FACULTAD DE CIENCIAS
INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE DISTRIBUCIONES
APUNTES
Luis Gualavisí, Daniel Lara • 2023-B

ÍNDICE

1. Preliminares

Las siguientes notas corresponden a una recopilación para la introducción a la Teoría de Distribuciones con la finalidad de detallar los fundamentos para la posterior construcción de nuevos objetos matemáticos.

1.1 Notaciones

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ con $N \in \mathbb{N}$ arbitrario y $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ se definen los conjuntos:

$$C^k(\Omega) = \{u\colon \Omega \to \mathbb{C} \,:\, \partial^\alpha u \text{ es continua } \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ |\alpha| \leq k\} \tag{1}$$

$$C^k\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{u \in C^k\left(\overline{\Omega}\right) \,:\, \partial^\alpha u \text{ es unif. continua en acotados } \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ |\alpha| \leq k\right\} \tag{2}$$

1.2 Algunos resultados útiles

Definición 1: Conjunto balanceado.

Sean E un espacio vectorial y $A \subseteq E$. Un conjunto A se dice *balanceado* si $cx \in U$ para todo $x \in U$ con $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| \leq 1$.

Definición 2: Espacio vectorial topológico localmente convexo.

Un espacio vectorial se dice *localmente convexo* si tiene una base de vecindades de 0 que consiste de conjuntos que son convexos, balanceados y absorbentes.

Definición 3: Espacio de Fréchet.

Un espacio vectorial topológico localmente convexo, metrizable y completo se denomina un *espacio de Fréchet*.

● **Observación.** Recuerde que si (X, τ_X) es un espacio topológico y dotamos a $Y \subseteq X$ de la topología inducida por τ_X, entonces $A \subseteq Y$ es compacto en Y si y solo si A es compacto en X.

Teorema 1: Lema de Urysohn.

Sea X un espacio topológico normal[a]. Si A y B son cerrados disjuntos en X, entonces existe $f \in C(X, [0,1])$ tal que $f = 0$ en A y $f = 1$ en B.

[a] Se dice que un espacio topológico es normal si para todo par de cerrados disjuntos existen vecindades abiertas disjuntas que contienen a cada cerrado.

Teorema 2: Partición de la unidad para conjuntos compactos.

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^N$ un compacto y sea $\{O_j\}_{j=1}^M$ un recubrimiento finito abierto de K. Entonces existe una familia finita de C^∞, $\{\phi_j\}_{j=1}^M$ con $\phi_j \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ para todo $j \in \{1, \ldots, M\}$ tales que satisfacen las siguientes propiedades:

1. Para todo $j \in \{1, \ldots, M\}$ el conjunto $\operatorname{supp}(\phi_j) \subseteq O_j$;

2. Para todo $j \in \{1, \ldots, M\}$ se tiene que $0 \leq \phi_j \leq 1$;

3. $\sum_{j=1}^{N} \phi_j(x) = 1$ para todo $x \in K$.

Entonces a la familia $\{\phi_j\}_{j=1}^M$ se la denomina partición de la unidad asociada al recubrimiento $\{O_j\}_{j=1}^M$ de K.

1.3 Topologías inducidas por seminormas

Sea X un espacio vectorial, una función $p \colon X \to \mathbb{R}$ se dice una seminorma si satisface las siguientes propiedades:

1. $p(cx) = |c|p(x)$, para todo $c \in \mathbb{C}$ y para todo $x \in X$. *(Homogeneidad positiva)*

2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para todo $x, y \in X$ *(Subaditividad)*

3. $p(x) \geq 0$ para todo $x \in X$.

4. $p(0) = 0$.

Ahora, si consideramos una familia de seminormas $\mathcal{P}$ sobre X; se dice que es *separada* si para todo $x \in X$ con $x \neq 0$, existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x) \neq 0$.

Dada una familia separada de seminormas $\mathcal{P}$ sobre X, definamos B como la familia de conjuntos de la forma

$$B = \{x \in X \,:\, p(x) < \varepsilon \quad \forall p \in \mathcal{P}_0, \quad \mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}, \quad \mathcal{P}_0 \text{ finito}, \quad \varepsilon > 0\}. \tag{3}$$

Entonces, B es una base de vecindades de 0 de un espacio topológico localmente convexo $(X, \tau_{\mathcal{P}})$, donde $\tau_{\mathcal{P}}$ es denominada *Topología generada por la familia de seminormas $\mathcal{P}$*.

● **Observación.** Si Y es un subespacio vectorial y $P|_Y = \{p|_Y \,:\, p \in \mathcal{P}\}$, entonces la topología inducida en Y por $\tau_{\mathcal{P}}$ coincide con la topología $\tau_{\mathcal{P}|_Y}$.

● **Observación.** Recíprocamente, si X es un espacio vectorial topológico localmente convexo, los funcionales de Minkowski definen una seminorma que genera a la topología del espacio.

1.3.1 Metrizabilidad

Sea $\mathcal{P} = \{p_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una familia contable de seminormas *separada*[1]. La topología generada por esta familia es metrizable con la siguiente métrica

$$d(x,y) = \sum_j 2^{j^{-1}} \frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)} \quad \forall x,y \in X. \tag{4}$$

Más aún, la topología inducia por la métrica anterior τ_d coincide con la topología generada por $\mathcal{P}$.

● **Observación.** Un espacio vectorial topológico que es metrizable y completo se dice *espacio de Fréchet*

1.4 Topología del límite inductivo

Sea X un espacio topológico y $\{X_j\}_{j\in J}$ una familia de subespacios vectoriales de X tal que

$$X = \bigcup_{j\in J} X_j$$

y además, si $j_1, j_2 \in J$ entonces existe $j_3 \in J$ tal que

$$X_{j_1} \subseteq X_{j_3} \qquad \text{y} \qquad X_{j_2} \subseteq X_{j_3}.$$

Más aún, asuma que existen topologías τ_j en cada X_j tales que si $X_{j_1} \subseteq X_{j_2}$, entonces la topología τ_{j_1} es más fina (es más grande o contiene) que la topología $\tau_{j_2 j_1}$ que corresponde a la topología inducida en X_{j_1} por la topología τ_{j_2} de X_{j_2}, es decir

$$\tau_{j_2 j_1} = \tau_{j_2}\big|_{X_1}.$$

Así, si definimos

$$\mathcal{W} = \left\{ W \subseteq X : \begin{array}{l} W \text{ es balanceado,} \\ W \text{ es convexo,} \\ W \cap X_j \text{ es una vecindad de 0 en } X_j \quad \forall x \in \mathbb{N}. \end{array} \right\}$$

entonces $\mathcal{W}$ es una base de vecindades de 0 de una topología τ_{ind} sobre X localmente convexa. A esta topología se la denomina *topología del límite inductivo*.

● **Observación.** Si además se tiene que: para $X_{j_1} \subseteq X_{j_2}$ implica que $\tau_{j_2 j_1} = \tau_{j_1}$, entonces se denomina *topología del límite inductivo estricto*.

[1] Es decir, si $x \in X$ y $p_j(x) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, entonces $x = 0$.

● **OBSERVACIÓN.** Si la topología τ sobre X es la topología del límite inductivo estricto de una sucesión creciente $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces la topología inducida en cada X_n por τ_{ind} coincide con la topología inicial τ_n de cada X_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Topologías en $C^k(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$

2.1 Topologías sobre los espacios $C^k(\Omega)$

Antes de definir una topología apropiada para nuestros propósitos en $C^k(\Omega)$ consideremos el siguiente resultado que nos permite obtener una descomposición de conjuntos compactos crecientes para el abierto Ω en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío. Existe una familia $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ compacta en Ω con las siguientes propiedades:

1. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$
2. Para todo $n \geq 1$, $K_n \subseteq \operatorname{int}(K_{n+1})$
3. $\forall K \subseteq \Omega$ compacto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$K \subseteq K_{n_0} \quad \text{con} \quad K_{n_0} \in (K_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, definamos

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| \leq n\} \cap \left\{x \in \Omega \,:\, d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\right\},$$

donde d la distancia de un punto a un conjunto usual en $\mathbb{R}^n$. Veamos que la función $d(\cdot,\, \Omega^c)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua; mas aún, es Lipschitz continua.

En efecto, sean $z, y \in \mathbb{R}^n$, probemos que

$$|d(z, \Omega^c) - d(y, \Omega^c)| \leq \|z - y\|.$$

Para todo $w \in \Omega^c$, de la desigualdad triangular y la definición de $d(\cdot,\, \Omega^c)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|z - y\| &\geq \|z - w\| - \|y - w\| \\ &\geq d(z, \Omega^c) - \|y - w\|,\end{aligned}$$

de donde,

$$d(z,\, \Omega^c) - \|z - y\| \leq \|y - w\|.$$

Así, nuevamente de la definición de $d(\cdot,\, \Omega^c)$, tenemos

$$d(z,\, \Omega^c) - \|z - y\| \leq d(y,\, \Omega^c),$$

o lo que es lo mismo
$$d(z, \Omega^c) - d(y, \Omega^c) \leq \|z - y\|.$$
De manera similar se prueba que
$$d(y, \Omega^c) - d(z, \Omega^c) \leq \|z - y\|,$$
con lo cual se sigue que es $d(\cdot, \Omega^c)$ Lipschitz continua.

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, K_n es compacto, pues es claro que $K_n \subseteq B(0, n)$ y entonces K_n es acotado. Además, de la continuidad de $d(\cdot, \Omega^c)$ se sigue que
$$\left\{x \in \Omega \,:\, d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\right\},$$
es cerrado. Así, K_n es cerrado pues es la intersección de dos cerrados y entonces K_n es compacto.

