varphi\right)^\wedge(\xi)$

Observación: La propiedad anterior, nos indica lo siguiente:

a) Un problema de ecuaciones en derivadas parciales en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se transforma en un problema algebraico a partir de la transformada.

Por ejemplo:

$$\widehat{\Delta\varphi}(\xi) = -(+2\pi)^2 |\xi|^2 \hat{\varphi}(\xi)$$

b) Una ecuación algebráica en la variable x es transformada en una EDP en la variable ξ

Teorema 2.10 $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es una biyección secuencialmente continua en ambas sentidas.

Con lo anterior, es posible definir la transformada inversa $\mathcal{F}^{-1}$. $\checkmark$

- $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \iff \hat{\varphi}_n \to \hat{\varphi}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
- $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \iff \check{\varphi}_n \to \check{\varphi}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Miércoles, 7 de febrero de 2024

Demostración (Teorema 2.10)

Para demostrar el Teorema 2.10 utilizaremos los siguientes resultados

Lema: Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Primero, mostremos que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Así, por lo anterior

$$\partial_\xi^\alpha \hat{\varphi} = \left(\left(-2\pi i (\cdot)\right)^\alpha \varphi\right)^\wedge \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Ahora, para demostrar que $\partial_\xi^\alpha \hat{\varphi}$ es continua usaremos el siguiente resultado.

Proposición 2.11 a) $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$

b) $\hat{f}$ es uniformemente continua.

Demostración (Proposición 2.11)

Sea $\varepsilon>0$, mostremos que existe $\delta=\delta(\varepsilon,f)>0$ tal que

$$\forall \xi\in\mathbb{R}^n \qquad |\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)|<\varepsilon \quad \text{cuando} \quad |h|<\delta.$$

Entonces

$$|\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)| \leq \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(\xi+h)x} f(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} f(x)\,dx\right|$$
$$= \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\left(e^{-2\pi i \xi x} e^{-2\pi i h x} - e^{-2\pi i \xi x}\right)dx\right|$$
$$= \left|\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x}\left(e^{-2\pi i h x}-1\right)dx\right|$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,|e^{-2\pi i h x}-1|\,dx$$

Note que para todo $x\in\mathbb{R}^n$ $\lim\limits_{h\to 0} |f(x)|\,|e^{-2\pi i x h}-1|$, entonces, por el teorema de convergencia dominada ($|f(x)|\,|e^{-2\pi i x h}-1| \leq |f(x)|\,|e^{-2\pi i x h}| + |f(x)| \leq 2|f(x)|$

$$\lim_{h\to 0}\int |f(x)|\,|e^{-2\pi i h x}-1|\,dx = 0 \Rightarrow \exists\delta>0 \text{ tal que } |\delta|<\delta \Rightarrow \int |f(x)|\,|e^{-2\pi i x h}-1|\,dx$$

Así, como $\partial_\xi^\alpha \hat{f}((-2\pi i(\cdot))^\alpha f)^\wedge$ entonces $(2\pi i x)^\alpha f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$

- $\hat{f}$ es a decaimiento rápido.

Sean $\alpha.\beta\in\mathbb{N}^n$, i.e.

$$P_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{f}(\xi)| < +\infty \qquad \forall \alpha.\beta\in\mathbb{N}^n$$

Para esto, notemos que

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{f} = \xi^\alpha((-2\pi i(\cdot))^\beta f)^\wedge = \xi^\alpha \int_{\mathbb{R}} (-2\pi i x)^\beta f(x) e^{-2\pi i x \xi}\,dx \rightarrow$$

$$\rightarrow = \xi^\alpha(-2\pi i)^{|\beta|}\int_{\mathbb{R}^n} x^\beta f(x) e^{-2\pi i x \xi}\,dx$$
$$= \frac{(-2\pi i \xi)^\alpha}{(-2\pi i)^{|\alpha|}}(-2\pi i)^{|\beta|}\int_{\mathbb{R}} \Psi_\beta(x)\, e^{-2\pi i x \xi}\,dx \quad \text{con} \quad \Psi_\beta = x^\beta f(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$
$$= \frac{(-2\pi i)^{|\beta|}}{(-2\pi i)^{|\alpha|}}(2\pi i \xi)^\alpha \hat{\Psi}_\beta(\xi)$$

Por lo tanto,

$$|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta f| \leq C_{\beta,\alpha}\,|(2\pi i \xi)^\alpha \hat{\Psi}_\beta(\xi)| \leq C_{\beta\alpha}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha \Psi_\beta| \leq \|\partial^\alpha \Psi_\beta\|_{L^1}$$

Proposición 2.12. Sean $\varphi,\Psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces:

a) $\varphi * \Psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

b) $(\varphi*\Psi)^\wedge = \hat{\varphi}\hat{\Psi}$.

Demostración

a) Por propiedades de la convolución y por la regularidad de φ y Ψ, tenemos que

$$\partial^\alpha(\varphi * \Psi) = \partial^\alpha\varphi * \Psi = \varphi * \partial^\alpha \Psi$$

por lo tanto, $\varphi * \Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mostremos que $\varphi * \Psi$ es a decaimiento rápido.

P.D. $(\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n)(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\exists C>0)$ tal que

$$(1+|x|)^N \partial^\alpha(\varphi*\Psi)(x) \leq C_{N,\varphi,\Psi,\alpha,n}$$

En efecto, notemos que

$$\begin{aligned}
&(1+|x|)^N|\partial^\alpha(\varphi*\Psi)(x)| \\
&= (1+|x|)^N(\partial^\alpha\varphi * \Psi)(x) \\
&\leq (1+|x|)^N \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)||\Psi(y)|dy \\
&\leq C_N(1+|x|^N)\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x-y)||\Psi(y)|dy \\
&\leq C_N\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x-y)||\Psi(y)|dy + C_N|x|^N\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x-y)||\Psi(y)|dy \\
&\leq C_N\left(p_{0,\alpha}(\varphi)\|\Psi\|_{L^1} + |x|^N\int_{\mathbb{R}}|\partial^\alpha\varphi(x-y)\Psi(y)|dy\right) \\
&\leq C_N\left(p_{0,\alpha}(\varphi)\|\Psi\|_{L^1} + \int_{\mathbb{R}^n}(|x-y|^N+|y|^N)|\partial^\alpha\varphi(x-y)\Psi(y)|dy\right) \quad \text{(Minkowsky)} \\
&= C_N\Big(p_{0,\alpha}(\varphi)\|\Psi\|_{L^1} + \int_{\mathbb{R}^n}|x-y|^N|\partial^\alpha\varphi(x-y)||\Psi(y)|dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n}|y|^N|\Psi(y)||\partial^\alpha\varphi(x-y)|dy\Big) \\
&= C_N\left(p_{0,\alpha}(\varphi)\|\Psi\|_{L^1} + p_{N,\alpha}(\varphi)\|\Psi\|_{L^1} + p_{N,\alpha}(\Psi)\|\partial^\alpha\varphi\|_{L^1}\right) < +\infty
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi*\Psi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}(\varphi*\Psi)(x)e^{-2\pi i x\xi}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)\Psi(y)dy\, e^{-2\pi i x\xi}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)\Psi(y)e^{-2\pi i x\xi}dy\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)\Psi(y)e^{-2\pi i x\xi}dx\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\Psi(y)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)e^{-2\pi i x\xi}dx
\end{aligned}$$

$x-y=z$
$dx=dz$ $\quad x=z+y$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n}\Psi(y)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(z)e^{-2\pi i(z+y)\xi}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\Psi(y)e^{-2\pi i y\xi}\,\hat{\varphi}(\xi)dx \\
&= \hat{\Psi}(\xi)\hat{\varphi}(\xi)
\end{aligned}$$

Tercero - Transformada inversa de Fourier en Schwartz

Consideramos $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, definimos la transformada inversa de Fourier como

$$\check{\varphi}(x) = \hat{\varphi}(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \xi} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Note que $\check{\varphi} = \tilde{\hat{\varphi}}$ y además $\check{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 2.13. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(x) = (\hat{\varphi})^\vee(x) = (\check{\varphi})^\wedge(x).$$

Demostración

P.D. $\varphi(x) = (\hat{\varphi})^\vee(x)$

$$(\hat{\varphi})^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) e^{2\pi i x \xi}\, d\xi.$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \xi} \hat{\varphi}(\xi) e^{-\pi \varepsilon^2 |\xi|^2} d\xi. \qquad \text{Por convergencia dominada.}$$

Por otro lado, como

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) e^{2\pi i \xi x} e^{-\pi |\varepsilon \xi|^2}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}\, \Psi_\varepsilon(\xi)\, d\xi \qquad \text{donde } \Psi_\varepsilon(\xi) = e^{2\pi i x \xi} e^{-\pi |\varepsilon \xi|^2}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \hat{\Psi}_\varepsilon(\xi)\, d\xi \qquad \text{Identidad de Parseval.}$$