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\quad K_n \subseteq \operatorname{int}(K_{n+1})$.
En efecto, dado $n \in \mathbb{N}$, como $n + 1 > n$, de la definición de K_n tenemos que
$$\begin{aligned} K_n &\subseteq \{x \in \Omega : \|x\| < n+1\} \cap \{x \in \Omega : d(x, \Omega^c) > \frac{1}{n+1}\} \\ &\subseteq \operatorname{int}\left(\{x \in \Omega : \|x\| < n+1\} \cap \{x \in \Omega : d(x, \Omega^c) > \frac{1}{n+1}\}\right) \\ &= \operatorname{int}(K_{n+1}). \end{aligned}$$

- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$.
Es claro que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \subseteq \Omega$. Falta probar que $\Omega \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.
Sea $x \in \Omega$ cualquiera, entonces se sigue que $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, ya que caso contrario, si para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \notin K_n$, de la definición de K_n tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$: $x \notin \Omega$ o $d(x\,\Omega^c) < \frac{1}{n}$ o $\|x\| > n$. Si $x \notin \Omega$ llegamos a una contradicción directamente.
Ahora, si $d(x\,\Omega^c) < \frac{1}{n}$ entonces haciendo $n \to +\infty$ tenemos que $d(x\,\Omega^c) = 0$, que junto con el hecho de que Ω^c es cerrado implica que $x \notin \Omega$, lo cual es absurdo.
Luego, si $\|x\| > n$, $\frac{1}{\|x\|} < \frac{1}{n}$, entonces haciendo $n \to +\infty$, concluimos que $\frac{1}{\|x\|} = 0$, o lo que es los mismo que $1 = 0$, lo que es absurdo.
Por lo tanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$.

- Sea $K \subseteq \Omega$ compacto, veamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq K_{n_0}$.
Como K es compacto, este es acotado; es decir, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq n_1\}$. Por otro lado, dado que $d(\cdot, \Omega^c)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua y K es compacto, $d(\cdot, \Omega^c)$ es acotada y alcanza sus extremos. Es decir, existe $x_0 \in K$ tal que $\inf_{x\in K} d(x, \Omega^c) = d(x_0, \Omega^c)$. Más aún, $d(x_0, \Omega^c) > 0$, pues caso contrario, si

$d(x_0, \Omega^c) = 0$ tenemos que $x_0 \in \Omega^c$, lo que es imposible pues $x_0 \in K \subseteq \Omega$. Así, por propiedad arquimediana, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\inf_{x \in K} d(x, \Omega^c) > \frac{1}{n_2}$. De donde, por definición de ínfimo sabemos que para todo $x \in K$, $d(x, \Omega^c) > \frac{1}{n_2}$; o lo que es lo mismo

$$K \subseteq \left\{ x \in \Omega \,:\, d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n_2} \right\}.$$

Por lo tanto, tomando $n_0 = max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}$, de lo hecho previamente concluimos que $K \subseteq K_{n_0}$ como queríamos. $\square$

Ahora, procedemos con la construcción de la topología, para cada $i \in \mathbb{N}$ definimos

$$\begin{aligned} p_i \colon\ C^k(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ u &\longmapsto p_i(u) = \begin{cases} p_i(u) = \sum\limits_{|\alpha| \leq k} \sup\limits_{x \in K_i} |\partial^\alpha u(x)|, \text{ si } u \in C^k(\Omega),\ k \in \mathbb{N}, \\ p_i(u) = \sum\limits_{|\alpha| i} \sup\limits_{x \in K_i} |\partial^\alpha u(x)|, \text{ si } u \in C^\infty(\Omega). \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces, la familia $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ define una familia de seminormas y más aún se puede dotar de una topología a $C^k(\Omega)$ a partir de esta familia. En efecto, para $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ y $\varepsilon > 0$, si $u \in C^k(\Omega)$, entonces definimos el conjunto:

$$V_{i,\varepsilon}(u) = \left\{ v \in C^k(\Omega) \,:\, p_i(v - u) < \varepsilon \right\}.$$

Así, una vecindad abierta de u, digamos W_u, se define como cualquier subconjunto de $C^k(\Omega)$ tal que para algún par (i, ε)

$$u \in V_{i,\varepsilon}(u) \subseteq W_u.$$

De esta manera, se tiene que la familia

$$\{V_{i,\varepsilon}(u)\}_{(i,\varepsilon) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+}$$

define una base de vecindades para cada $u \in C^k(\Omega)$ de una topología que denotaremos τ^*[2] sobre $C^k(\Omega)$. A continuación, presentaremos algunos resultados interesantes sobre esta topología.

PROPOSICIÓN 4. Sean $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y ϕ en $C^k(\Omega)$, entonces ϕ_n converge en τ^* a ϕ si y solo si para todo compacto $K \subseteq \Omega$ y para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ se tiene que

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in K} \left| \partial^\alpha (\phi_j - \phi)(x) \right| = 0.$$

[2] El caso general para la construcción de esta topología se puede ver en la Sección 1.3.

PROPOSICIÓN 5. Sean $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y ϕ en $C^k(\Omega)$ tal que ϕ_n converge a ϕ en τ^*, entonces se tiene que:

1. Para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq k$ se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} \partial^\alpha \phi_n = \partial^\alpha \phi.$$

2. Si $a \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} a\phi_n = a\phi.$$

En todos los casos la convergencia es en τ^*.

Por otro lado, es conocido que a partir de una familia de semi-métricas es posible definir una métrica sobre el conjunto. En ese caso analizaremos si la métrica obtenida y su topología inducida son iguales a la topología obtenida a partir de una vecindad de 0.

PROPOSICIÓN 6. Sobre $C^k(\Omega)$ consideremos

$$\begin{aligned} d\colon\ C^k(\Omega)\times C^k(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (u,v) \qquad &\longmapsto d(u,v) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}\frac{p_i(u,v)}{1+p_i(u,v)}, \end{aligned}$$

entonces d define una métrica sobre $C^k(\Omega)$ tal que

$$\left(C^k(\Omega), \tau_d\right) \approx \left(C^k(\Omega), \tau^*\right).$$

Demostración.

- **Métrica**

  Sean $u, v, w \in C^k(\Omega)$, entonces:

  - Puesto que cada p_i con $i \in \mathbb{N}$ es una semi-métrica, entonces es claro que d es simétrica y positiva por ser la suma de términos positivos.
  - Sí $u = v$, entonces es claro que $d(u,v)$ cada p_i con $i \in \mathbb{N}$ es una semi-métrica. Recíprocamente, si $d(u,v) = 0$, entonces

  $$p_i(u,v) = 0 \quad \forall i \in N,$$

  por lo tanto, por definición se tiene que

  $$u = v \text{ en } K_i \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

De esta manera, por la Proposición 3 se sigue que $u = v$ en Ω.

– Puesto que la función

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{t}{t+1} \end{aligned}$$

es creciente, pues su derivada es positiva y usando nuevamente el hecho de que cada p_i es una semi-métrica se tiene que para todo $i \in \mathbb{N}$

$$p_i(u-v) \leq p_i(u-w) + p_i(w-v)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \frac{p_i(u-v)}{1+p_i(u-v)} &\leq \frac{p_i(u-w)+p_i(w-v)}{1+p_i(u-w)+p_i(w-v)} \\ &\leq \frac{p_i(u-w)}{1+p_i(u-w)} + \frac{p_i(w-v)}{1+p_i(w-v)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\frac{1}{2^i}$ es positivo para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(u,v) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(u,v)}{1+p_i(u,v)} \\ \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \left[\frac{p_i(u-w)}{1+p_i(u-w)} + \frac{p_i(w-v)}{1+p_i(w-v)} \right] \\ d(u,w) + d(w,v), \end{aligned}$$

como se quería.

Así, se ha probado que d define una métrica sobre $C^k(\Omega)$.

- **Topologías equivalentes**

  Mostremos que: $\tau_d \subseteq \tau^*$.

  Para mostrar esta contenencia tomemos un abierto cualquiera en τ_d donde, dado que τ_d es la topología inducida por la métrica, sus abiertos son bolas abiertas. Así, fijando una bola, probemos que podemos encontrar un abierto en la topología τ^* tal que el centro de la bola está en el abierto de la topología τ^* y este a su vez se encuentra contenido en la bola abierta original.

  Sean $u_0 \in C^k(\Omega)$ y $r > 0$ arbitrario, pero fijo, entonces puesto que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} < +\infty,$$

entonces existe $i_0 \in \mathbb{N}$ (pues es la cola de una serie convergente) tal que

$$\sum_{i=i_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{r}{2},$$

con lo cual se sigue qué $V_{i_0,r/2}(u_0) \subseteq B(u_0,r)$. En efecto, si $v \in V_{i_0,r/2}(u_0)$, entonces

$$\begin{aligned}
d(u_0,v) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(u_0,v)}{1+p_i(u_0,v)} \\
&= \sum_{i=1}^{i_0} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(u_0,v)}{1+p_i(u_0,v)} + \sum_{i=i_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(u_0,v)}{1+p_i(u_0,v)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{i_0} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(u_0,v)}{1+p_i(u_0,v)} + \sum_{i=i_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} && \text{pues} \quad \frac{p_i(u_0,v)}{1+p_i(u_0,v)} \leq 1 \\
&\leq \sum_{i=1}^{i_0} \frac{1}{2^i} p_i(u_0,v) + \sum_{i=i_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} && \text{pues} \quad (1+p_i(u_0,v))^{-1} \leq 1 \\
&\leq \sum_{i=1}^{i_0} \frac{1}{2^i} p_i(u_0,v) + \sum_{i=i_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} && \text{pues} \quad K_i \subseteq K_{i_0} \ \forall 1 \leq i \leq i_0 \\
&\leq p_{i_0}(u_0-v) \sum_{i=1}^{i_0} \frac{1}{2^i} + \frac{r}{2} \\
&\leq \frac{r}{2} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} + 1 \right) && \text{pues} \quad v \in V_{i_0,r/2}(u_0) \\
&= r.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se ha probado que

$$V_{i_0,r/2}(u_0) \subseteq B(u_0,r),$$

así como $r > 0$ fue arbitrario, entonces se sigue lo requerido.

Mostremos que: $\tau^* \subseteq \tau_d$.

Para mostrar esta contenencia utilizaremos un razonamiento análogo al empleado anteriormente.