Por otro lado, como

$$\hat{\Psi}_\varepsilon(\xi) = [e^{2\pi i (\cdot) x} e^{-\pi |\varepsilon \cdot|^2}]^\wedge(\xi) = [\tau_x(e^{-\pi |\varepsilon \cdot|^2})]^\wedge(\xi) \qquad \text{traslación}$$

$$= [(e^{-\pi |\cdot|^2})_\varepsilon]^\wedge(\xi - x) \qquad \text{homotecia}$$

$$= \varepsilon^{-n} (e^{-\pi |\cdot|^2})^\wedge \left(\frac{\xi - x}{\varepsilon}\right)$$

$$= \varepsilon^{-n} e^{-\pi \left|\frac{\xi - x}{\varepsilon}\right|^2} \qquad \text{Su transformada es igual a la función}$$

$$= \gamma_\varepsilon(\xi - x)$$

Por lo tanto, junto con lo anterior

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) \Psi(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \varepsilon^{-n} e^{-\pi \left|\frac{x - \xi}{\varepsilon}\right|^2} d\xi = (\varphi * \gamma_\varepsilon)(x)$$

Entonces, se tiene que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} (\varphi * \gamma_\varepsilon)(x) = \varphi(x).$$

Así,

$$\check{\hat{\varphi}}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) e^{2\pi i x \xi} e^{-\pi \varepsilon^2 |\xi|^2} d\xi = \lim_{\varepsilon \to 0} (\varphi * \gamma_\varepsilon)(x) = \varphi(x).$$

Faltaría mostrar que

$$\check{\hat{\varphi}}(x) = \hat{\check{\varphi}}(x) \quad \Rightarrow \quad \check{\hat{\varphi}} = \hat{\tilde{\varphi}} = \hat{\tilde{\hat{\varphi}}} = \hat{\check{\varphi}}$$

Proposición 2.14. Sean $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

a) $(\partial^\alpha \varphi)^\vee(x) = (-2\pi i x)^\alpha \check{\varphi}(x)$

b) $(\varphi \Psi)^\vee(x) = (\check{\varphi} * \check{\Psi})(x)$

c) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\Psi}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(x)\overline{\hat{\Psi}}(x)\,dx$ Parseval

d) $\|\hat{\varphi}\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$ Identidad de Plancherel

e) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\Psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(x)\check{\Psi}(x)\,dx.$

Lunes, 19 de febrero de 2024.

Corrección de la prueba.

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $|g(x)| \leq \frac{C_N}{1+|x|^\alpha}$ $\quad f * g \notin S(\mathbb{R}^n)$

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$|f(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^\alpha} \qquad |g(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^\beta} \qquad |f * g(x)| \leq \frac{1}{1+|x|^{\min\{\alpha,\beta\}}}$$

Capítulo 3: Distribuciones temperadas. $S'(\mathbb{R}^n)$.

Definición 3.1. Sea $S(\mathbb{R}^n)$ el espacio de Schwartz definimos el espacio de distribuciones temperadas, notado como $S'(\mathbb{R}^n)$ el espacio dual topológico. Así, si $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$S : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$$

lineal y además si $\varphi_n \to \varphi$ en $S(\mathbb{R}^n)$ cuando $n \to +\infty$ entonces

$$S(\varphi_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} S(\varphi) \quad \text{en } \mathbb{C}$$

Proposición 3.2. $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si y solo si existe $C>0$, $m, k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle S, \varphi \rangle| \leq C \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta| \leq k}} p_{\alpha,\beta}(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Ejemplos:

- Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces definimos

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx \qquad \text{con } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Entonces

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_{L^p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{p'} dx \right)^{1/p'} \leq \|f\|_{L^p} \left(\int_{B(0,1)} |\varphi|^{p'} dx + \int_{B(0,1)^c} |\varphi|^{p'} dx \right)^{1/p}$$

$$\leq \|f\|_{L^p} \left(C_n (p_{00}(\varphi))^{p'} + \int_{B(0,1)^c} |\varphi|^{p'} dx \right)^{1/p}$$

$$\leq \|f\|_{L^p}\left(C_n (\rho_{0,0}(\varphi))^{p'} + \int_{B(0,1)^c} \frac{|x|^{\beta p'}}{|x|^{\beta p'}} |\varphi|^{p'}\, dx \right)^{1/p'}$$

$$\leq \|f\|_{L^p}\left(C_n (\rho_{0,0}(\varphi))^{p'} + \sum_{|\alpha|=\beta p'} \left(\rho_{\beta p',0}(\varphi)\right)^{p'} \int \frac{1}{|x|^{\beta p'}}\, dx \right)^{1/p'}$$

$$\leq \|f\|_{L^p}\, C_{n,p'} \left((\rho_{0,0}(\varphi))^{p'} + \sum_{|\alpha|=\beta p'} (\rho_{\beta p',0}(\varphi))^{p'} \right)^{1/p'}$$

Ejemplo 2. $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, en efecto por definición

$$|\langle \delta_0, \varphi\rangle| = |\varphi(0)| \leq \rho_{0,0}(\varphi).$$

Ahora, encontremos $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ tal que $T \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Definamos $f(x) = e^{|x|^2} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ pero $T_f \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en efecto si $\varphi = e^{-|x|^2}$, entonces

$$\langle T_f, \varphi\rangle \to +\infty.$$

por lo tanto, se sigue lo requerido.

Por otro lado si $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ entonces aS no necesariamente está bien definida.

Proposición 3.3. Sea $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $S * \Psi \in S'(\mathbb{R}^n)$ y se define por

$$\langle S * \Psi, \varphi\rangle_{S' \times S} = \langle S, \tilde{\Psi} * \varphi\rangle_{S' \times S}$$

Proposición 3.4. Consideramos $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$|\partial^\alpha h(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|^{k_\alpha})$$

con $k_\alpha > 0$, entonces, se puede definir $\langle Sh, \varphi\rangle = \langle S, h\varphi\rangle$

Demostración 3.3 Notemos que

$$|\langle S * \Psi, \varphi\rangle| = |\langle S, \tilde{\Psi} * \varphi\rangle| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq k}} \rho_{\alpha,\beta}(\tilde{\Psi} * \varphi)$$

por otro lado, notemos que

$$\left| x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\beta \varphi(x-y) \Psi(y)\, dy \right| \leq C_{n,\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha| |\partial^\beta \varphi(x-y)| |\Psi(y)|\, dy$$

$$\leq C_2 \int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha |\partial^\beta \varphi(x-y)| |\Psi(y)|\, dy$$

$$\leq C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \left(|x-y|^{|\alpha|} + |y|^{|\alpha|} \right) |\partial^\beta \varphi(x-y)| |\Psi(y)|\, dy$$

$$\leq C_2 \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{|\alpha|} |\partial^\beta \varphi(x-y)| |\Psi(y)|\, dy + C_2 \int_{\mathbb{R}^n} |y|^\alpha |\partial^\beta \varphi(x-y)| |\Psi(y)|\, dy$$

$$\leq C_2\, \rho_{\alpha,\beta}(\varphi) \int_{\mathbb{R}^n} |\Psi(y)|\, dy + C_2\, \rho_{0,\beta}(\varphi) \int_{\mathbb{R}^n} |y|^\alpha |\Psi(y)|\, dy.$$

$$\leq C_2\left(\rho_{\alpha,\beta}(\varphi)\|\Psi\|_{L^1} + C_\Psi\, \rho_{0,\beta}(\varphi)\right)$$

Por lo tanto,

$$|\langle S*\Psi,\varphi\rangle| \leq \widetilde{C}_\Psi \sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|\leq k}}' \left(\rho_{\alpha,\beta}(\varphi)+\rho_{0,\beta}(\varphi)\right) \leq \widehat{C}_\Psi \sum_{\substack{|\alpha|\leq m\\|\beta|\leq k}}' \rho_{\alpha,\beta}(\varphi).$$

Demostración (Proposición 3.4)

Mostremos que $h\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$. En efecto, es claro que $h\varphi\in C^\infty$, falta mostrar que es a decaimiento rápido.

Para ello, sea $N\in\mathbb{N}$ y $\alpha\in\mathbb{N}^n$, entonces

P.D. $(1+|x|)^N\,|\partial^\alpha(h\varphi)(x)|\leq C_N$

$$\begin{aligned}(1+|x|)^N|\partial^\alpha(h\Psi)(x)| &\leq C_N\,(1+|x|^N)\,|\partial^\alpha(h\varphi)(x)|\\ &\leq C_N(1+|x|^N)\sum_{\beta\leq\alpha}'\binom{\alpha}{\beta}|\partial^\beta h(x)\partial^{\alpha-\beta}\varphi(x)|\\ &\leq C_N(1+|x|^N)\sum_{\beta\leq\alpha}'\binom{\alpha}{\beta}C_\beta\,(1+|x|^{K_\beta})\,|\partial^{\alpha-\beta}\varphi(x)|\\ &\leq C_N\sum_{\beta\leq\alpha}'\binom{\alpha}{\beta}C_\beta|\partial^{\alpha-\beta}\varphi(x)| + C_N\sum_{\beta\leq\alpha}'\binom{\alpha}{\beta}|x|^{N+K_\beta}|\partial^{\alpha-\beta}\varphi(x)|\end{aligned}$$

Miércoles, 21 de febrero de 2024.

Revisión del ejercicio de la prueba.