Recíprocamente, si fijamos i_0, ε, entonces se tiene que

$$u_0 \in B(u_0,r) \subseteq V_{i_0,\varepsilon}(u_0).$$

con $r = \frac{1}{2^{i_0}} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. En efecto, si $v \in B(u_0,r)$ entonces

$$d(v,u_0) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(u_0,v)}{1+p_i(u_0,v)} < \frac{1}{2^{i_0}} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

como es una serie de términos positivos, en particular se tiene que

$$\frac{1}{2^{i_0}}\frac{p_{i_0}(u_0,v)}{1+p_{i_0}(u_0,v)}<\frac{1}{2^{i_0}}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

despejando en la expresión anterior, se obtiene que

$$p_{i_0}(u_0-v)<\varepsilon,$$

es decir, se tiene qué $v\in V_{i_0,\varepsilon}(u_0)$, con lo que se sigue lo requerido.

De esta manera, se concluye que

$$\left(C^k(\Omega),\tau_d\right)\approx\left(C^k(\Omega),\tau^*\right),$$

como se quería. □

Una demostración de que $C^k(\Omega)$ no es normable se puede ver en la Observación 1.4 de [1]

2.2 Espacio $C^\infty(\Omega)$

Ahora, a partir de los conjuntos $C^k(\Omega)$ con $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ podemos definir el siguiente conjunto

$$C^\infty(\Omega)=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}C^k(\Omega),$$

donde cada $C^k(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $C^0(\Omega)$. Así, puesto que la intersección de espacios vectoriales es un espacio vectorial, se tiene que $C^\infty(\Omega)$ es un espacio vectorial. No obstante, no es un espacio normado. Más aún, sobre este nuevo conjunto podemos extender las definiciones realizadas para los conjuntos $C^k(\Omega)$ y para el cual se notará por

$$\mathcal{E}(\Omega)=\left(C^\infty(\Omega),\tau^*\right). \tag{5}$$

Naturalmente, se tienen las extensiones de las Proposiciones 4 y 5 para este espacio.

● **Observación.** Los espacios $C^0(\Omega)$, $C^k(\Omega)$ y $C^\infty(\Omega)$ son espacios vectoriales pero no espacios normados. No obstante, como vimos anteriormente, es posible dotarlos de topologías de tal manera que sean espacios vectoriales topológicos.

● **Observación.** A los elementos de $C^\infty(\Omega)$ se los denomina funciones suaves o infinitamente diferenciables.

3. Espacios a soporte compacto

3.1 Soporte de una función

Definición 4: Soporte de una función continua.

Sea $u \in C^0(\Omega)$, se define el *soporte* de u como el conjunto

$$\operatorname{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega \,:\, u(x) \neq 0\}}.$$

A continuación se presentan algunas propiedades:

Proposición 7. Sea $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces:

1. $\operatorname{supp}(u)$ es cerrado.
2. Si $x \notin \operatorname{supp}(u)$, entonces $u(x) = 0$.
3. Si $\operatorname{supp}(u) =$ entonces $u = 0$.
4. Si $\phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\phi = 1$ sobre $\operatorname{supp}(u)$, entonces $u = \phi u$.

● **Observación.** Equivalentemente, se tiene que el soporte se puede ver como

$$\operatorname{supp}(u) = \Omega \setminus \left(\bigcup_{\substack{\omega \text{ es abierto} \\ u=0 \text{ en } \omega}} \omega \right)$$

3.2 Espacios $C_c^k(\Omega)$

Para $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, definimos los conjuntos

$$C_c^k(\Omega) = \Big\{ u \in C^k(\Omega) \,:\, \operatorname{supp}(u) \text{ es compacto} \Big\}$$

Es usual encontrar que los espacios $C_c^k(\Omega)$ espacios también se los nota como $C_o^k(\Omega)$, con $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

De la misma manera, podemos definir el espacio

$$C_c^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_c^k(\Omega).$$

> Es usual encontrar que los espacios $C_c^\infty(\Omega)$ espacios también se los nota como $C_0^\infty(\Omega)$, $D^\infty(\Omega)$ o simplemente $D(\Omega)$.

OBSERVACIÓN. A los espacios $C_c^0(\Omega)$ y $C_c^k(\Omega)$ se los puede dotar de una norma para convertirlos en espacios normados y en algunos casos espacios de Banach. En efecto, consideremos los siguientes ejemplos

$$\begin{array}{ll} \left(C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty\right) & \text{Completo} \\ \left(C^0([a,b]), \|\cdot\|_1\right) & \text{No es completo} \\ \left(C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty\right) & \text{No es completo} \\ \left(C^1([a,b]), \|\cdot\|_1\right) & \text{No es completo} \\ \left(C^1([a,b]), \|\cdot\|_*\right) & \text{Completo} \end{array}$$

donde

$$\|u\|_* = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty .$$

Más aún, con base en lo anterior, podemos definir, de manera general, la siguiente norma

$$\|u\|_{C_c^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \left\|\partial^k u\right\|_\infty .$$

OBSERVACIÓN. Dado que los espacios anteriores no siempre brindan las condiciones adecuadas para que ciertas funciones útiles para el estudio de las EDP's tengan propiedades de continuidad, se definen topologías adecuadas que hacen que estas funciones útiles tengan buenas propiedades. La topología mencionada es la *topología del límite inductivo*, ver sección 1.4.

3.3 Topología límite inductivo en $C_c^\infty(\Omega)$

Sabemos que $C_c^\infty(\Omega) \subseteq C^\infty(\Omega)$ entonces es posible equipar a $C_c^\infty(\Omega)$ con la topología inducida por τ^*. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, esta topología presenta problemas. Aquí, la propiedad de tener soporte compacto no se preserva bajo la convergencia.

EJEMPLO 1. Consideramos la función

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} e^{\frac{1}{|x-\frac{1}{2}|^2-\frac{1}{4}}} & 0 < x < 1, \\ 0 & x \le 0 \text{ o } x \ge 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Se cumple que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}(\phi) = [0,1]$ y $\phi > 0$ en $(0,1)$. Para todo $j \in \mathbb{N}$ se define

$$\phi_j(x) = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k}\phi(x-k).$$

Entonces, $\phi_j \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}(\phi_j) = [1, j+1]$ y ϕ_j converge a ϕ en $C^\infty(\mathbb{R})$, donde

$$\phi(x) = \sum k = 1^\infty \frac{1}{k}\phi(x-k), \quad \text{no tiene soporte compacto.}$$

La falencia que se acaba de resaltar indica que la familia $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ no tiene suficientes seminormas que prevengan que las sucesiones de Cauchy se "escapen / fuguen" hacia la frontera de Ω. Esta problemática se soluciona introduciendo más seminormas de forma que se cree una topología diferente en $C_c^\infty(\Omega)$ la que es más fina que la heredada por τ^*. Para este propósito, consideremos el espacio

$$D_K^\infty(\Omega) = \left\{u \in C_c^k(\Omega) \,:\, \operatorname{supp}(u) \subseteq K\right\},$$

este es un subespacio vectorial de $C^\infty(\Omega)$ al cual dotaremos de la topología inducida por $\mathcal{E}(\Omega)$. Consideramos la sucesión de compactos $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dada por la Proposición 3, entonces $C_c^\infty(\Omega) = \bigcup_{j=1}^\infty D_{K_j}^\infty(\Omega)$, pues cualquier compacto de Ω esta contenido en K_j para j suficientemente grande.
Por la forma en la que construimos los espacios $D_{K_j}^\infty(\Omega)$, tenemos que $D_{K_j}^\infty(\Omega) \subseteq D_{K_{j+1}}^\infty(\Omega)$ y $D_{K_{j+1}}^\infty(\Omega)$ induce en el subespacio $D_{K_j}^\infty(\Omega)$ la misma topología que fue inducida originalmente en este; es decir, la topología del subespacio inducida en $D_{K_{j+1}}^\infty(\Omega)$ por $\mathcal{E}(\Omega)$.
Por lo tanto, podemos equipar $C_c^\infty(\Omega)$ con la topología del límite inductivo τ_{ind} con respecto a la sucesión de espacios $\{D_{K_j}^\infty(\Omega)\}_{j\in\mathbb{N}}$.[3]
Finalmente, al espacio vectorial topológico resultante lo denotaremos por $D^\infty(\Omega)$ o $D^\infty(\Omega)$; es decir,

$$D^\infty(\Omega) = \left(C_c^\infty(\Omega), \tau_{ind}\right).$$

● **Observación.** En la literatura es usual encontrar que al espacio $D^\infty(\Omega)$ se lo llama el espacio de las *funciones test*.

A continuación, presentaremos algunos resultados interesantes de este nuevo espacio.

> **Proposición 8.** El espacio vectorial topológico $D^\infty(\Omega)$ es localmente convexo y completo. Además, $D^\infty(\Omega)$ no es metrizable pues no es de Baire.

[3] En la Sección 1.4 se puede ver más sobre esta topología.

Proposición 9: Convergencia en $D^\infty(\Omega)$. Sean $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y ϕ. Se tiene que ϕ_n converge a ϕ en $D^\infty(\Omega)$ si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Existe un compacto $K \subseteq \Omega$ tal que $\operatorname{supp}(\phi_n) \subseteq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\operatorname{supp}(\phi) \subseteq K$.

2. Para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in K} \left|\partial^\alpha(\phi_j - \phi)(x)\right| = 0.$$

Un resultado similar a la Proposición 5 pero para el espacio $D^\infty(\Omega)$ se presenta a continuación.

Proposición 10. Sean $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y ϕ en $C_c^\infty(\Omega)$ tal que ϕ_n converge a ϕ en $D^\infty(\Omega)$, entonces se tiene que:

1. Para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} \partial^\alpha \phi_n = \partial^\alpha \phi.$$

2. Si $a \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} a\phi_n = a\phi.$$

En todos los casos la convergencia es en $D^\infty(\Omega)$.