Si $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $g\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $|g(x)|\leq\dfrac{C_\beta}{(1+|x|)^\beta}$ $\quad\beta>n$

Como $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha>n$, existe $D_\alpha>0$ tal que

$$|f(x)|\leq\frac{D_\alpha}{(1+|x|)^\alpha}\qquad\forall x\in\mathbb{R}^n$$

Sea $x\in\mathbb{R}^n$ arbitrario pero fijo

$$|f*g(x)|\leq\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|\,dy\leq D_\alpha C_\beta\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x-y|)^{-\alpha}(1+|y|)^{-\beta}\,dy$$

$$= D_\alpha C_\beta\left(\int_{\{y:\,|x-y|\geq|x|/2\}}(1+|x-y|)^{-\alpha}(1+|y|)^{-\beta}\,dy + \int_{\{y:\,|x-y|\leq|x|/2\}}(1+|x-y|)^{-\alpha}(1+|y|)^{-\beta}\,dy\right)$$

con lo que por la forma de los conjuntos,

$$|f*g(x)|\leq\frac{C_{\alpha,\beta,n}\,2^\alpha}{(2+|x|)^\alpha}+\frac{\widehat{C}_{\alpha,\beta,n}\,2^\beta}{(2+|x|)^\beta}\leq\widetilde{C}\,\frac{1}{(2+|x|)^L}\quad\text{con } L=\min\{\alpha,\beta\}$$

Con esto, si f estuviera en Schwartz, entonces para $N>L$, se tiene que

$$|x^N f*g(x)|\leq \underset{\substack{\uparrow\\ \text{constante}}}{D}\;\frac{x^N}{|x|^L}\implies\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^N f*g(x)|\to+\infty$$

lo cual es una contradicción.

Transformada de Fourier de distribuciones temperadas

Sea $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, definimos la transformada de Fourier y transformada de Fourier inversa como

$$\langle \hat{S}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \langle S, \hat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} \quad \text{y} \quad \langle \check{S}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \langle S, \check{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}$$

Una observación interesante es la siguiente:

Se conoce que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset D'(\mathbb{R}^n)$ y $D^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto es natural preguntarse si se puede extender la transformada de Fourier a las distribuciones en general $(D'(\mathbb{R}^n))$

La respuesta a lo anterior es negativa pues si fuera cierto, considerando $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ de la siguiente forma

$$\langle T, \varphi \rangle_{D' \times D} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi |x|^2} \varphi(x)\, dx$$

Así, tendríamos que $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle$ con lo cual

$$\langle T, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi |\xi|^2} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi \qquad \forall \varphi \in D^\infty(\mathbb{R}^n)$$

En particular, si consideramos $\varphi(x) = \theta(x) e^{-\pi |x|^2}$ donde $\theta \in D^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\theta > 0$. Así,

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi |\xi|^2} \left(\hat{\theta} * e^{-\pi |\cdot|^2} (\xi) \right) d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi |\xi|^2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}(\eta) e^{-\pi |\xi - \eta|^2} d\eta \right) d\xi$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi |\xi|^2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}(\eta) e^{-\pi |\xi|^2 - \pi |\eta|^2} d\eta \right) d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi |\xi|^2 - \pi |\xi|} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi |\eta|^2} d\eta \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi |\eta|^2} d\eta\, d\xi.$$

Por lo tanto, el espacio más grande donde «funciona bien» la transformada de Fourier es $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$$
$$S \longmapsto \mathcal{F}S$$

Ejemplos: Sea $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \in [1, +\infty[$, entonces

1) $$\langle T_g, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \varphi(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \langle \hat{T}_g, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \langle T_g, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$$

2) $$\langle \hat{\delta}_{x_0}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \hat{\varphi}(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot x_0} dx \Rightarrow \hat{\delta}_{x_0} = T_f \text{ con } f(x) = e^{-2\pi i x \cdot x_0}.$$

$$\hat{\delta}_0 = 1.$$

- Si $\varphi > 0$, entonces $\langle \hat{\delta}_0, \varphi \rangle = \|\varphi\|_{L^1}$

Proposición 3.5. Consideremos $S, W \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$, entonces

i) $\hat{\tilde{S}} = \widetilde{(\hat{S})}$

ii) $\widehat{\tau^y S} = e^{-2\pi i y \cdot \xi} \hat{S}$

iii) $(e^{2\pi i x \cdot y} S)^\wedge = \tau^y(\hat{S})$

iv) $\hat{S}_\lambda = \lambda^{-n} (\hat{S})_{\frac{1}{\lambda}}$

v) $\widehat{(\partial^\alpha S)} = ((2\pi i \xi)^\alpha \hat{S})$

vi) $\partial^\alpha \hat{S} = ((-2\pi i x)^\alpha S)^\wedge$

vii) $\widehat{(\check{S})} = \check{(\hat{S})} = S$

viii) $\widehat{S * \varphi} = \hat{S} \hat{\varphi}$

ix) $\widehat{S\varphi} = \hat{S} * \hat{\varphi}$

(Ideas)

Dado $W \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ¿existe $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\Delta S = W$?, supongamos que sí, entonces

$$\widehat{\Delta S} = \hat{W} \Rightarrow -2^2\pi^2 |\xi|^2 \hat{S} = \hat{W}$$

$$\Rightarrow \hat{S} = \frac{\hat{W}}{-(2\pi)^2 |\xi|^2} = \underbrace{\frac{1}{-(2\pi)^2 |\xi|^2}}_{g} \hat{W}$$

Si $\Delta S = \delta$, entonces $\hat{S} = g(\xi)$ pues $\hat{\delta} = 1$, entonces $S = \check{g}(\xi)$.