Para finalizar esta sección, sabemos que la topología $D^\infty(\Omega)$ es más fina que la topología inducida en $C_c^\infty(\Omega)$ por $\mathcal{E}(\Omega)$, un ejemplo que muestra eso fue presentado en el Ejemplo 1. A continuación presentaremos otro ejemplo que muestra que aun cuando el límite está en $D^\infty(\Omega)$ no se puede concluir que la convergencia en $\mathcal{E}(\Omega)$ implique la convergencia en $D^\infty(\Omega)$.

Ejemplo 2. Consideremos la función ϕ como en el Ejemplo 1 y para cada $j \in \mathbb{N}$ definamos

$$\phi_j(x) = \phi(x - j) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Entonces es claro que

$$\phi_j \in C^\infty(\Omega) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{supp}(\phi_j) \subseteq [j, j+1] \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

De esta manera, si tomamos K un compacto cualquiera en $\mathbb{R}$ entonces podemos encontrar

$j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq [-j_0, j_0]$; así, por construcción se tiene que

$$\text{supp}\,(\phi_j) \cap K = \varnothing \quad \forall j \geq j_0.$$

Más aún, esto implica que

$$\lim_{j \to +\infty} \sup_{x \in K} \left| \phi_n^{(k)}(x) \right| = 0,$$

es decir, ϕ_j converge a 0 en $\mathcal{E}\,(\Omega)$. Ahora, si suponemos que ϕ_j converge a 0 en $D^\infty\,(\Omega)$ entonces existe $r > 0$ finito tal que $\text{supp}\,(\phi_j) \subset [-r, r]$ para todo $j \in \mathbb{N}$ lo cual no es posible pues

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \text{supp}\,(\phi_j) = [1, +\infty[.$$

3.3.1 Resultados de densidad

Proposición 11. Se tiene que $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en L^p para $p \in [1, +\infty[$.

Veamos que pasa con el caso $p = +\infty$. Desearíamos que al igual que en la proposición anterior, $\overline{D^\infty(\mathbb{R}^n)}^{L^\infty} = L^\infty(R^n)$. Sin embargo, dado que la norma uniforme preserva la continuidad en el límite, esto no es posible.

Definición 5.
Definimos $C_0(\mathbb{R}^n)$ como el espacio de funciones continuas real valuadas que se anulan en el infinito; eso es, dada $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ si y solo si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ compacto})(|f| < \varepsilon \quad \text{en } \mathbb{R}^n \setminus K).$$

Es claro que $D^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq C_0(\mathbb{R}^n)$ y que $C_0(\mathbb{R}^n) \subseteq L^\infty(R^n)$. Tenemos el siguiente resultado:

Proposición 12. $\overline{D^\infty(\mathbb{R}^n)}^{L^\infty} = C_0(\mathbb{R}^n)$

Demostración. Primero mostremos que $\overline{D^\infty(\mathbb{R}^n)}^{L^\infty} \subseteq C_0(\mathbb{R}^n)$. Sean $f \in \overline{D^\infty(\mathbb{R}^n)}^{L^\infty}$, entonces existe $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en $D^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_n \to f$ en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Mostremos que $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$.
Es claro que f es continua. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ cualquiera, de la convergencia anterior, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_{N_0} - f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_{N_0}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Entonces para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}(f_{N_0})$, tenemos que:

$$|f(x)| = |f(x) - f_{N_0}(x)| \leq \|f_{N_0} - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ como queríamos.

Por otro lado, veamos que $C_0(\mathbb{R}^n) \subseteq \overline{D^\infty(\mathbb{R}^n)}^{L^\infty}$. En efecto, sea $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, probemos que existe $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $D^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_n \to f$ en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Como $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $K_n \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que

$$|f_n(x)| < \frac{1}{n} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n \setminus K_n.$$

Como K_n es compacto, existe $c_n > 0$ tal que $K_n \subseteq B(0, c_n)$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $g_n \in D^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que verifica lo siguiente:

- $g_n(x) = 1 \quad \forall x \in K.$
- $g_n(x) = 0 \quad \forall x \in B(0, c_n)^c.$
- $0 \leq g_n(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$

Tomando, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n := f\, g_n \in D^\infty(\mathbb{R}^n)$, veamos que $f_n \to f$ en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.
Sea $n \in \mathbb{N}$, notemos que:

- Si $x \in K_n$, de las propiedades de g_n, tenemos que

$$|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - f(x)| = 0.$$

- Si $x \in (K_n)^c \cap B(0, c_n)$, tenemos que

$$|f(x) - f_n(x)| = |f(x)||1 - g_n(x)| \leq |f(x)| < \frac{1}{n}.$$

- Si $x \in B(0, c_n)^c$, tenemos que

$$|f(x) - f_n(x)| = |f(x)| < \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto,

$$\|f - f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{n},$$

de donde, haciendo $n \to +\infty$, del teorema del estricción concluimos que $f_n \to f$ en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ como queríamos. $\square$

4. DISTRIBUCIONES

En esta sección se hará una breve introducción a las distribuciones con algunos resultados útiles.

DEFINICIÓN 6: Distribución.
Sea $u\colon D^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ una aplicación. Se dice que u es una *distribución* en Ω si u es lineal y continuo.

Por la definición presentada, se deduce que distribuciones son elementos del espacio dual de espacio vectorial topológico $D^\infty(\Omega)$. Para este tipo de funcionales utilizaremos la siguiente notación para la evaluación de dichos funcionales. Dada una $\phi \in D^\infty(\Omega)$, notamos la evaluación de u en ϕ por $\langle u, \phi \rangle$.

● **OBSERVACIÓN.** Recordemos que, en general, una aplicación lineal y continua es secuencialmente continua; el recíproco, en general, no es cierto.

No obstante, en el caso de los funcionales definidos sobre $D^\infty(\Omega)$, se tiene que la continuidad es equivalente a la continuidad secuencial.

PROPOSICIÓN 13. Sea $u\colon D^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ una aplicación lineal. Entonces u es una distribución sobre Ω si y solo si para todo sucesión $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que converge a ϕ en $D^\infty(\Omega)$ se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} \langle u, \phi_n \rangle = \langle u, \phi \rangle .$$

● **OBSERVACIÓN.** Dado que $D^\infty(\Omega)$ es un espacio vectorial topológico, en general, basta probar que la sucesión converge a 0 para probar la continuidad secuencial.

TEOREMA 14: Caracterización de distribución.
Sea $u\colon D^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ una aplicación lineal. Entonces u es una distribución si y solo si para todo compacto $K \subseteq \Omega$ existe $k \in \mathbb{N}_0$ y $C > 0$ tales que

$$|\langle u, \phi \rangle| \le C \sup_{\substack{x\in K \\ |\alpha|\le k}} \left|\partial^\alpha \phi_j(x)\right| \quad \forall \phi \in D^\infty(\Omega) \quad \text{tal que} \quad \operatorname{supp}(\phi) \subseteq K. \tag{6}$$

Notemos que el teorema anterior puede ser reformulado de la siguiente manera: Una aplicación lineal $u\colon D^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ es una distribución si y solo si $u\big|_{D_K(\Omega)}$ es continuo para todo $K \subseteq \Omega$.

DEFINICIÓN 7: Orden de una distribución.
Sea u una distribución en Ω. Si el entero no negativo k utilizado en el Teorema 14 es independiente del conjunto compacto K, entonces u se dice una *distribución de orden finito*. Si u es una distribución de orden finito, entonces el orden está dado por el entero no negativo k más pequeño que satisface la condición dada en (6).

EJEMPLO 3. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, definamos el funcional $u_f \colon D^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ por

$$u_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx, \quad \forall \phi \in D^\infty(\Omega)\,.$$

Es claro que u_f es lineal y además para todo compacto K en Ω

$$|u_f(\phi)| \le \sup_{x\in K}|\phi(x)| \int_K |f|\,dx = D \sup_{x\in K}|\phi(x)|,$$

para todo $\phi \in D^\infty(\Omega)_K$. Por lo tanto, u_f es una distribución en Ω de orden 0.

DEFINICIÓN 8.
Las distribuciones asociadas a una función en $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ como en el Ejemplo 3 se denominan *distribuciones de una función tipo*.

4.1 Soporte de una distribución

Antes de presentar la definición del soporte de una distribución, vamos a definir la restricción de una distribución a un abierto subconjunto del dominio en el cual se definió la distribución original.

Una primera aproximación la realizaremos considerando una *distribución de una función tipo*. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y $\omega \subseteq \Omega$ un abierto, entonces es claro que $f\big|_\omega \in L^1_{\text{loc}}(\omega)$[4]. Por lo tanto, se tiene que

$$\left\langle f\big|_\omega, \phi \right\rangle = \int_\omega fg\,dx = \int_\Omega f\iota(\phi)\,dx \quad \forall C_c^\infty(\omega),$$

donde

$$\begin{aligned} \iota\colon\ C_c^\infty(\omega) &\longrightarrow C_c^\infty(\Omega) \\ \phi \quad &\longmapsto \iota(\phi) = \begin{cases} \phi & \text{en } \omega \\ 0 & \text{en } \Omega \setminus \omega \end{cases}. \end{aligned} \tag{7}$$

PROPOSICIÓN 15. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ y $\omega \subseteq \Omega$ abiertos no vacíos. Entonces para cada

[4]Ver Observación en la página 2

$uD'(\Omega)$, definimos la restricción de u a ω como

$$\begin{aligned} u\big|_{\omega}\colon\ D^{\infty}(\omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \phi &\longmapsto \left(u\big|_{\omega}\right)(\phi) = \langle u, \iota(\phi)\rangle \quad \forall \phi \in C_c^{\infty}(\Omega) \end{aligned}$$

la cual es lineal y continua y, por lo tanto, $u\big|_{\omega} \in D'(\omega)$

Proposición 16. Sean $u_1, u_2 \in D'(\Omega)$ tales que para todo $x_0 \in \Omega$ existe un abierto ω de Ω con $x_0 \in \omega$ tal que

$$u_1\big|_{\omega} = u_2\big|_{\omega} \quad \text{en} \quad D'(\omega)$$

entonces $u_1 = u_2$ en $D'(\omega)$.

Definición 9: Soporte de una distribución.

Sea $u \in D'(\Omega)$, entonces el *soporte* de u se define como

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}(u) = \{x \in \Omega :\ & \text{no existe un abierto } \omega \\ & \text{tal que } x \in \omega \subseteq \Omega \text{ y } u\big|_{\omega} = 0\Big\}. \end{aligned}$$

A partir de la definición anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} \Omega \setminus \operatorname{supp}(u) = \{x \in \Omega :\ & \text{existe } \omega \text{ un abierto tal que} \\ & x \in \omega \subseteq \Omega \text{ y } u\big|_{\omega} = 0\Big\}. \end{aligned}$$

4.2 Derivadas distribucionales

Definición 10.

Sea $u \in D'(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, entonces la *derivada distribucional* o derivada en el sentido de las distribuciones de orden α de u se define como el funcional $D^{\alpha}u\colon D^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{C}$ dado por

$$\partial^{\alpha}u(\phi) = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^{\alpha}\phi\rangle \quad \forall \phi \in D^{\infty}(\Omega).$$

● **Observación.** Note que si u es una distribución asociada a una función $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, entonces si f posee derivada débil de orden α, es decir, existe $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} f\partial^{\alpha}\phi\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} g\phi\, dx \quad \forall \phi \in C_c^{\infty}(\Omega),$$

entonces la derivada distribucional ∂u es igual a la distribución asociada a g.

4.3 Distribuciones a soporte compacto

Introduzcamos la siguiente notación

$$D_c'(\Omega) = \left\{ u \in D'(\Omega) \; : \; \operatorname{supp}(u) \text{ es un subconjunto compacto de } \Omega \right\}. \tag{8}$$

Por otro lado, también tenemos que

$$\mathcal{E}'(\Omega) = \{ u \colon \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbb{C} \; : \; u \text{ es lineal y continuo} \}. \tag{9}$$

Con lo cual se tiene el siguiente resultado:

TEOREMA 17.
Los espacios $D_c'(\Omega)$ y $\mathcal{E}'(\Omega)$ son algebráicamente isomorfos.

Ver: Teorema 2.59, Pág. 41, [2]

Gracias al teorema anterior, en general, se dice que el espacio dual de $\mathcal{E}(\Omega)$ es el espacio de distribuciones a soporte compacto. De hecho, en general se hará uso de esta identificación para definir el espacio dual de $\mathcal{E}(\Omega)$ durante todo el texto salvo que se especifique lo contrario, lo que nos permite definir el espacio dual de $\mathcal{E}(\Omega)$ como

$$\mathcal{E}'(\Omega) = \left\{ u \in D'(\Omega) \; : \; \operatorname{supp}(u) \text{ es un subconjunto compacto de } \Omega \right\}. \tag{10}$$

Los espacios $D_c'(\Omega)$ y $\mathcal{E}'(\Omega)$ no son topológicamente isomorfos pues existen sucesiones de distribuciones a soporte compacto que convergen en $D'(\Omega)$ pero no convergen en $\mathcal{E}'(\Omega)$.

PROPOSICIÓN 18. Sea $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, y $K_0 = \operatorname{supp}(T)$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ y $K \subset \Omega$ compacto (vecindad de K_0) y $C = C_{k,K} > 0$ tales que

$$|\{T, \varphi\}| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha(x)|, \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega).$$

4.4 Producto tensorial de distribuciones

Antes de definir el producto tensorial de distribuciones, consideremos el caso de las funciones, con esto en mente posteriormente extenderemos la definición a distribuciones.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$, U un abierto en $\mathbb{R}^m$, V un abierto de $\mathbb{R}^n$, $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$ y $g \in L^1_{\text{loc}}(V)$.

Entonces, se define el producto tensorial de f y g como

$$\begin{aligned} f \otimes g \colon \; U \times V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y) &\longmapsto f(x)g(y) \end{aligned}.$$

Notemos que a partir de lo anterior, se deduce que $f \otimes g \in L^1_{\text{loc}}(U \times V)$. Así, si ahora consideramos las distribuciones inducidas por f y g, se tiene que para $\phi \in D^\infty(U \times V)$

$$\begin{aligned} \langle f \otimes g, \phi \rangle &= \int_{U \times V} f(x)g(y)\phi(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_U f(x) \left(\int_V g(y)\phi(x,y)\,dy \right) dx \\ &= \int_U f(x) \left(\langle g, \phi(x,\cdot) \rangle \right) dx \\ &= \langle f, \langle g, \phi(x,\cdot) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

De la misma manera, también se tiene que

$$\begin{aligned} \langle f \otimes g, \phi \rangle &= \int_{U \times V} f(x)g(y)\phi(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_V g(y) \left(\int_U f(x)\phi(x,y)\,dx \right) dy \\ &= \int_V g(y) \left(\langle f, \phi(\cdot,y) \rangle \right) dy \\ &= \langle g, \langle f, \phi(\cdot,y) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

En consecuencia, se sigue que

$$\langle f \otimes g, \phi \rangle = \rangle f, \langle g, \phi(x,\cdot) \rangle \rangle \langle = \langle g, \langle f, \phi(\cdot,y) \rangle \rangle \quad \forall \phi \in D^\infty(U \times V).$$

Ahora, si además ϕ es de la forma $\phi_1 \otimes \phi_2$ con $\phi_1 \in D^\infty(U)$ y $\phi_2 \in D^\infty(V)$, entonces se tiene que

$$\langle f \otimes g, \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle = \langle f, \phi_1 \rangle \langle g, \phi_2 \rangle .$$

Teorema 19: Producto tensorial de distribuciones.
Sean $n, m, \in \mathbb{N}$, U un abierto en $\mathbb{R}^m$, V un abierto de $\mathbb{R}^n$, $u \in D'(U)$ y $v \in D'(V)$. Entonces, existe una única distribución $u \otimes v \in D'(U \times V)$ tal que

$$\langle u \otimes v, \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle = \langle u, \phi_1 \rangle \langle v, \phi_2 \rangle \quad \forall \phi_1 \in D^\infty(U), \phi_2 \in D^\infty(V).$$

● **Observación.** El producto tensorial de distribuciones es conmutativo, es decir, $u \otimes v = v \otimes u$.

PROPOSICIÓN 20. Sean $n, m, \in \mathbb{N}$, U un abierto en $\mathbb{R}^m$, V un abierto de $\mathbb{R}^n$, $u \in D'(U)$ y $v \in D'(V)$. Entonces, se tienen las siguientes propiedades:

1. $\operatorname{supp}(u \otimes v) = \operatorname{supp}(u) \times \operatorname{supp}(v)$.

2. Para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ y $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, se tiene que
$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta (u \otimes v) = \partial^\alpha u \otimes \partial^\beta v.$$

3. La función $u \otimes v \colon D'(u) \times D'(v) \to D'(U \times V)$ es bilineal.

4. El producto tensorial de distribuciones es asociativo.

● **OBSERVACIÓN.** Sean $T \in D^\infty(\Omega_x)$ y $S \in D^\infty(\Omega_y)$, consideremos $\chi \in D^\infty(\Omega_y)$ tal que $\chi = 1$ en alguna vecindad de $\operatorname{supp}(S)$. Podemos extender $T \otimes S$ a funciones $\varphi \in C^\infty(\Omega_y)$ tales que $\chi\varphi \in D^\infty(\Omega_y)$; es decir,
$$\langle T \otimes S,\, \varphi \rangle = \langle T \otimes S,\, \chi\varphi \rangle .$$

4.5 Convolución de distribuciones

TEOREMA 21: Convolución de distribuciones.
Dados $T \in D'(\mathbb{R}^N)$ y $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. La forma lineal, notada como $T \star S$, definida sobre $D^\infty(\mathbb{R}^N)$ por
$$\langle T \star S, \varphi \rangle = \left\langle T_y \otimes S_z,\, \varphi(y+z) \right\rangle , \tag{11}$$
es una distribución llamada la convolución de las distribuciones T y S.

Demostración. El término a la derecha de la expresión (11) tiene sentido, pues sean $\varphi \in D^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $\chi \in D^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\chi = 1$ en una vecindad del soporte de S (digamos K_0), entonces la función $\phi(y,z) = \chi(z)\varphi(y+z)$ pertenece a $D^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.
En efecto, es claro que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, veamos que
$$\operatorname{supp}(\phi) \subseteq (\operatorname{supp}(\varphi) - \operatorname{supp}(\chi)) \times \operatorname{supp}(\chi) .$$

Sea $(y,z) \notin (\operatorname{supp}(\varphi) - \operatorname{supp}(\chi)) \times \operatorname{supp}(\chi)$, entonces $z \notin \operatorname{supp}(\chi)$ o $z + y \notin \operatorname{supp}(\varphi)$, de donde, $\chi(z)\varphi(y+z) = 0$. Así, como $(\operatorname{supp}(\varphi) - \operatorname{supp}(\chi)) \times \operatorname{supp}(\chi)$ es cerrado, concluimos la contenencia deseada; más aún, como $\chi, \varphi \in D^\infty(\mathbb{R}^N)$, se sigue que $\operatorname{supp}(\phi)$ es compacto y por tanto $\phi \in D^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.