- Si consideramos

$$\partial_t u + \Delta u = 0 \qquad \text{Note que la transformada de Fourier no afecta en el tiempo}$$

$$\Rightarrow \partial_t \hat{u} + |\xi|^2 u = 0$$

En este punto, fijando ξ resolvemos la EDO asociada en la variable temporal.

Sección: Soluciones fundamentales de EDPs en el sentido de distribuciones.

Sea $\mathbb{P} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio de n variables, sobre la base $x_1, x_2, \dots, x_n$ entonces

$$\mathbb{P} = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha x^\alpha \qquad \text{donde} \quad a_\alpha \in \mathbb{C}, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_n} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{N}^n$$

m es el grado de $\mathbb{P}$. Entonces con esto podemos definir un operador diferencial lineal a coeficientes constantes, de la forma

$$\mathbb{P}(D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha (\cdot)$$

Así, si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, entonces $\mathbb{P}(D) T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\mathbb{P}(D) T = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha T$$

Con esto podemos definir la ecuación homogénea asociada $\mathbb{P}(D)$ en $D'(\Omega)$ de la siguiente forma

$$\mathbb{P}(D)\,T = 0 \qquad \text{Ecuación homogénea} \qquad (\text{Queremos encontrar } T)$$

y si $F \in D'(\Omega)$ tal que $F \neq 0$ una ecuación no homogénea asociada a $\mathbb{P}(D)$ es

$$\mathbb{P}(D)\,\hat{T} = F \qquad \text{Ecuación no homogénea}$$

Entonces, se tiene lo siguiente. El espacio de soluciones del problema homogéneo es el vacío o un subespacio vectorial de $D'(\Omega)$.

El espacio de soluciones del problema no homogéneo es el vacío o un subespacio afín, i.e., $\ker(\mathbb{P}) + T_0$ con $T_0 \in D'(\Omega)$ una solución particular del problema no homogéneo.

Definición 3.6. Decimos que $E \in D'(\Omega)$ es una solución fundamental (elemental) del operador diferencial $\mathbb{P}(D)$ si E verifica

Ver 5.4 [2] Pág 191

$$\mathbb{P}(D)\,E = \delta_0$$

en el sentido de distribuciones.

Las soluciones fundamentales de $\mathbb{P}(D)$ se las conoce como función de Green de $\mathbb{P}(D)$

Observaciones

- Si E es una solución fundamental de $\mathbb{P}(D)$, entonces todas las soluciones del problema $\mathbb{P}(D)T = \delta_0$ son de la forma

$$E + \overline{T} \quad \text{con } \overline{T} \text{ solución del problema homogéneo.}$$

Teorema 3.7 Todo operador diferencial lineal a coeficientes constantes tiene una solución fundamental.

Observación: Supongamos que $F \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Consideremos el siguiente problema:

Encontrar $T \in D'(\Omega)$ tal que

$$\mathbb{P}(D) = F$$

entonces si E es una solución fundamental de $\mathbb{P}(D)$, tenemos que $E * F$ es solución problema $\mathbb{P}(D)T = F$. En efecto,

$$\mathbb{P}(D)(E * F) = (\mathbb{P}(D)E * F) = (\delta_0 * F) = F$$

Lunes, 26 de febrero de 2024.

Soluciones fundamentales de una EDP lineal a coeficientes constantes utilizando la transformada de Fourier.

En esta parte del curso, deseamos encontrar la solución fundamental de $-\Delta$ restringido a el espacio de las distribuciones temperadas, i.e., $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Si consideramos $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, deseamos encontrar $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$-\Delta S = \omega \quad \text{en el sentido de las distribuciones temperadas.}$$

Es decir,

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \qquad \langle -\Delta S, \varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = \langle \omega, \varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}}$$

Para ello, empezaremos por encontrar la solución fundamental de $-\Delta$ utilizando la transformada de Fourier. Note que E es dicha solución fundamental de $-\Delta$ si

$$-\Delta E = \delta_0.$$

Aplicando la transformada de Fourier a ambos lados (y con abuso de notación), tenemos que

$$(2\pi)^2 |\xi|^2 \hat{E} = 1 \Rightarrow \hat{E} = \frac{1}{|\xi|^2}\frac{1}{(2\pi)^2}$$

Es por ello que necesitamos analizar la función $|x|^{-z}$ con $z \in \mathbb{R}$.