Mostremos que $T \star S \in D'(\mathbb{R}^N)$; es decir, sea $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, probemos que existen

$m = m(K) \in \mathbb{N}$ y $C = C(K, m) > 0$ tales que para todo $\varphi \in D^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$,

$$|A| := \left|\left\langle T_y,\, \langle S_z, \chi(\cdot)\varphi(y+\cdot)\rangle\right\rangle\right| \leq C \sum_{|\gamma|\leq m} \sup_{x\in K} |\partial^\gamma \varphi(x)|\,.$$

Sea $\varphi \in D^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$, dado que $S \in \mathcal{E}'\left(\mathbb{R}^N\right)$, sabemos que la función $y \mapsto \langle S_z,\, \chi(\cdot)\varphi(y+\cdot)\rangle$ pertenece a $D^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$; pues

$$\forall \eta \in \mathbb{N}^N, \forall y \in \mathbb{R}^N, \quad \partial_y^\eta \langle S_z,\, \chi(\cdot)\varphi(y+\cdot)\rangle = \langle S_z,\, \chi(\cdot)(\partial^\eta \varphi)(y+\cdot)\rangle\,,$$

y como $\operatorname{supp}(S) \subseteq K_0 \subseteq \operatorname{supp}(\chi)$, su soporte está contenido en $\operatorname{supp}(\varphi) - K_0 \subseteq K - K_0$. Entonces, como $T \in D'\left(\mathbb{R}^N\right)$, existen $C_1 > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned} |A| &\leq C_1 \sum_{|\beta|\leq k} \sup_{y\in K-K_0} \left|\partial_y^\beta \langle S_z,\, \varphi(y+\cdot)\rangle\right| \\ &= C_1 \sum_{|\beta|\leq k} \sup_{y\in K-K_0} \left|\left\langle S_z,\, \chi(\cdot)(\partial^\beta\varphi)(y+\cdot)\right\rangle\right|. \end{aligned} \tag{12}$$

Por otro lado, como $S \in \mathcal{E}'\left(\mathbb{R}^N\right)$, de la Proposición 18 existen $C_2 > 0$ y $l \in \mathbb{N}$ tales que para todo $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ y todo $w \in \mathbb{R}^N$, tenemos que

$$|\langle S_z,\, \psi(w+\cdot)\rangle| \leq C_2 \sum_{|\alpha|\leq l} \sup_{z\in K_0} |\partial^\alpha \psi(w+z)|\,.$$

Así, considerando $\psi(y+\cdot) = \chi(\cdot)(\partial^\beta\varphi)(y+\cdot)$ en lo anterior y recordando que $\chi = 1$ en K_0, de la regla de Leibniz tenemos que para todo $y \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} \left|\left\langle S_z,\, \chi(\cdot)(\partial^\beta\varphi)(y+\cdot)\right\rangle\right| &\leq C_2 \sum_{|\alpha|\leq l} \sup_{z\in K_0} |\partial^\alpha(\chi\tau_y(\varphi))(z)| \quad \text{, con } \tau_y(\varphi)(z) = \varphi(z+y), \\ &= C_2 \sum_{|\alpha|\leq l} \sup_{z\in K_0} \left|\sum_{\eta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\eta} \partial^\eta\chi(z)\cdot\partial^{\alpha-\eta}\tau_y\left(\partial^\beta\varphi\right)(z)\right| \\ &= C_2 \sum_{|\alpha|\leq l} \sup_{z\in K_0} \left|\partial^{\alpha+\beta}\varphi(y+z)\right| \quad \text{, pues en } K_0\,, \partial^\eta\chi = 0\ \forall \eta \neq 0. \end{aligned}$$

Luego, regresando a la desigualdad (12), por la última estimación concluimos que

$$\begin{aligned} |A| &\leq C_1\,C_2 \sum_{|\beta|\leq k}\sum_{|\alpha|\leq l} \sup\left\{\left|\partial^{\alpha+\beta}\varphi(y+z)\right| \,:\, z \in K_0 \text{ y } y \in K - K_0\right\} \\ &\leq C_1\,C_2 \sum_{|\gamma|\leq l+k} \sup_{x\in K} |\partial^\gamma\varphi(x)|\,, \end{aligned}$$

finalmente, tomando $m = l + k \in \mathbb{N}$ y $C = C_1\,C_2 > 0$, se tiene lo requerido. □

TEOREMA 22.
Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto. $D^\infty(\Omega)$ es denso en $D'(\Omega)$ y $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Demostración. Sea $T \in D'(\Omega)$, probemos que existe $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $D^\infty(\Omega)$ tal que $T_n \to T$ en $D'(\Omega)$. Sabemos, por la Proposición 3, que Ω es la unión de numerable de compactos, $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Así, podemos considerar una familia de funciones de corte tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ $\chi_n \in D^\infty(\mathrm{int}(K_{n+1}))$, $0 \le \chi_n \le 1$ y $\chi_n = 1 \quad$ en K_n.
Luego, sea $\theta \in D^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{supp}\,(\theta) \subseteq \bar{B}(0,1)$ y $\int \theta(x)\,dx = 1$. Consideramos la regularización estándar $\theta_n(x) = n^N\theta(nx)$, entonces, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \ge M$, $\mathrm{supp}\,(\chi_n) + \mathrm{supp}\,(\theta_n) \subset \Omega$.
Por otro lado, sea $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $\chi_n T \in D'(\Omega)$. Más aún, dado que $\mathrm{supp}\,(\chi_n T) \subseteq \mathrm{supp}\,(\chi_n) \cap \mathrm{supp}\,(T)$, $\chi_n T$ tiene soporte compacto; es decir, $\chi_n T \in \mathcal{E}'(\Omega) \subseteq \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. Así, podemos definir $T_n = (\chi_n T) \star \theta_n$. En un principio, $T_n \in D^\infty(\mathbb{R}^N)$, pero notando que

$$\begin{aligned}\mathrm{supp}\,(T_n) &\subseteq \mathrm{supp}\,(\chi_n T) + \mathrm{supp}\,(\theta_n)\\ &\subseteq (\mathrm{supp}\,(\chi_n) \cap \mathrm{supp}\,(T)) + \mathrm{supp}\,(\theta_n)\\ &\subseteq \mathrm{supp}\,(\chi_n) + \mathrm{supp}\,(\theta_n)\,,\end{aligned}$$

de lo hecho al comienzo, concluimos que para todo $n \ge M, \quad T_n \in D^\infty(\Omega)$.
Mostremos que $T_n \to T$ en $D'(\Omega)$; es decir, sea $\phi \in D^\infty(\Omega)$, debemos probar que

$$\langle T_n, \phi\rangle \to \langle T, \phi\rangle\,.$$

Notemos que, de la definición de convolución de distribuciones,

$$\begin{aligned}\langle T_n, \phi\rangle &= \langle (\chi_n T) \star \theta_n, \phi\rangle\\ &= \langle (\chi_n T)_x, \langle \theta_n\,,\ \phi(x+\cdot)\rangle\rangle\\ &= \left\langle (\chi_n T)_x, \int_{\mathbb{R}^N} \theta(y)\phi(x+y)\,dy\right\rangle\\ &= \left\langle (\chi_n T)_x, (\tilde{\theta_n} \star \phi)(x)\right\rangle,\end{aligned}$$

donde $\tilde{\theta}(x) = \theta(-x)$. Por lo tanto, de la definición de producto de una función suave con una distribución, tenemos que

$$\langle T_n, \phi\rangle = \left\langle T, \chi_n(\tilde{\theta_n} \star \phi)\right\rangle,$$

y entonces, el teorema será demostrado si probamos el siguiente lema. $\square$

LEMA 23. La sucesión $\left(\chi_n(\tilde{\theta_n} \star \phi)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ϕ en $D^\infty(\Omega)$.

Demostración. Primero, de manera similar a lo realizado anteriormente, como $\mathrm{supp}\,(\phi)$ es un compacto en Ω, existe n_0 suficientemente grande (podemos considerar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(\phi), \Omega^c) \geq \frac{2}{n_0}$) que satisface que

$$\operatorname{supp}\left(\tilde{\theta_{n_0}} \star \phi\right) \subseteq \operatorname{supp}(\phi) + \bar{B}(0, \frac{1}{n_0}) =: K_0 \subset \Omega.$$

Luego, como $K_0 \subset \Omega$ es compacto, de la Proposición 3 existe $\hat{N} \in \mathbb{N}$ tal que $K_0 \subset K_{\hat{N}} =: K$. Así, $\chi_{\hat{N}} = 1$ en K_0 y entonces, dado que $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, para todo $n \geq \hat{N}$ tenemos que

$$\operatorname{supp}\left(\chi_n(\tilde{\theta_n} \star \phi)\right) = \operatorname{supp}\left(\tilde{\theta_n} \star \phi\right) \subseteq K.$$

Ahora, sea $\alpha \in \mathbb{N}^N$, debemos probar que $\left(\partial^\alpha\left(\chi_n(\tilde{\theta_n} \star \phi)\right)\right)_{n\in N}$ converge uniformemente hacia ϕ sobre K. Sin embargo, sabemos que para todo $n \geq \hat{N}$, $\chi_n(\tilde{\theta_n} \star \phi) = \tilde{\theta_n} \star \phi$ en K. Entonces, basta probar lo anterior para $\left(\partial^\alpha\left(\tilde{\theta_n} \star \phi\right)\right)_{n\geq\hat{N}}$.
En efecto, sean $n \geq \hat{N}$ y $x \in K$, sabemos que $\partial^\alpha\left(\tilde{\theta_n} \star \phi\right) = \tilde{\theta_n} \star \partial^\alpha\phi$. Entonces, dado que $\int \theta(x)\,dx = 1$, de la definición de convolución, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\partial^\alpha\left(\tilde{\theta_n} \star \phi\right)(x) - \partial^\alpha\phi(x)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} \partial^\alpha\phi(x-y)\tilde{\theta_n}(y)\,dy - \partial^\alpha\phi(x)\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{\theta_n}(y)\,dy\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\partial^\alpha\phi(x-y) - \partial^\alpha\phi(x)|\left|\tilde{\theta_n}(y)\right|\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\partial^\alpha\phi(x-y) - \partial^\alpha\phi(x)|\left|n^N\theta(-ny)\right|\,dy.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $z = -ny$, se sigue que

$$\left|\partial^\alpha\left(\tilde{\theta_n} \star \phi\right)(x) - \partial^\alpha\phi(x)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left|\partial^\alpha\phi\left(x + \frac{1}{n}z\right) - \partial^\alpha\phi(x)\right| |\theta(z)|\,dz.$$

Luego, dado que $\phi \in D^\infty(\Omega) \subset D^\infty(\mathbb{R}^N)$, por el teorema de incrementos finitos, tenemos que para todo $z \in \mathbb{R}^N$ existe $w = w_z \in \mathbb{R}^N$ tal que,

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha\phi\left(x + \frac{1}{n}z\right) - \partial^\alpha\phi(x) &= \frac{1}{n}\nabla(\partial^\alpha\phi)(w)\cdot z \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}(\partial^\alpha\phi)(w)z_i\right).
\end{aligned}$$

Entonces, utilizando lo anterior en nuestra estimación inicial, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\partial^\alpha\left(\tilde{\theta_n} \star \phi\right)(x) - \partial^\alpha\phi(x)\right| &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial}{\partial x_i}(\partial^\alpha\phi)(w_z)\right| |z_i|\,|\theta(z)|\,dz \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial}{\partial x_i}(\partial^\alpha\phi)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} |z_i|\,|\theta(z)|\,dz.
\end{aligned}$$

Gracias a que $\theta \in D^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, su soporte es compacto y por tanto acotado; i.e., existe $C_\theta > 0$ tal que supp $(\theta) \subseteq \bar{B}(o, C_\theta)$, entonces,

$$\left|\partial^\alpha \left(\tilde{\theta_n} \star \phi\right)(x) - \partial^\alpha \phi(x)\right| \leq \frac{1}{n}\left(C_\theta \left\|\theta\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial}{\partial x_i}(\partial^\alpha \phi)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right) = \frac{1}{n}C,$$

donde $C > 0$ es la constante entre paréntesis. Finalmente, como $x \in K$ se consideró arbitrario, tenemos que para todo $n \geq \hat{N}$

$$\left\|\partial^\alpha \left(\tilde{\theta_n} \star \phi\right) - \partial^\alpha \phi\right\|_{L^\infty(K)} \leq \frac{C}{n},$$

de donde, haciendo $n \to +\infty$, concluimos que

$$\left\|\partial^\alpha \left(\tilde{\theta_n} \star \phi\right) - \partial^\alpha \phi\right\|_{L^\infty(K)} \to 0,$$

como queríamos. □

5. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es una herramienta matemática de gran utilidad en el análisis de señales y sistemas para la ingeniería, solución de ecuaciones en derivadas parciales, etc. En particular, es de nuestro interés aprovechar ciertas propiedades de la transformada respecto a las operaciones de derivación, lo que nos permitirá más adelante abordar ecuaciones en derivadas parciales desde un punto de vista algebraico con los beneficios que esto conlleva.

Recordemos que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces se define la *transformada de Fourier* de f como la función $\widehat{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ dada por

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\, dx \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Notemos que gracias a lo anterior, se tiene que

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left|\widehat{f}(\xi)\right| \leq \|f\|_{L^1}$$

y además, aplicando el teorema de convergencia dominada se puede demostrar que $\widehat{f}$ es una función continua, es decir, $\widehat{f} \in C_b(\mathbb{R}^n)$. Más aún, podemos definir el operador

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\colon\ L^1(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow C_b(\mathbb{R}^n) \\ f &\longmapsto \widehat{f} \end{aligned}$$

Proposición 24. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

Ver: Proposición 3.1, pág. 89, [2]

Ahora, como aplicación del teorema de Fubini, no es difícil ver que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)g(\xi)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\, dx \quad \forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n). \tag{13}$$

La identidad anterior nos sugiere que podría ser posible extender la definición de la transformada de Fourier a las distribuciones mediante la «dualidad» expresada en la identidad anterior. No obstante, si tomamos $\phi \in D^\infty(\Omega)$, entonces $\widehat{\phi} \in C^\infty(\Omega)$ y ϕ decae a cero en el infinito gracias a la Proposición 24, con lo cual, en principio no podemos afirmar que

$$\mathcal{F}\left(D^\infty(\Omega)\right) \subseteq D^\infty(\Omega).$$

● **OBSERVACIÓN.** Si $\phi \in D^{\infty}(\Omega)$ y $\widehat{\phi} \in D^{\infty}(\Omega)$, entonces $\phi = 0$.

Debido a lo anterior, es necesario considerar un nuevo espacio el cual se mantenga invariante bajo la transformada de Fourier. Puesto que la suavidad de las funciones se preserva bajo la transformada, es natural considerar el conjunto de las funciones suaves que decaen a cero en el infinito y cuyo espacio dual asociado a es un subconjunto de $D'(\Omega)$, este conjunto que puede dotarse de una topología vectorial se denomina el espacio de Schwartz.

Antes de presentar el espacio como tal, realizaremos algunas precisiones necesarias. Si $\phi \in D^{\infty}(\Omega)$, entonces al realizar las derivadas parciales de $\widehat{\phi}$ se tiene que cada «derivación» incluye un factor i, para ajustar este hecho, consideramos

$$\begin{aligned} D_j &= \frac{1}{i}\partial_j \quad j \in \{1, \dots, n\} \\ D^{\alpha} &= D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n. \end{aligned}$$

Ahora, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ y $\phi \in D^{\infty}(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned} \xi^{\beta} D^{\alpha}\widehat{\phi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \xi^{\beta} e^{-2\pi i x\cdot\xi}(-x)^{\alpha}\phi(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[(-D_x)^{\beta}\left(e^{-2\pi i x\cdot\xi}\right)\right](-x)^{\alpha}\phi(x)\, dx \qquad \text{Integración por partes} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\left[(D_x)^{\beta}\left((-x)^{\alpha}\phi(x)\right)\right] dx \end{aligned}$$

con lo cual, se sigue que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n}\left|\xi^{\beta} D^{\alpha}\widehat{\phi}(\xi)\right| \leq \int \mathbb{R}^n \left|\left[(D_x)^{\beta}\left((-x)^{\alpha}\phi(x)\right)\right]\right| dx < \infty.$$

Gracias a lo anterior, se concluye que las derivadas de todo orden de $\widehat{\phi}$ decrecen al infinito más rápido que cualquier polinomio lo que nos sugiere las condiciones apropiadas para definir el espacio de Schwartz.

5.1 Espacio de Schwartz

DEFINICIÓN 11: Espacio de Schwartz.
Se define el espacio de Schwartz, también llamado espacio de funciones a decaimiento rápido o clase de funciones de Schwartz, como el conjunto

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{\phi \in D^{\infty}(\Omega) \;:\; \sup_{x \in \mathbb{R}^n}\left|x^{\beta}\partial^{\alpha}\phi(x)\right| < +\infty \;\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\right\}$$

Gracias a la definición anterior y a lo hecho previamente, es claro que

$$D^{\infty}(\Omega) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subsetneq C^{\infty}(\Omega).$$

OBSERVACIÓN.

1. Sea $a \in]0, +\infty[$, definamos $f(x) = e^{-a\|x\|^2}$, entonces $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pero $f \notin D^{\infty}(\Omega)$.
2. Para $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$|x^{\alpha}| = |x_1|^{\alpha_1} \cdots |x_n|^{\alpha_n} \le \|x\|^{\alpha_1} \cdots \|x\|^{\alpha_n} = \|x\|^{|\alpha|}.$$

5.2 Distribuciones temperadas

El espacio dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es el espacio vectorial

$$\{u \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C} \ : \ u \text{ es lineal y continua}\}.$$

Los funcionales que pertenezcan a este espacio los denominaremos *distribuciones temperadas*. Una primera definición a partir de la cual se puede trabajar es la siguiente:

DEFINICIÓN 12: Distribución temperada.
Una aplicación lineal $S \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ tal que

$$S(\phi_n) \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to +\infty$$

se denomina una distribución temperada.

Ver: Sección 4.1 El espacio de distribuciones temperadas, [2]

En algunos casos es útil disponer de una caracterización que simplifique los cálculos realizados, para ello consideremos el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 25. Una aplicación lineal $S \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ es una distribución temperada si y solo si existen $C > 0$ y $m, k \in \mathbb{N}$ tales que

$$|\langle S, \phi \rangle| \le C \sum_{\substack{|\alpha| \le m \\ |\beta| \le k}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^{\beta} \partial^{\alpha} \phi(x) \right| \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Una vez hemos presentado el concepto de las distribuciones temperadas y recordando la motivación realizada al inicio de la sección, estamos interesados en definir la operación *transformada de Fourier* sobre las distribuciones temperadas. Para ello, consideremos la siguiente aproximación para obtener una idea intuitiva de cómo se podría definir.

Notemos que tomando $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\phi(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\phi}(x)\, dx \quad \forall \phi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Puesto que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $f, \hat{f} \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$. De esta manera, se puede reescribir la igualdad anterior de la siguiente manera

$$\left\langle \hat{f}, \phi \right\rangle = \left\langle f, \hat{\phi} \right\rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

A partir de lo anterior se presenta la definición de la transformada de Fourier de una distribución temperada.

DEFINICIÓN 13: Transformada de Fourier para distribuciones temperadas.
Sea $S \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \hat{S} \colon \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \phi &\longmapsto \hat{S}(\phi) = \left\langle S, \hat{\phi} \right\rangle \end{aligned}$$

está bien definida es lineal y continua, por lo tanto $\hat{S} \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$.