Observación:

En nuestro caso $|\xi|^{-2} \notin L^p(\mathbb{R}^n)$. En efecto,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-2p}\, d\xi\right)^{1/p} = \left(\underbrace{\int_0^1 \rho^{-2p+n-1}\, d\rho}_{①} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \rho^{-2p+n-1}\, d\rho}_{②}\right)^{1/p}$$

Si $p < \frac{n}{2}$, entonces ② diverge. Análogamente, si $p > \frac{n}{2}$ entonces ① diverge. Ahora, si $p = \frac{n}{2}$, entonces $\int_0^{+\infty} \rho^{-1}\, d\rho \longrightarrow +\infty$ y si $p = +\infty$ $\sup\text{ess}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^{-2} \longrightarrow +\infty$ lo que muestra lo requerido.

Proposición 3.8. Consideremos $F_k(x) = |x|^k$, entonces existe $\Phi_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\langle F_k, \varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} = \langle \Phi_k, \varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}}$$

y satisface que: si $k > -n$, entonces

$$\langle \Phi_k, \varphi\rangle = C_{k,n}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^k \varphi(x)\, dx \quad \text{con} \quad C_{k,n} = \frac{\pi^{\frac{n+k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)} > 0 \quad \text{y } \Gamma \text{ la función gamma.}$$

- $k \leq -n$ y $N \in \mathbb{N}$ el entero más pequeño tal que $k > -N-n-1$, entonces

$$\langle \Phi_k, \varphi\rangle = C_{k,n}\int_{|x|\leq 1} |x|^k \left(\varphi(x) - \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha\right) dx$$
$$+ \sum_{|\alpha|\leq N} b_{k,n,\alpha} \langle \partial^\alpha \delta_0, \varphi\rangle + C_{k,n}\int_{|x|>1} |x|^k \varphi(x)\, dx$$

donde $b_{k,n,\alpha} = \frac{1}{\alpha!}\cdot\frac{1}{k+n+|\alpha|}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \theta^\alpha\, d\theta$ con $\mathbb{S}^{n-1}$ la esfera unitaria en dimensión $n-1$.

Observación:
- En el primer caso $k > -n$ entonces Φ_k está asociada a una función $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$
- En el segundo caso $k < -n$ entonces Φ_k es únicamente una distribución temperada.

Para lo siguiente es necesario que consideremos el siguiente resultado. Si $f(x) = e^{-\pi a|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con $a>0$, entonces $\hat{f}(\xi) = a^{\frac{n}{2}} e^{-\pi\frac{|\xi|^2}{a}}$.

Proposición 3.9. Consideramos $n>2$ y $0<k<n$ y sea F_k la distribución temperada representada por la función L_{loc} $|x|^{-k}$, entonces

Proposición 4.61 [2].

$$\check{F}_k = \frac{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} |x|^{k-n} \pi^{k-\frac{n}{2}} \qquad \text{con } \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

Decimos que S es la transformada de Fourier de $W \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si
$$\langle W, \hat{\varphi} \rangle = \langle S, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$
es decir que $S = \widehat{W}$

Demostración:

En primer lugar, notemos que para todo $r>0$ y para todo $k>0$
$$\int_0^{+\infty} e^{-rt} t^{k-1}\, dt \overset{s=rt}{=} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{k-1} r^{-k}\, ds = r^{-k}\Gamma(k), \text{ entonces}$$
$$r^{-k} = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^{+\infty} e^{-rt} t^{k-1}\, dt$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{k-n}{2}\right)} \int_0 e^{-rt} t^{\frac{k-n}{2}-1} dt$$

tomando $r = \pi|\xi|^2$, tenemos que
$$F_k(\xi) \text{ "=" } |\xi|^{-k} = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\pi|\xi|^2 t} t^{\frac{k}{2}-1}\, dt$$

$$\pi^{\frac{k-n}{2}} |\xi|^{-\frac{k-n}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k-n}{2}\right)} \int^{+} e^{\cdot}$$

Por otro lado,
$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $t>0$
$$\langle e^{-\pi|\xi|^2 t}, \hat{\varphi} \rangle = \langle \widehat{e^{-\pi|\cdot|t}}, \varphi \rangle$$
entonces, utilizando la identidad de Parseval en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|\xi|^2 t} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} t^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi|x|^2 t} \varphi(x)\, dx$$

Ahora, multiplicando a ambos lados por $t^{\frac{k}{2}-1}$ e integrando con respecto a t en $[0,+\infty[$, tenemos que
$$\underbrace{\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|\xi|^2 t} t^{\frac{k}{2}-1} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi\, dt}_{(\mathrm{I})} = \underbrace{\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi t|x|^2} t^{\frac{k-n}{2}-1} \varphi(x)\, dx\, dt}_{(\mathrm{II})}$$