EJEMPLO 4: Distribución delta. Puesto que $\delta \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, entonces

$$\left\langle \hat{\delta}, \phi \right\rangle = \left\langle \delta, \hat{\phi} \right\rangle = \hat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i 0 \cdot \xi}\phi(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\xi)\, d\xi = \langle 1, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

De esta manera, se tiene que $\hat{\delta} = 1$. Por otro lado, si tomamos $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\widehat{\delta_{x_0}} = e^{-2\pi i x_0 \cdot \xi}.$$

EJEMPLO 5: Distribución valor principal. La distribución valor principal es una distribución temperada que se define como

$$\left\langle \text{p.v.}\frac{1}{x}, \phi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx \quad \forall \phi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Solución. Sea $\varepsilon \in \left]0,1\right[$, entonces para $\phi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ se tiene que

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx = \int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{\phi(x)}{x}\, dx + \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx.$$

Así, dado que la función $x \mapsto \frac{1}{x}$ es impar, se tiene que lo anterior es igual a

$$\int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\, dx + \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx.$$

Luego, aplicando el teorema de incrementos finitos, se sigue que

$$\left| \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} \right| \leq \|\phi'\|_\infty .$$

De esta manera, se tiene que el límite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}$$

existe y por lo tanto

$$\left\langle \text{p.v.}\frac{1}{x}, \phi \right\rangle = \int_{|x|<1} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x}\, dx + \int_{|x|>1} \frac{\phi(x)}{x}\, dx.$$

En consecuencia, gracias a que $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

$$\left| \left\langle \text{p.v.}\frac{1}{x}, \phi \right\rangle \right| \leq \|\phi'\|_\infty + C\, \|x\phi\|_\infty$$

de donde se sigue que

$$\left| \left\langle \text{p.v.}\frac{1}{x}, \phi \right\rangle \right| \leq C \sup_{\substack{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|\leq 1 \\ |\beta| \leq 1}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\beta \partial^\alpha \phi(x) \right| < +\infty.$$

Finalmente, tomando $m = k = 1$ en la definición 25, se tiene que la distribución valor principal es una distribución temperada. □

Una vez se ha establecido que la distribución *valor principal* constituye una distribución temperada, es posible calcular su transformada de Fourier. En efecto, realicemos el cálculo de la misma tomando $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$[5], entonces

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{F}\left(\text{p.v.}\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle &= \left\langle \text{p.v.}\frac{1}{x}, \mathcal{F}(\phi) \right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{F}(\phi)(\xi)}{\xi}\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\xi} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \phi(x)\, dx \right) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\xi} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \phi(x)\, d\xi\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\xi} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi \right) dx
\end{aligned}$$

[5]Notemos que en la demostración de que la distribución *valor principal* es una distribución temperada se mostró la convergencia del límite.

$$= \int_{\mathbb{R}} \phi(x) F(x)\, dx,$$

donde

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\xi} e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, d\xi = -\pi i \operatorname{sgn}(x).$$

En consecuencia, se tiene que

$$\mathcal{F}\left(\text{p.v.}\frac{1}{x}\right) = -\pi i \operatorname{sgn}(x).$$

5.3 Aplicación: Cálculo de una solución fundamental del operador Laplaciano

Dado $L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha (\cdot)$ un operador diferencial lineal a coeficientes constantes, donde $m \in \mathbb{N}$ y $a_\alpha \in \mathbb{C}$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
Decimos que $E \in D'(\Omega)$ es una solución fundamental del operador diferencial L si E verifica que

$$LE = \delta_0, \quad \text{en el sentido de las distribuciones.}$$

Teorema 26: Malgrange-Ehrenpreis.
Todo operador diferencial lineal a coeficientes constantes tiene una solución fundamental.

Si consideramos $L = \Delta$, el operador de la Laplace,y nos restringimos a hallar la solución fundamental en el espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Aplicando la transformada de Fourier a la solución fundamental, (con un abuso de notación) obtenemos que:

$$\hat{E} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{|\zeta|^2}. \tag{14}$$

Entonces, buscamos que el lado derecho de la expresión anterior este asociado a una distribución temperada para así "despejar" E mediante la transformada de Fourier inversa. Esto motiva la definición y discusión a continuación.

Definición 14.
Para cada $z \in \mathbb{C}$ definamos la distribución u_z como

$$\langle u_z, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)} |x|^z f(x)\, dx \quad \forall f \in D^\infty(\Omega). \tag{15}$$

Ver: Definición 2.4.5, [3]

Notemos que la definición anterior tiene sentido si $z \in \mathbb{C}$ es tal que $\operatorname{Re}(z) > -n$, pues en este caso la distribución u_z coincide[6] con la función localmente integrable

$$x \mapsto \frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)} |x|^z .$$

De esta manera, nos va a interesar extender la definición de u_z para todo $z \in \mathbb{C}$. Para ello, consideremos el caso base $\operatorname{Re}(z) > -n$ y fijemos un entero positivo N. Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, notemos que podemos reescribir la integral en (15) como

$$\begin{aligned}\int_{\|x\|<1} \frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)} |x|^z \left\{ f(x) - \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{x^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha f(0) x^\alpha \right\} dx + \int_{\|x\|\geq 1} \frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)} |x|^z f(x)\, dx \\ + \int_{\|x\|<1} \frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)} |x|^z \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{x^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha f(0) x^\alpha\, dx.\end{aligned}$$

En donde primero se ha separado la integral en dos regiones y se ha agregado un «cero» apropiado para los cálculos posteriores. A partir de esto, se tiene que realizando un cambio de variable en la última integral

$$\begin{aligned}\int_{\|x\|<1} \frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)} |x|^z \left\{ f(x) - \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{x^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha f(0) x^\alpha \right\} dx + \int_{\|x\|\geq 1} \frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)} |x|^z f(x)\, dx \\ + \int_0^1 \int_{S^{n-1}} \frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)} r^{z+n-1} \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{x^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha f(0) (r\theta)^\alpha\, dr\, d\theta.\end{aligned}$$

Despejando los términos apropiados, se obtiene la expresión

$$\begin{aligned}\int_{\|x\|<1} \frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)} |x|^z \left\{ f(x) - \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{x^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha f(0) x^\alpha \right\} dx + \int_{\|x\|\geq 1} \frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)} |x|^z f(x)\, dx \\ + \frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)} \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{x^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha f(0) \int_0^1 \int_{S^{n-1}} r^{z+n-1} (r\theta)^\alpha\, dr\, d\theta.\end{aligned} \tag{16}$$

Por otro lado, si ahora definimos

$$\begin{aligned} b(n,\alpha,z) &= \frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)} \frac{1}{\alpha!} \left(\int_{S^{n-1}} \theta^\alpha\, d\theta \right) \int_0^1 r^{|\alpha|+n+z-1}\, dr \\ &= \frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)} \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{|\alpha|+n+z} \left(\int_{S^{n-1}} \theta^\alpha\, d\theta \right)\end{aligned}$$

donde α es un multi-índice. Entonces, notemos que estos coeficientes son cero cuando al menos una de las componentes de α es impar. En efecto, si α es un multi-índice tal que α_j

[6]En este caso el argumento de la función gamma es estríctamente positivo.

es impar, entonces

$$\int_{S^{n-1}} \theta^{\alpha}\, d\theta = 0.$$

pues el integrando es una función impar. De esta manera, consideremos que α es un multi-índice tal que todas sus componentes son pares, entonces la función $\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)$ tiene polos[7] simples en

$$z + n = 0, -2, -4, -6, \ldots$$

No obstante, los polos anteriores cancelan exactamente los polos de la función

$$z \mapsto \frac{1}{|\alpha| + n + z}$$

en $z = -n - |\alpha|$ cuando $|\alpha|$ es un entero par comprendido entre 0 y N. Entonces, reemplazando el coeficiente encontrado en (16), se tiene que

$$\int_{\|x\|<1} \frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)} |x|^{z} \left\{ f(x) - \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{x^{\alpha}}{\alpha!} \partial^{\alpha} f(0) x^{\alpha} \right\} dx + \int_{\|x\|\geq 1} \frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)} |x|^{z} f(x)\, dx \\ + \sum_{|\alpha|\leq N} b(n, \alpha, z) \partial^{\alpha} f(0).$$

y por lo tanto

$$u_z = \int_{\|x\|<1} \frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)} |x|^{z} \left\{ f(x) - \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{x^{\alpha}}{\alpha!} \partial^{\alpha} f(0) x^{\alpha} \right\} dx + \int_{\|x\|\geq 1} \frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)} |x|^{z} f(x)\, dx \\ + \sum_{|\alpha|\leq N} b(n, \alpha, z) (-1)^{|\alpha|} \langle \partial^{\alpha} \delta_0, f \rangle . \tag{17}$$

Finalmente, como las integrales anteriores son absolutamente convergentes, cuando $\mathrm{Re}\,(z) > -N - n - 1$ pues el término

$$f(x) - \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{x^{\alpha}}{\alpha!} \partial^{\alpha} f(0) x^{\alpha}$$

está acotado por una constante asociada a $\|x\|^{N+1}$ y los términos restantes en la ecuación (17) son funciones localmente integrables. De esta manera, se tiene que la distribución u_z está bien definida para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}\,(z) > -N - n - 1$. Así, puesto que el entero N es arbitrario, se concluye que la distribución u_z está bien definida para todo $z \in \mathbb{C}$.

Una vez que se ha establecido la definición de la distribución u_z para todo $z \in \mathbb{C}$,

[7] Por definición de la función Gamma. Ver Poles of Gamma Function

es posible demostrar que la transformada de Fourier de u_z está bien definida para todo $z \in \mathbb{C}$.

TEOREMA 27.
Para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene que
$$\hat{u_z} = u_{-n-z}.$$

Ver: Teorema 2.4.6, [3]

TEOREMA 28.
Consideremos $n > 2$ y $0 < k < n$. Sea u_k la distribución temperada asociada a la fucnción $|x|^{-k}$, como en la definición anterior.
Entonces, su tranformada de Fourier inversa viene dada por
$$\check{u_k} = \frac{\Gamma(\frac{n-k}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})}\pi^{k-\frac{n}{2}} |x|^{k-n}.$$

Finalmente, si $n > 2$, utilizando el teorema anterior en (14), obtenemos que:
$$E = \frac{1}{4\pi^2}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) |x|^{2-n},$$
así, hemos obtenido una solución fundamental del operador Δ.

REFERENCIAS

[1] Claude Zuily. *Éléments de Distributions et D'Équations aux Dérivées Partielles*. Dunod, 2002.

[2] Dorina Mitrea. *Distributions, Partial Differential Equations, and Harmonic Analysis*. Springer, 2013.

[3] Loukas Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. Springer, 2008.

[4] Gerald B. Folland. *Introduction to Partial Differential Equations*. 2nd. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1995. ISBN: 9780691043616.

[5] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2nd. New York, NY: John Wiley & Sons, 1999. ISBN: 9780471317166.