(I) Aplicando Fubini
$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|\xi|^2 t} t^{\frac{k}{2}-1} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi dt = \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{+\infty} e^{-\pi|\xi|^2 t} t^{\frac{k}{2}-1} \hat{\varphi}(\xi)\, dt d\xi$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) |\xi|^{-k} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\pi^{\frac{k}{2}}}\, d\xi$$

$$= \left\langle \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\pi^{\frac{k}{2}}} |\xi|^{-k}, \hat{\varphi} \right\rangle_{S' \times S}$$

(II) Por Fubini, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} e^{-\pi t |x|^2} t^{\frac{k-n}{2}-1} \varphi(x)\, dt\, dx \overset{s=\frac{1}{t}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} e^{-\pi |x|^2 s} s^{-\left(\frac{k-n}{2}-1\right)} \varphi(x) s^{-2}\, ds\, dx$$

$$= \left\langle \frac{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)}{\pi^{\frac{n-k}{2}}} |x|^{k-n}, \varphi \right\rangle$$

entonces $-\widehat{\Delta E} = \hat{\delta}_0$, con lo cual

$$4\pi^2 |\xi|^2 \hat{E} = 1 \implies \hat{E} = \frac{1}{4\pi^2 |\xi|^2}$$

$$E = {}^{\vee}(\hat{E}) = \frac{1}{4\pi^2} \check{F}_2 = \frac{1}{4\pi^2} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \pi^{2-\frac{n}{2}} |x|^{2-n}$$

$$= \frac{1}{4\pi^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) |x|^{2-n}$$

entonces, para el problema $\Delta S = \omega$, la solución está dada por $E * \omega$

Observación: Si $n=2$, E diverge.

No necesariamente la transformada inversa de una distribución temperada tiene una fórmula explícita.

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces sabemos que $\hat{f}$ es uniformemente continua y además $\lim_{|\xi| \to +\infty} f(\xi) = 0$.

Miércoles, 28 de febrero de 2024.

Sección: Operador del calor

En este capítulo, usaremos la notación $(x,t) = (x_1, \ldots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces, se define el operador del calor como

$$L = \partial_t - \Delta_x = \partial_t - \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2$$

Buscamos encontrar $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que

$$\partial_t E - \Delta_x E = \delta_{(0,0)}(x,t) = \delta_0(x) \otimes \delta_0(t).$$

Para el siguiente cálculo, definamos la «Transformada de Fourier»

$$\mathcal{F}_x(\varphi)(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} \varphi(x,t)\, dx \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Entonces, sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, entonces

$$\langle \mathcal{F}_x(\partial_t E - \Delta_x E), \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \langle \mathcal{F}_x \partial_t E, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} - \langle \mathcal{F}_x \Delta_x E, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}$$

$$= -\langle E, \partial_t \mathcal{F}_x \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} - \langle -(2\pi)^2 |\xi| \mathcal{F}_x E, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}$$

$$= \langle \partial_t \mathcal{F}_x E, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} + (2\pi)^2 \langle |\xi| \mathcal{F}_x E, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\mathcal{F}_x(\partial_t E - \Delta_x E) = \partial_t \mathcal{F}_x E + (2\pi)^2 |\xi|^2 \mathcal{F}_x E \quad \text{en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

Fijamos $\xi \in \mathbb{R}^n$, entonces, se tiene la siguiente EDO.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \hat{u}(\xi,t) + 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{\delta}_0 = 1 \end{cases}$$

Entonces, la solución fundamental está dada por

$h_t = u(x,t) = \left(e^{-4\pi^2 |\cdot|^2 t}\right)^{\vee}(x)$ directamente no se puede calcular.

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta_x) u = 0 \\ u(0,s) = u_0 \end{cases} \qquad \hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_0(\xi) e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t}$$

$u = h_t * u_0$

$\exists$ solución.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f \\ u(0,s) = u_0 \end{cases}$$

Para resolver este problema, consideramos

$$\partial_t \hat{u} + (2\pi)^2 |\xi|^2 \hat{u} = \hat{f}$$

$$u(t,\cdot) = h_t * u_0 + \int_0^t h_{t-s} * f(x,s)\, ds \qquad h_t = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{n/2} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}$$

$$\hat{u}(t,\cdot) = \hat{u}_0 \cdot \hat{h}_t + \int_0^t \hat{h}_{t-s}\, \hat{f}(x,s)\, ds$$

Supongamos que $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$, $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int_0^{+\infty} \|u(t,\cdot)\|_{L^2}^2\, dt = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2\, dx\, dt$$

Espacios $H^s(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}|^2\, d\xi = \|u\|_{H^s}^2$$